



Лекція №4

Тема 2. Вступ до математичного аналізу.

Поняття функції однієї змінної. Методи побудови графіків функцій без використання похідної.

План

1. Функції попиту, пропозиції, витрат, доходу.
2. Множини. Дійсні числа. Числові проміжки, окіл точки.
3. Поняття функції. Способи завдання функції.
4. Складна функція.
5. Елементарні функції та побудова їх графіків.



Функції попиту, пропозиції, витрат, доходу.

Застосування функцій в економічних дослідженнях дозволяє описати і пояснити багато економічних процесів. Найчастіше в економіці використовують **виробничі функції** (визначають залежність результату виробництва від факторів що на нього впливають).

Найбільш поширеними серед них є функції попиту, пропозиції, витрат, доходу.

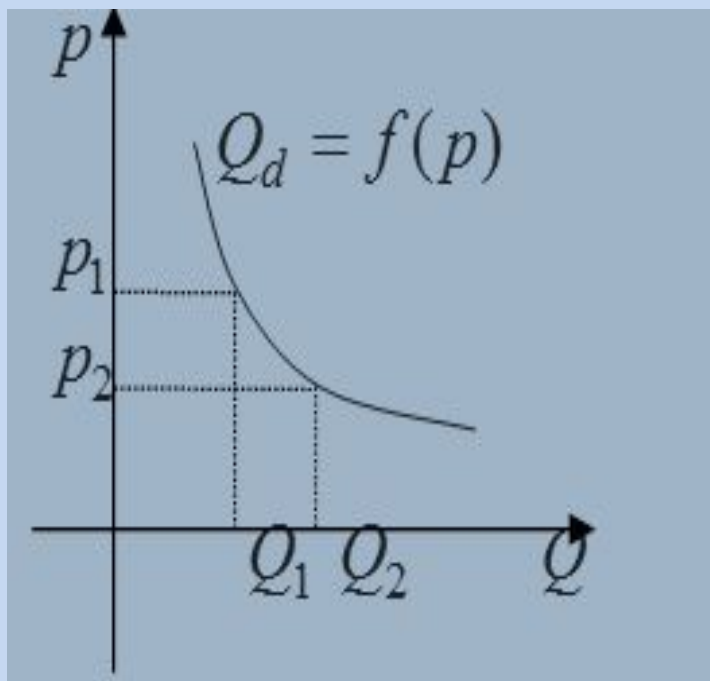


Функція попиту – залежність попиту на товар від ціни на нього.

$$Q_d = f(p)$$

де $-Q_d$ обсяг попиту на товар за одиницю часу, p (price) – ціна товару

Графік залежності попиту від ціни називають **кривою попиту**.



Залежність ціни від попиту можна виразити **оберненою** функцією

$p = \varphi(Q_d)$ яку називають функцією **цін попиту**.

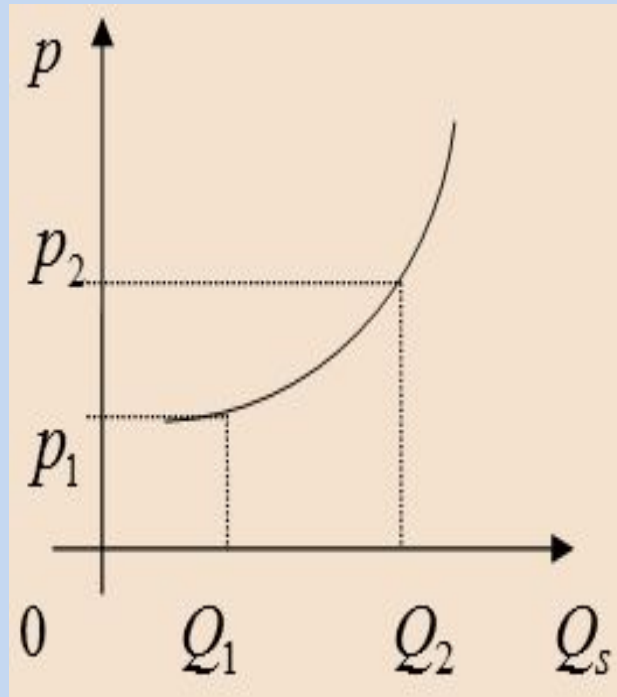
Тоді

$$R = p \cdot Q = p \cdot f(p) = Q \cdot \varphi(Q)$$

- сумарний виторг (загальний дохід) продавця



Функція пропозиції – залежність обсягу запропонованої продукції від ринкової ціни.



$$Q_s = f(p)$$

де Q_s обсяг попиту на товар за одиницю часу, p (price) – ціна товару

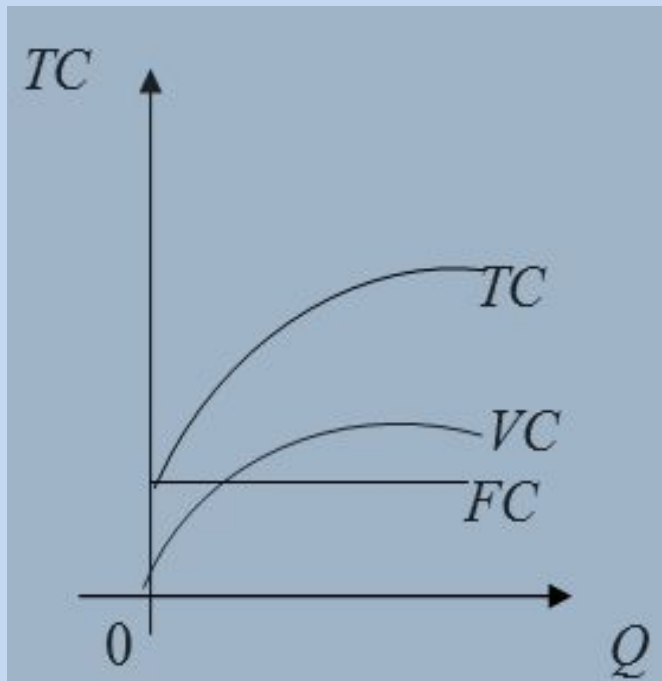
Графік залежності між кількістю запропонованих на ринок товарів і ціною називають **кривою пропозиції**.

Оберненою до цієї функції є функція **цін пропозиції**

$$p = \varphi(Q_s)$$



Функція витрат- залежність між витратами виробництва продукції і обсягом виробництва цієї продукції. $C=f(Q)$



де Q - обсяг продукції, C – сумарні витрати виробництва,

FC - (fixed costs) - постійні витрати,

$VC(Q)$ -(variable costs) - змінні витрати,

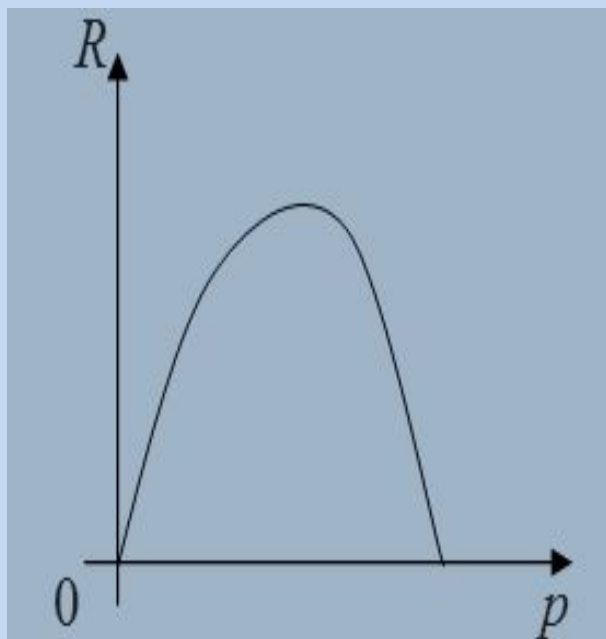
$TC(Q)$ - (total costs) - загальні витрати.

$$TC(Q) = FC + VC(Q)$$



Функція доходу – залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції:

$$R=R(p), \text{ або } R=R(Q)$$



де R (revenue) – дохід, де p - ціна одиниці продукції, Q - кількість проданого товару.

Крива доходу показує в графічному вигляді величину доходу при кожному значенні ціни на товар.

Тоді

$$TR = p \cdot Q \quad - \text{ загальний (валовий) дохід (total revenue)}$$

$$PR = TR - TC \quad - \text{ прибуток (profit)}$$

$$AR = TR / Q \quad - \text{ середній дохід (average)}$$



Множини.

Поняття множини належить до первісних, тому обмежуються його описом і поясненням на прикладах.

Множина це сукупність об'єктів, що об'єднані деякою спільною ознакою.

Позначення : A, B, \dots

Приклад 1

Множина підприємств, множина чисел.

Об'єкти, з яких складається дана множина називають її елементами.

Позначення : a, b, \dots



Множини.

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**.

В протилежному випадку – **нескінченною**

Приклад 2

- множина підприємств – скінченна;
- множина натуральних чисел – нескінченна.

Множину вважають **заданою**, якщо вказано ознаку, за якою можна визначити, належить будь-який елемент цій множині чи ні.



Множини.

Приклад 3

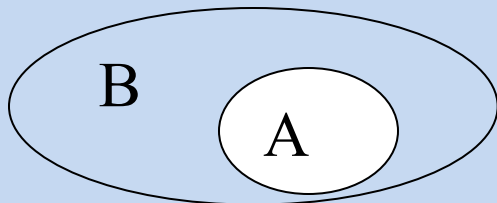
Множина студентів, множина лікарів, ...

Якщо кожний елемент деякої множини A є також елементом множини B , то A називають **підмножиною** множини B .

Позначення : $A \subset B$

Приклад 4

Множина студентів КНТЕУ (A) є підмножиною множини студентів України (B).





Множини. Дійсні числа.

Дві множини A , B вважають рівними якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

Позначення : $A = B$.

Зрозуміло, що якщо $A \subset B$, $B \subset A$ то $A = B$.

Синоніми терміна «множина»: **система, сукупність, клас, область**

Основні числові множини, які використовують мають загальноприйняті позначення:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z} = \{\dots -1, -2, -3, 0, 1, 2, \dots\}$ -множина цілих чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ - множина раціональних чисел;

$\mathbb{R} = \{a, b_1 b_2 b_3 \dots \mid a, b_1 b_2 b_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$ - множина дійсних чисел



Множини. Дійсні числа.

Приклад 5

$\frac{3}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{3}{1}$ -раціональні числа;

$c = 1,234567\dots\dots$, $\pi = 3,14159\dots\dots$ (число пи)

$e = 2,71828\dots\dots$ (число Ейлера) – дійсні числа

Геометрично їм відповідають точки на числовій прямій.

Зрозуміло, що $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Між множиною дійсних чисел та множиною точок на числовій осі існує взаємно-однозначна відповідність.

Тому в подальшому поняття число і точка будуть ототожнюватись і замість слова число будемо казати точка.

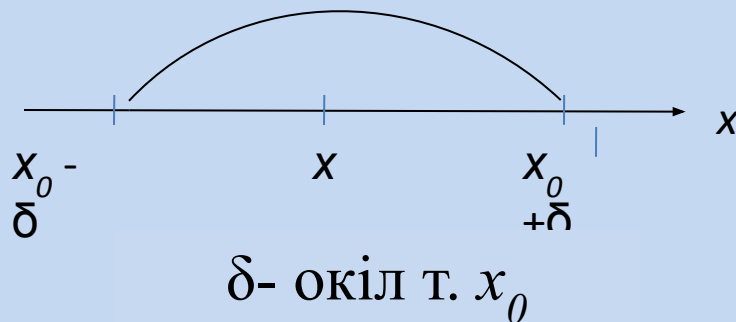


Дійсні числа. Числові проміжки, окіл точки.

В подальшому будемо працювати з такими підмножинами множини дійсних чисел:

1) $[a; b]$ -відрізок, 2) $(a; b)$ -інтервал, 3) $[a; b)$ чи $(a; b]$ -півінтервал, 4) окіл точки (чи числа) x_0 .

Окіл точки x_0 - це довільний інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ що містить точку x_0





. Поняття функції.

Означення 1

Змінну величину y називають функцією змінної величини x , якщо вказано закон, за яким кожному значенню x , взятому з області можливих значень (область визначення), відповідає певне дійсне значення y (з області значень).

Позначення : $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ і т. ін.

$x \in X$ (область визначення) ; $y \in Y$ (область значень);

f , F , φ -правило або закон за яким значенню x відповідає значення y .



. Поняття функції.

Приклад 6

Нехай $y = x^2$;

f – “правило піднесення до квадрату”,

x - може приймати значення 2, 3, 4,,

ім будуть відповідати значення:

y - 4, 9, 16,

В залежності від завдання правила відповідності f ,
розрізняють **три способи завдання функції:**
аналітичний, табличний, графічний.



. Способи завдання функції.

1. Аналітичний:

Функція задається однією або декількома рівностями.

Приклад 7

$$\text{а) } 3x - 2y = 5; \text{ б) } y = x + 4; \text{ в) } y = \begin{cases} 5x + 6, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 6 - x, & x > 1 \end{cases}.$$

2. Табличний:

Значення аргумента	x_1	x_2	...	x_n
Значення функції	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$

3) Графічний:

Функціональна залежність зображується лінією.



Поняття функції.

Приклад 7

Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$, $f(2) = ?$

Розв'язок

Оскільки вираз під коренем парного степеня повинен бути невід'ємний і знаменник дробу відмінний від нуля, то область визначення функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{1+x}{x-1} \geq 0, \\ x-1 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x-1 > 0. \end{cases} \quad , \quad \text{або} \quad \begin{cases} 1+x \leq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

В результаті $x \in (1; \infty)$ і $x \in (-\infty; -1]$,

тобто $D(y) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$, $f(2) = \sqrt{\frac{1+2}{2-1}} = \sqrt{3} \approx 1,7$.



Складна функція.

Якщо $y = f(u)$ є функцією від u , а $u = g(x)$ є в свою чергу функцією від x , то функцію.

$y = f(g(x))$ називають складною або функцією від функції.

Приклад 9

а) $y = \sin^2 x$ – складна функція де

$f(u)$ - “піднесення до квадрату функції $\sin x$ ”;

$u = g(x) = \sin x$ - проміжна функція;

б) $y = a^{\sin x}$, ($a > 0$, $a \neq 1$)

$f(u)$ – показникова функція,

$u = g(x) = \sin(x)$ – проміжна функція.

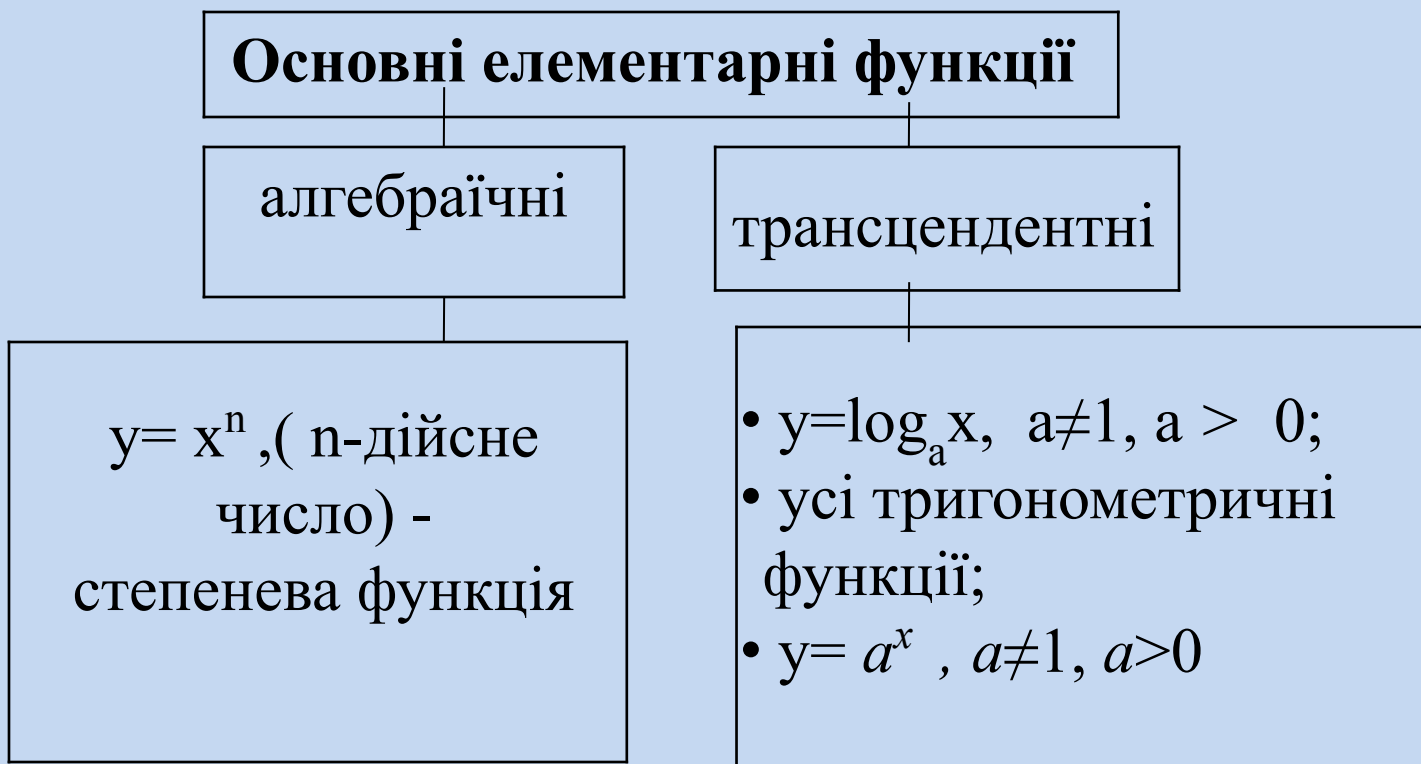
в) $y = \operatorname{arctg}(\lg(x+2))$

$y = \operatorname{arctg}(u)$, де $u = \lg(v)$, де $v = x+2$.



Елементарні функції

Елементарною функцією називають функцію, яка отримана з основних елементарних за допомогою скінченної кількості арифметичних дій і скінченної кількості операцій функції від функції





Елементарні функції

Приклад 8

Елементарні функції:

Алгебраїчні функції:

1) $y = x^5 - \frac{5}{x} + 25$ -раціональна функція;

2) $y = \sqrt{5/x} + 4x - 12$ - ірраціональна функція;

3) $y = x^2 + \frac{5x}{6} - 15$ -ціла раціональна функція;

4) $y = \sin^3 2x + \operatorname{arctg}x + 7$ - трансцендентна функція;

Неелементарні функції:

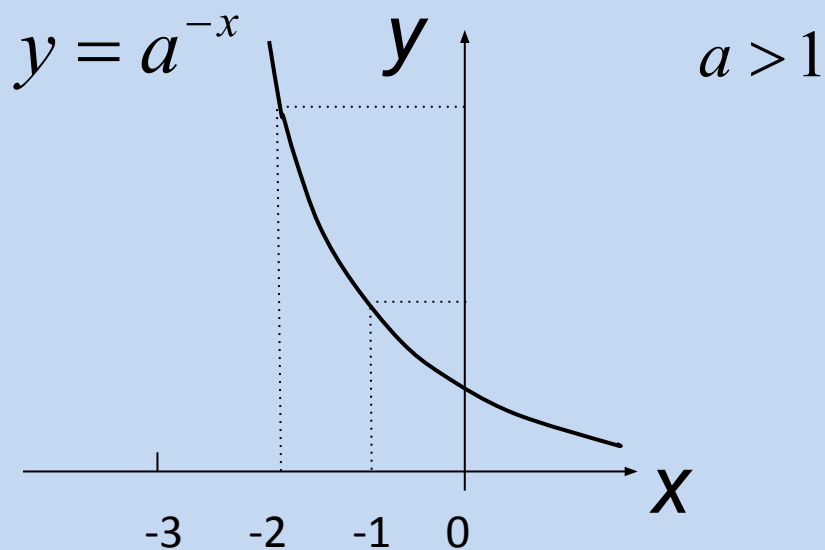
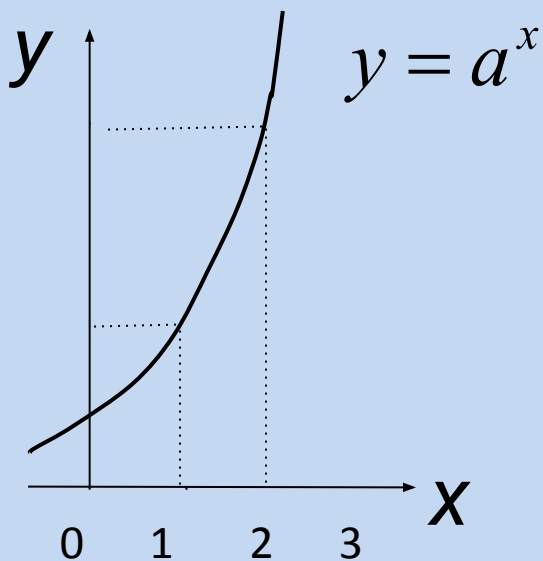
5) $x + x^2 + \dots + x^n + \dots$; 6) $\int x dx$.



Основні елементарні функції та їх графіки

При побудові графіків елементарних функцій необхідно засвоїти методи, що спрощують цей процес. Якщо відомий графік $y = f(x)$ то для побудови :

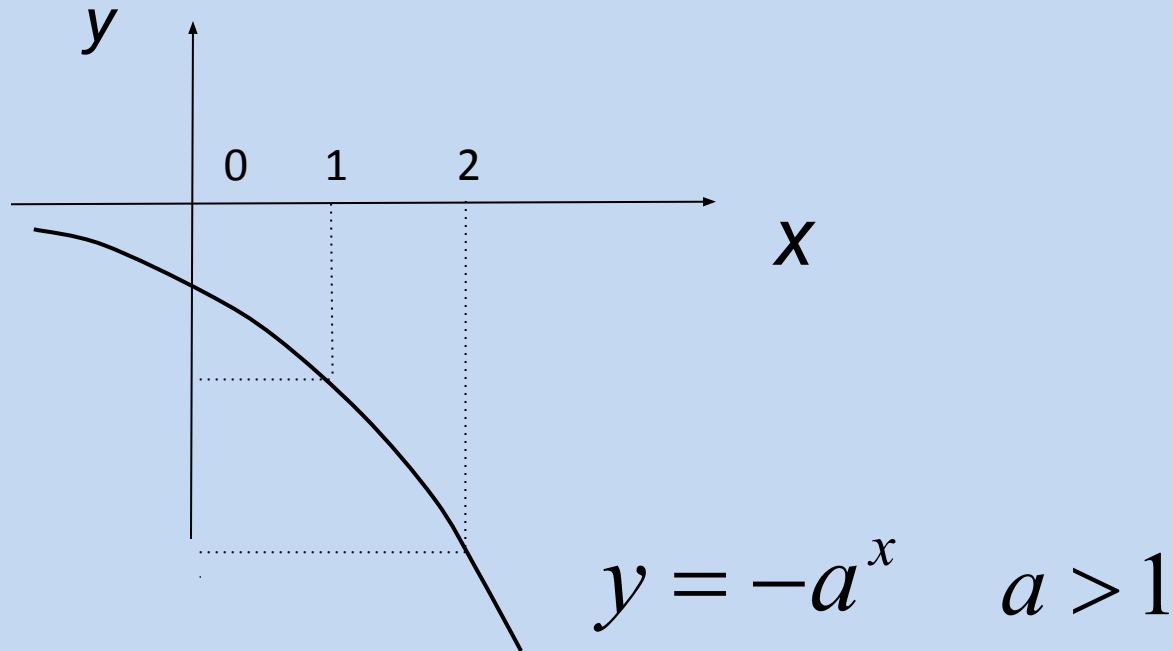
а) $y = f(-x)$ необхідно побудувати лінію, симетричну лінії $y = f(x)$ відносно вісі OY .





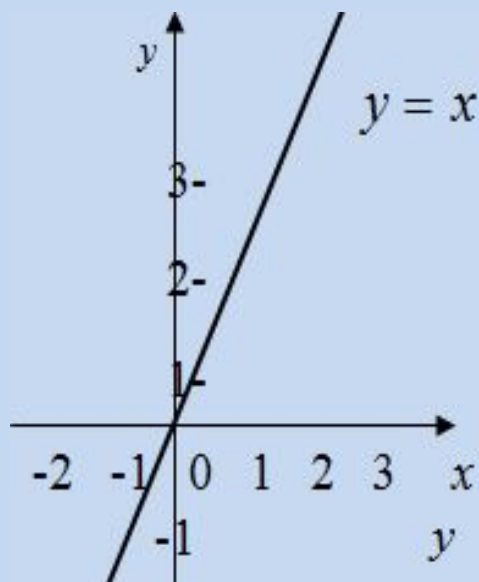
Основні елементарні функції та їх графіки

б) $y = -f(x)$ необхідно побудувати лінію,
симетричну лінії $y = f(x)$ відносно вісі OX

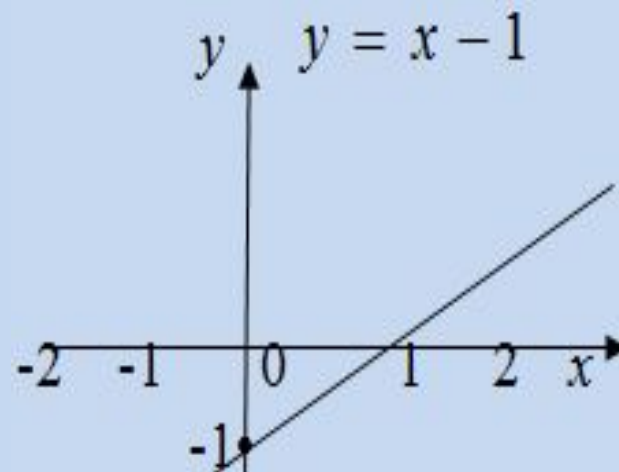
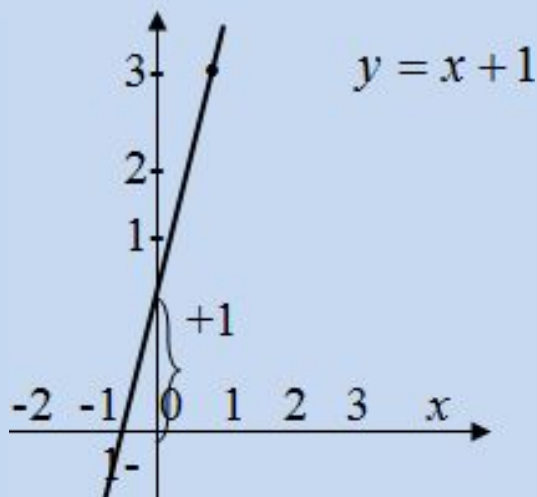




Основні елементарні функції та їх графіки



в) $y = f(x) + b$ отримуємо з графіка $y = f(x)$ переносом лінії на b одиниць вгору, якщо $b > 0$ і вниз, якщо $b < 0$.



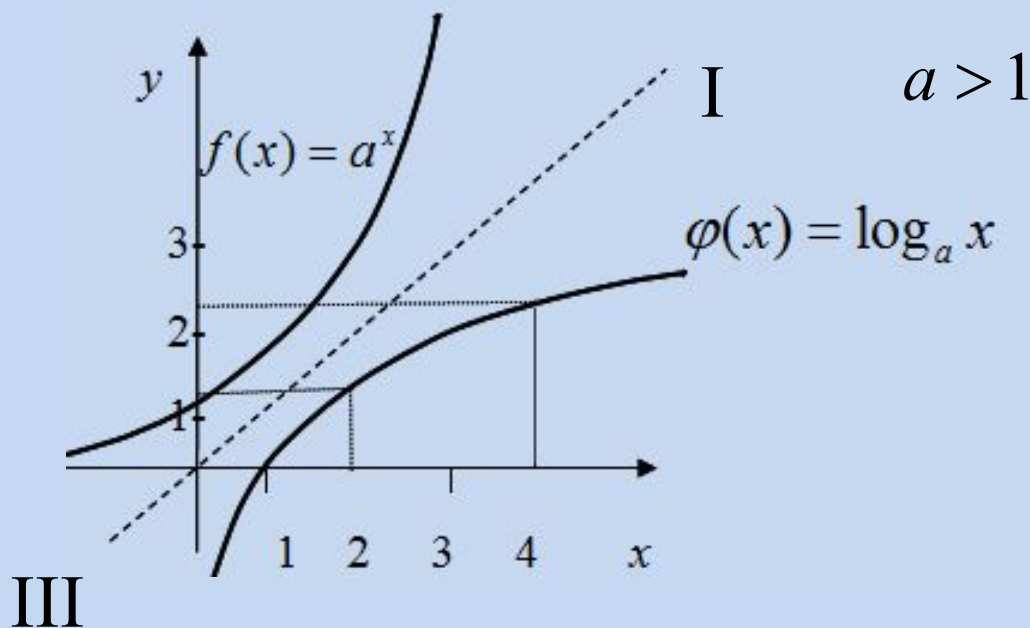


Основні елементарні функції та їх графіки

г) Графік оберненої функції $y = \varphi(x)$

симетричний до графіка $y = f(x)$

відносно бісектриси I-го III-го координатних кутів





Основні елементарні функції та їх графіки

д) Графік функції $y = k f(x)$ отримують з графіка $y = f(x)$ множенням усіх його ординат на k при збереженні значень відповідних абсцис.

Приклад 9

