

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 2

1. ПРОСТРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

R^n



1. ПРОСТРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ R^n .

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств R^n .



1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств R^n . Пусть

$$A_1, \dots, A_m \subset R^n \quad \text{и} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R^1.$$

Определение 15. *Множество*

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i = \left\{ a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid a_i \in A_i, i = 1, \dots, m \right\}$$

будем называть алгебраической линейной комбинацией множеств A_1, \dots, A_m

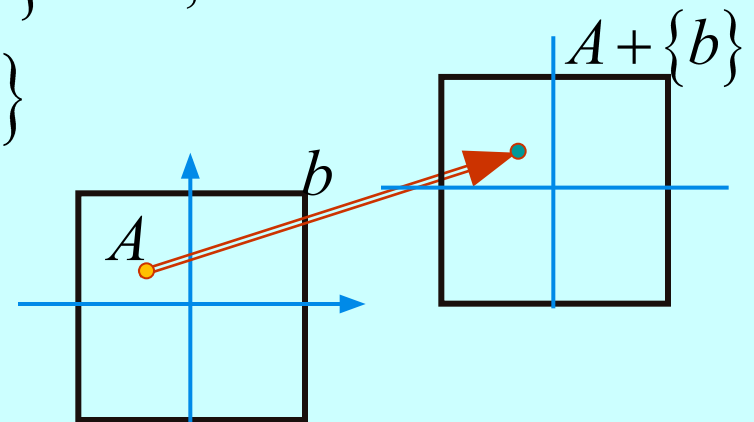
с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R^1$.

В частности, если $A \subset R^n$, $B = \{b\} \subset R^n$, то множество

$$A + B = \{u = a + b \mid a \in A\}$$

называется сдвигом множества A

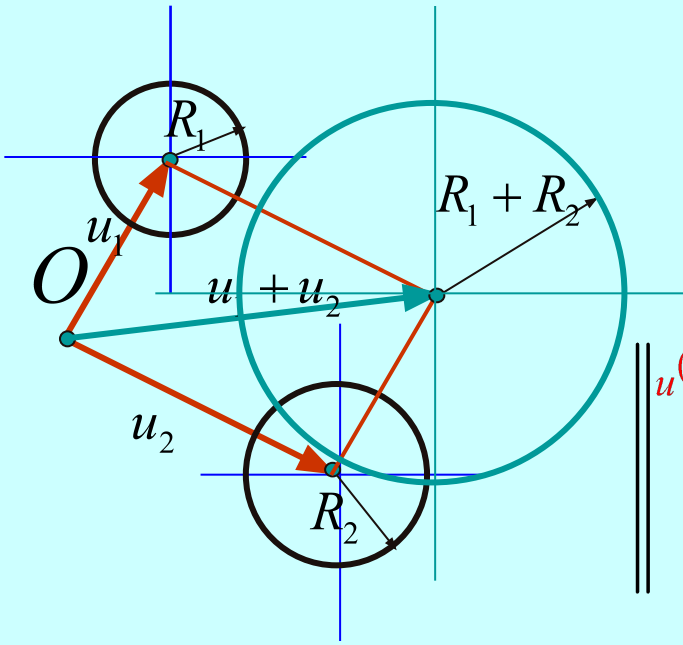
на вектор b .



Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) = \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2). \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $u \in \bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2)$. Тогда



$$\begin{matrix} \in \bar{O}(u_1, R_1) & \in \bar{O}(u_2, R_2) \\ u = u^{(1)} & + u^{(2)}, \end{matrix}$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)},$$

$$\|u_1 - u^{(1)}\| \leq R_1, \|u_2 - u^{(2)}\| \leq R_2 \Rightarrow$$

$$\|u - (u_1 + u_2)\| = \|u^{(1)} + u^{(2)} - (u_1 + u_2)\| =$$

$$= \|(u^{(1)} - u_1) + (u^{(2)} - u_2)\| \leq \|u^{(1)} - u_1\| + \|u^{(2)} - u_2\| \leq R_1 + R_2 \Rightarrow$$

$$u \in \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2).$$

Доказано, что

$$\bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) \subset \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2).$$

Докажем обратное вложение. Пусть $u \in \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2)$. Тогда

$$0 \leq \|u - (u_1 + u_2)\| = \lambda \leq R_1 + R_2.$$

Если $\lambda = 0$, то

$$u - (u_1 + u_2) = 0 \Rightarrow u = \begin{matrix} \in \bar{O}(u_1, R_1) \\ u_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \in \bar{O}(u_2, R_2) \\ u_2 \end{matrix} \in \bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2).$$

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда возможно представление

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (\leq R_1 + R_2), \quad 0 < \lambda_i \leq R_i, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$u^{(1)} = u_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}(u - u_1 - u_2), \quad u^{(2)} = u_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda}(u - u_1 - u_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^{(1)} + u^{(2)} &= \left[u_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}(u - u_1 - u_2) \right] + \left[u_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda}(u - u_1 - u_2) \right] = \\ &= u_1 + u_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda}(u - u_1 - u_2) = u_1 + u_2 + u - u_1 - u_2 = u \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

Заметим, что

$$u^{(i)} = u_i + \frac{\lambda_i}{\lambda} (u - u_1 - u_2) \Rightarrow$$

$$\|u^{(i)} - u_i\| = \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \|u - u_1 - u_2\| = \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda = \lambda_i \leq R_i, i = 1, 2.$$

$$\|u^{(i)} - u_i\| \leq R_i \Rightarrow u^{(i)} \in \bar{O}(u_i, R_i), i = 1, 2$$

Таким образом,

$$u = \overset{\in \bar{O}(u_1, R_1)}{u^{(1)}} + \overset{\in \bar{O}(u_2, R_2)}{u^{(2)}} \in \bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) \Rightarrow$$

$$\bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2) \subset \bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2),$$

и равенство (1) $\bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) = \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2)$. (1) доказано.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$k \cdot \bar{O}(0, R) = \bar{O}(0, |k|R).$$

Доказательство. При $k = 0$ справедливость доказываемого равенства очевидна.

Пусть $k \neq 0$ и $u \in k \cdot \bar{O}(0, R)$. Тогда

$$u = ku^{(0)}, \quad u^{(0)} \in \bar{O}(0, R) \Rightarrow \left\| \overset{ku^{(0)}}{u} \right\| = \|ku^{(0)}\| = |k| \|u^{(0)}\| \leq |k| R \Rightarrow$$

$$u \in \bar{O}(0, |k|R) \Rightarrow k \cdot \bar{O}(0, R) \subset \bar{O}(0, |k|R).$$

Обратно, если $u \in \bar{O}(0, |k|R) \Rightarrow \|u\| \leq |k|R$, то полагаем $v = \frac{1}{k}u \Rightarrow$

$$\left\| \overset{\frac{1}{k}u}{v} \right\| = \left\| \frac{1}{k}u \right\| = \frac{1}{|k|} \|u\| \leq \frac{|k|R}{|k|} = R \Rightarrow v \in \bar{O}(0, R) \Rightarrow u = k v \Rightarrow$$

$$u \in k \cdot \bar{O}(0, R) \Rightarrow \bar{O}(0, |k|R) \subset k \cdot \bar{O}(0, R). \quad \text{Теорема доказана.}$$

Из теорем 1,2 следует, что любой шар $\bar{O}(u_0, R)$ можно представить в виде

$$\bar{O}(u_0, R) = \bar{O}(u_0, 0) + \bar{O}(0, R) = \{u_0\} + \bar{O}(0, R).$$

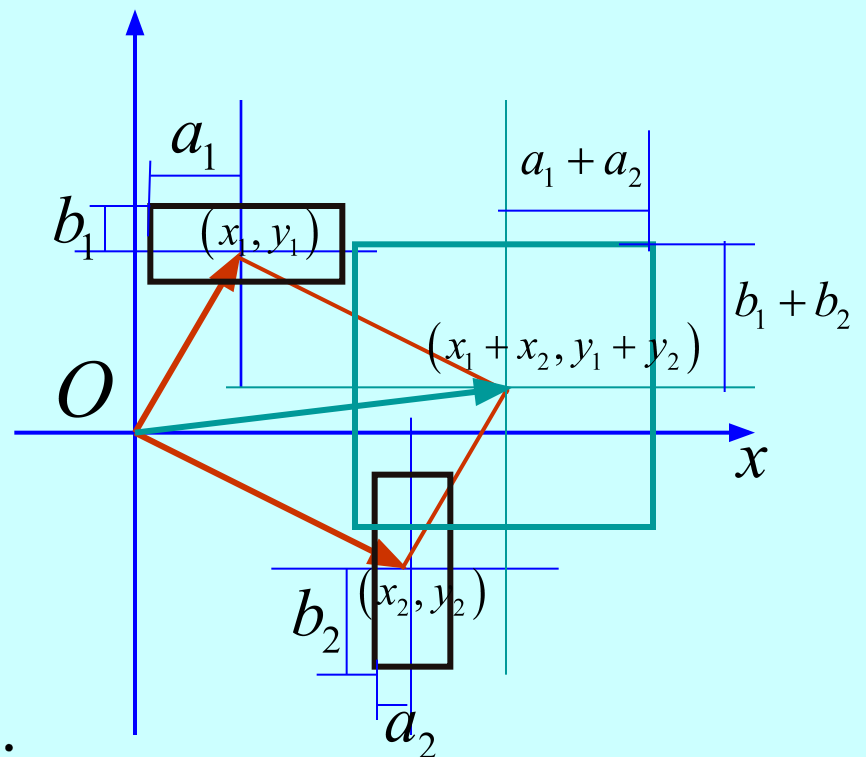
Упражнение 1. Пусть

$$P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid |x - x_1| \leq a_1, |y - y_1| \leq b_1 \right\}$$

$$P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid |x - x_2| \leq a_2, |y - y_2| \leq b_2 \right\}$$

Доказать, что

$$\begin{aligned} & P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + \\ & + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) = \\ & = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid |x - (x_1 + x_2)| \leq a_1 + a_2, \right. \\ & \left. |y - (y_1 + y_2)| \leq b_1 + b_2 \right\} = \\ & = P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2). \end{aligned}$$



Решение.

Докажем вложение

$$P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) \subset P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Пусть $u \in P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2)$. Тогда

$$u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_u &= x^{(1)} + x^{(2)}, \\ y_u &= y^{(1)} + y^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} \in P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid |x - x_1| \leq a_1, |y - y_1| \leq b_1 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \in P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid |x - x_2| \leq a_2, |y - y_2| \leq b_2 \right\}$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |x_u - (x_1 + x_2)| &= |x^{(1)} + x^{(2)} - x_1 - x_2| = |x^{(1)} - x_1 + x^{(2)} - x_2| \leq \\ &\leq |x^{(1)} - x_1| + |x^{(2)} - x_2| \leq a_1 + a_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left| x_u - (x_1 + x_2) \right| \leq a_1 + a_2.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\left| y_u - (y_1 + y_2) \right| \leq b_1 + b_2.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \left| \left| x - (x_1 + x_2) \right| \leq a_1 + a_2, \left| y - (y_1 + y_2) \right| \leq b_1 + b_2 \right. \right\}$$

и вложение

$$P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) \subset P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

доказано. Установим обратное вложение.

$$P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2) \subset P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2).$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \left| \left| x - (x_1 + x_2) \right| \leq a_1 + a_2, \left| y - (y_1 + y_2) \right| \leq b_1 + b_2 \right. \right\}.$$

Тогда $0 \leq \lambda_x = |x_u - (x_1 + x_2)|$. Пусть $\lambda_x > 0$. Сделаем представление

$$\lambda_x = \lambda_{1x} + \lambda_{2x}, \quad 0 < \lambda_{xi} \leq a_i, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим

$$x^{(1)} = x_1 + \frac{\lambda_{1x}}{\lambda_x} (x_u - x_1 - x_2), \quad x^{(2)} = x_2 + \frac{\lambda_{2x}}{\lambda_x} (x_u - x_1 - x_2).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} x^{(1)} + x^{(2)} &= x_1 + \frac{\lambda_{1x}}{\lambda_x} (x_u - x_1 - x_2) + x_2 + \frac{\lambda_{2x}}{\lambda_x} (x_u - x_1 - x_2) = \\ &= x_1 + x_2 + (x_u - x_1 - x_2) = x_u, \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\left| x^{(i)} - x_i \right| = \left| x_i + \frac{\lambda_{ix} \overset{|x_u - x_1 - x_2| = \lambda_x}{(x_u - x_1 - x_2)}}{\lambda_x} - x_i \right| = \frac{\lambda_{ix}}{\lambda_x} \cdot \lambda_x = \lambda_{ix} \leq a_i, \quad i = 1, 2,$$

Таким образом,

$$x_u = x^{(1)} + x^{(2)}, \quad \left| x^{(1)} - x_1 \right| \leq a_1, \quad \left| x^{(2)} - x_2 \right| \leq a_2 \quad (2).$$

Если $0 = \lambda_x = |x_u - (x_1 + x_2)|$, то $x_u = x_1 + x_2$ и равенство (2)

$$x_u = x^{(1)} + x^{(2)}, \quad \left| \overset{\times}{x_1} x^{(1)} - x_1 \right| \leq a_1, \quad \left| \overset{\times}{x_2} x^{(2)} - x_2 \right| \leq a_2 \quad (2) \text{ снова имеет место.}$$

Аналогично, устанавливаем, что

$$y_u = \overset{\times}{y_1} y^{(1)} + \overset{\times}{y_2} y^{(2)} \quad (3).$$

Из (2) и (3) следует

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \overset{\times}{P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1)} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} + \overset{\times}{P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2)} \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \in P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2).$$

Вложение $P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2) \subset P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2)$.

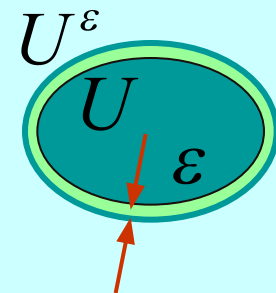
доказано, а значит и равенство

$$P^{(1)}(x_1, y_1, a_1, b_1) + P^{(2)}(x_2, y_2, a_2, b_2) = P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Определение 16. *Множество*

$$U^\varepsilon = \left\{ v \in R^n \mid \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon, \right\}.$$

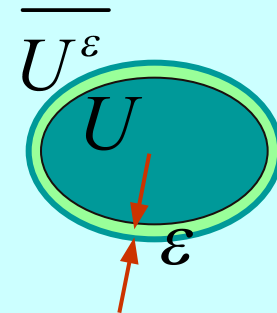
называется открытой ε — окрестностью множества U .



Множество

$$\overline{U^\varepsilon} = \left\{ v \in R^n \mid \|v - u\| \leq \varepsilon, u \in U \right\}$$

называется замкнутой ε — окрестностью множества U .



Упражнение 2. Доказать равенство

$$U^\varepsilon = U + O(0, \varepsilon),$$

где
$$U^\varepsilon = \left\{ v \in R^n \mid \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon, \right\}.$$

Решение.

Пусть $v \in U^\varepsilon \Rightarrow \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon$. Полагаем $w = v - u \Rightarrow$

$$\|w\| = \|v - u\| < \varepsilon \Rightarrow w \in O(0, \varepsilon) \quad v = \overset{\in O(0, \varepsilon)}{w} + \overset{\in U}{u} \in O(0, \varepsilon) + U \Rightarrow$$

$$U^\varepsilon \subset U + O(0, \varepsilon).$$

Обратно, пусть $v \in U + O(0, \varepsilon) \Rightarrow v = u + \overset{\in U}{w} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w = v - u \Rightarrow \|v - u\| = \|w\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\exists u \in U : v = u + w, \|w\| \leq \varepsilon \Rightarrow U + O(0, \varepsilon) \subset U^\varepsilon.$$

Упражнение 3. Пусть

$$\overline{K(O, a)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq a \right\},$$

$$\overline{O(O, r)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq r \right\}$$

Построить множество

$$\overline{K(O, a) + O(O, r)}.$$

Решение.

