Лекция 12

§2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Прямая **–** это алгебраическая линия первого порядка. Что касается алгебраических линий второго порядка, то к ним относятся окружность, эллипс, парабола и гипербола (не считая случаи их вырождения).

Общий вид уравнения линий второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$\{A,B,C,D,E,F\} \subset R,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B,C отличен от нуля.

Окружность

Определение. Окружность – множество точек M плоскости, равноотстоящих от данной точки M_0, называемой центром; $d(M_0,M)$ называется радиусом окружности. Составим уравнение окружности, если даны $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$, отрезок $|M_0M|=R$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Если $M_0\,(0,0)$ то имеем каноническое уравнение окружности.

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Раскрывая скобки, приведем уравнение к виду:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + \left(x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - R^2\right) = 0$$

Таким образом, признаки, по которым из общего уравнения линии второго порядка можно получить уравнение окружности, это $A = C$ и $B = 0$.

Эллипс

Определение. Эллипс – это множество точек плоскости, которое в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a \in R, b \in R.$$

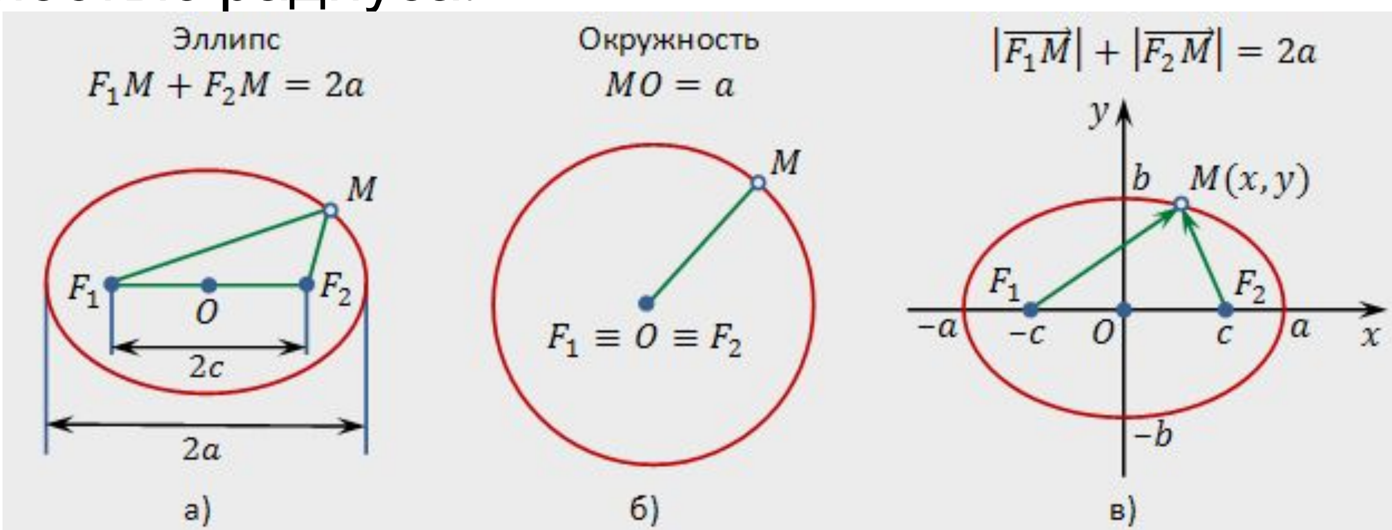
Это каноническое уравнение эллипса. Его форму можно установить математическими преобразованиями.

Основное геометрическое свойство эллипса заключается в том, что сумма расстояний от данной точки M до двух точек плоскости F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Расстояние между фокусами называется фокусным расстоянием $2c=F_1F_2$, середина отрезка O — центром эллипса, число $2a$ — длиной большой оси эллипса (соответственно, число a — большой полуосью эллипса). Отрезки F_1 и F_2, соединяющие произвольную точку эллипса M с его фокусами, называются фокальными радиусами точки M. Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется хордой эллипса.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Отношение $e=c/a$ называется эксцентриситетом эллипса. Из определения ($2a>2c$) следует, что $0\le e<1$. При , т.е. при $e=0$, фокусы F_1 и F_2, а также центр O совпадают, и эллипс является окружностью радиуса.



Составим уравнение эллипса, пользуясь его геометрическим определением, выражающим фокальное свойство. В выбранной системе координат определяем координаты фокусов $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Для произвольной точки $M(x,y)$, принадлежащей эллипсу, имеем:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a.$$

Записывая это равенство в координатнои форме, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Переносим второй радикал в правую часть, возводим обе части уравнения в квадрат и приводим подобные члены:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Разделив на 4, возводим обе части уравнения в квадрат:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \;\Leftrightarrow\; (a^2-c^2)^2x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Обозначив $b^2=a^2-c^2$ получим $b^2x^2+a^2y^2 =a^2b^2$ Разделив обе части равенства на a^2b^2 окончательно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола

Определение гиперболы аналогично определению эллипса, ее каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$$

Построить гиперболу, заданную уравнением $5x^2-4y^2=20$

Сначала необходимо в правой части уравнения получить «единицу», поэтому обе части исходного уравнения делим на 20:

$$\frac{5x^2-4y^2}{20}=\frac{20}{20}$$

$$\frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{20}{5}}-\frac{y^2}{\frac{20}{4}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$$

Определение гиперболы. Фокусы и эксцентриситет

У гиперболы, точно так же, как и у **эллипса**, есть две особенные точки F_1, F_2, которые называются **фокусами**.

Гиперболой называют множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 – есть величина постоянная, численно равная расстоянию между вершинами этой гиперболы: $2a$.

При этом расстояние между фокусами превосходит длину действительной оси: $|F_2F_1|>2a$.

Если гипербола задана каноническим уравнением , то <u>расстояние от центра симметрии до каждого из фокусов</u> рассчитывается по формуле:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

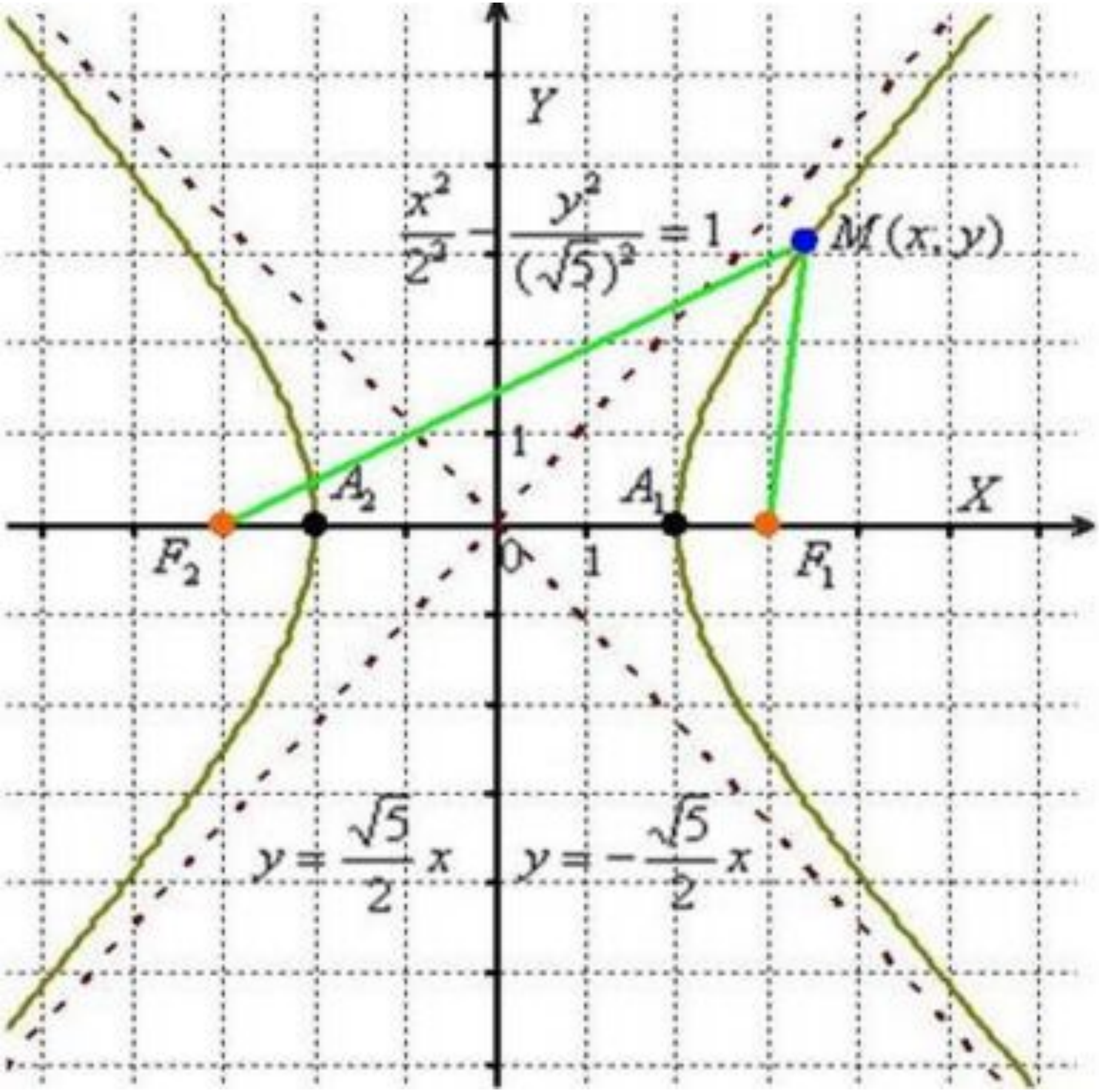
И, соответственно, фокусы имеют координаты $F_1(c,0),F_2(-c,0)$.

Для исследуемой гиперболы $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ $c=\sqrt{2^2+\sqrt{5^2}}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$

$F_1(3,0),F_2(-3,0)$

Обозначим через $|F_1M|$, $|F_2M|$ расстояния от фокусов до произвольной точки гиперболы $M(x,y)$:

Сначала мысленно передвигайте синюю точку по правой ветви гиперболы – где бы мы ни находились, **модуль** (абсолютное значение) разности между длинами отрезков $|F_1M|$, $|F_2M|$ будет одним и тем же: $||F_1M| - |F_2M||=2a=const$



Y
$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$
$M(x, y)$
1
A_2
A_1
X
F_2
0
1
F_1
$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$
$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$

Как построить гиперболу?

1) Прежде всего, находим **асимптоты**. Если гипербола задана каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то её асимптотами являются **прямые** $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$. В нашем случае: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$. **Данный пункт обязателен!** Это принципиальная особенность чертежа, и будет грубой ошибкой, если ветви гиперболы «вылезут» за свои асимптоты.

Определение. Асимптота данной кривой – это прямая, расстояние до которой от произвольной точки кривой стремится к нулю, когда указанная точка кривой стремится к бесконечности

2) Теперь находим **две вершины гиперболы**, которые расположены на оси абсцисс в точках $A_1(a;\,0)$, $A_2(-a;\,0)$. Выводится элементарно: если $y=0$, то каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ превращается в $\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда и следует, что $x^2=a^2 \Rightarrow x=a,\ x=-a$. Рассматриваемая гипербола имеет вершины $A_1(2;\,0)$, $A_2(-2;\,0)$

3) Ищем дополнительные точки. Обычно хватает 2-3-х. В каноническом положении гипербола симметрична относительно начала координат и обеих координатных осей.

$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ на черновике выражаем:

$$\frac{y^2}{5} = \frac{x^2}{4} - 1$$

$$y^2 = \frac{5}{4}(x^2 - 4)$$

Уравнение распадается на две функции:

$y = \frac{1}{2}\sqrt{5(x^2 - 4)}$ – определяет верхние дуги гиперболы (то, что нам надо);

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{5(x^2 - 4)}$ – определяет нижние дуги гиперболы.

Напрашивается нахождение точек с абсциссами $x = 3, x = 4$:

$$C_1 : x = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{5(3^2 - 4)} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5;$$

$$C_2 : x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{5(4^2 - 4)} = \frac{\sqrt{60}}{2} \approx 3{,}87.$$

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

Так как расстояние от центра до фокуса больше расстояния от центра до вершины: , то эксцентриситет гиперболы всегда больше «единицы».

Парабола и её каноническое уравнение

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, где p– действительное число. Эта кривая лежит на боку.

Причем у неё 2 ветви. $y=\sqrt{2px}$*, которая описывает верхнюю кривую,*

а $y=-\sqrt{2px}$ *– нижнюю*

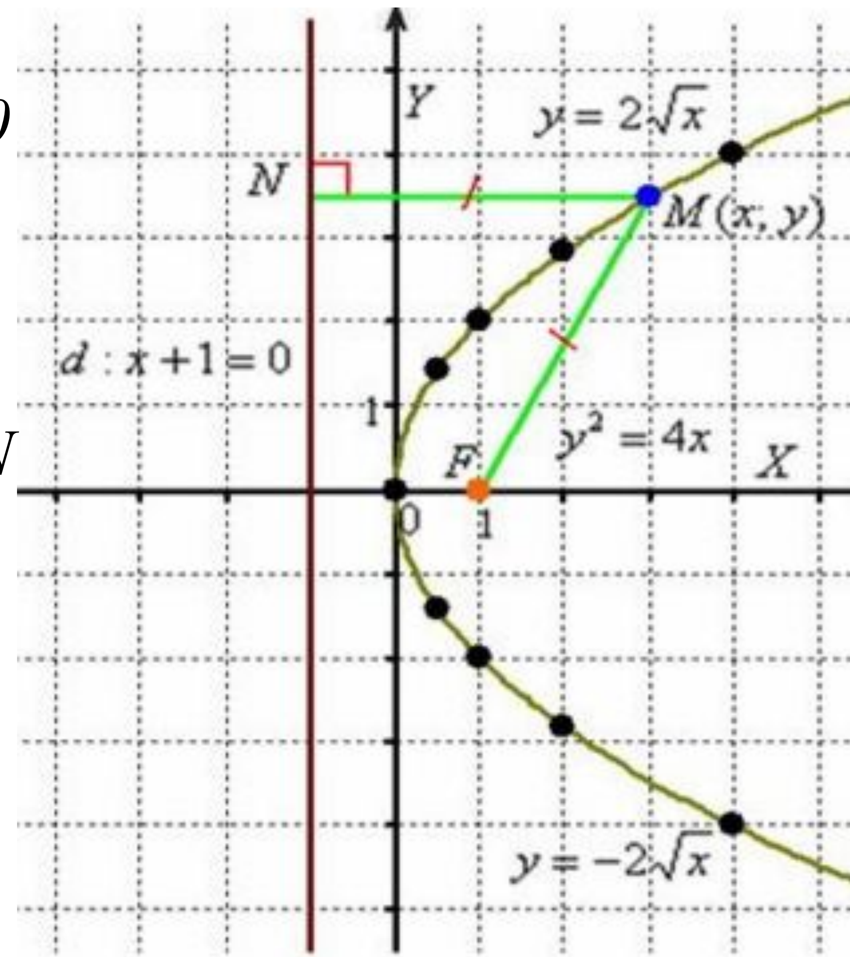
А вершина проходит через начало координат.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки *F* и данной прямой *d*, не проходящей через точку .

Точка F называется **фокусом** параболы, прямая d – **директрисой** параболы. Константа «p» канонического уравнения называется **фокальным параметром**, который равен расстоянию от фокуса до директрисы. В данном случае $p=2$. При этом фокус имеет координаты $F(p/2,0)$, а директриса задаётся уравнением $x+p/2=0$

В нашем примере $F(1,0)$ d: $x+1=0$

Для любой точки параболы $M(x,y)$ длина отрезка MF (расстояние от фокуса до точки) равна длине перпендикуляра MN (расстоянию от точки до директрисы): |FM|=|MN|



- Очевидно, что при увеличении фокального параметра ветви графика будут «раздаваться» вверх и вниз, бесконечно близко приближаясь к оси . При уменьшении же значения «р» они начнут сжиматься и вытягиваться вдоль оси
- Эксцентриситет любой параболы равен единице: