

*

Предел последовательности



Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13;

В порядке
возрастания
положительные
нечетные
числа

10; 19; 37; 73;
145; ...

В порядке убывания
правильные дроби
с числителем,
равным 1

6; 8; 16; 18; 36;
...

В порядке возрастания
положительные числа,
кратные 5

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$;

Увеличение
на 3

Чередовать увеличение
на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; ...

5; 10; 15; 20; 25; ...

Увеличение в 2 раза
и уменьшение на 1

Что такое числовая последовательность?

- Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят, что задана числовая последовательность.

Числовая последовательность – это **функция**, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции – совокупность чисел x_n , $n \in N$, называют множеством значений последовательности.

Способы задания последовательности

Словесн
ый

Аналитическ
ий

Рекуррентн
ый

Рекуррентный (от лат. слова
resurgens – «возвращающийся»)

Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

- *Пример 1. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,*
- *Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...*
- *Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...*

Аналитический способ.

- *с помощью формулы.*

- *Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$;*

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

- *Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;*

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$$

- *Пример 3. Последовательность $y = 2n$;*

$$2, 22, 23, 24, \dots, 2n, \dots$$

Рекуррентный способ.

- *Указывается правило, позволяющее вычислить n -й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.*
- *Пример 1. $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, где a и d – заданные числа. Пусть $a_1 = 5$, $d = 0,7$, тогда последовательность будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5;*
- *Пример 2. $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$, где b и q – заданные числа. Пусть $b_1 = 23$, $q = 1/2$, тогда последовательность будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875;*

Предел числовой последовательности

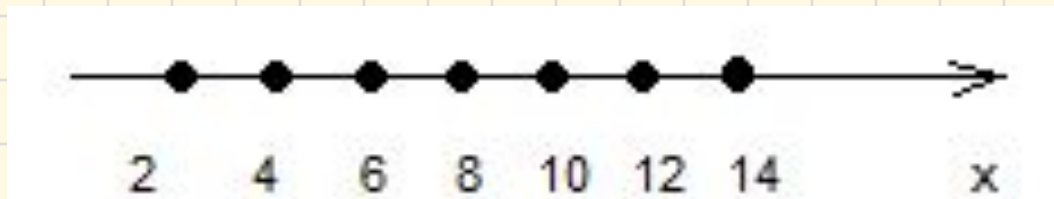
Рассмотрим две числовые последовательности:

$$(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots;$$

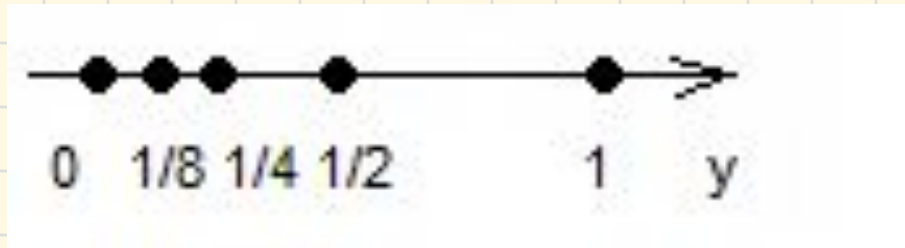
$$(y_n) : 1, \quad , \quad , \quad , \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



x_n



y_n

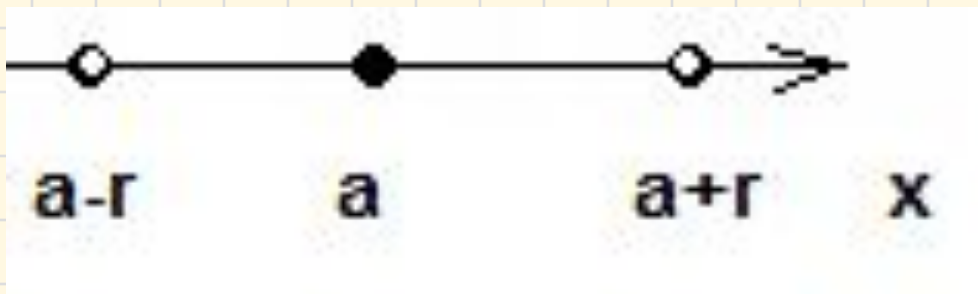
Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее...

Определение 1.

Пусть a - точка прямой, а r положительное число. Интервал $(a-r, a+r)$ называют **окрестностью** точки a , а число r **радиусом окрестности**.

Геометрически это выглядит так:



Например

$(-0.1, 0.5)$ – окрестность точки 0.2 , радиус окрестности равен 0.3 .

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали *«пределом последовательности»*.



Число b называется *пределом последовательности* $\{y_n\}$ если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \rightarrow b$

Читают: y_n стремится к b .

Либо пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b .

*Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**; в противном случае – **расходящейся**.*



Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ – гармонический ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится

Свойства пределов

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc$$

3. предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n) = kb$$

Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

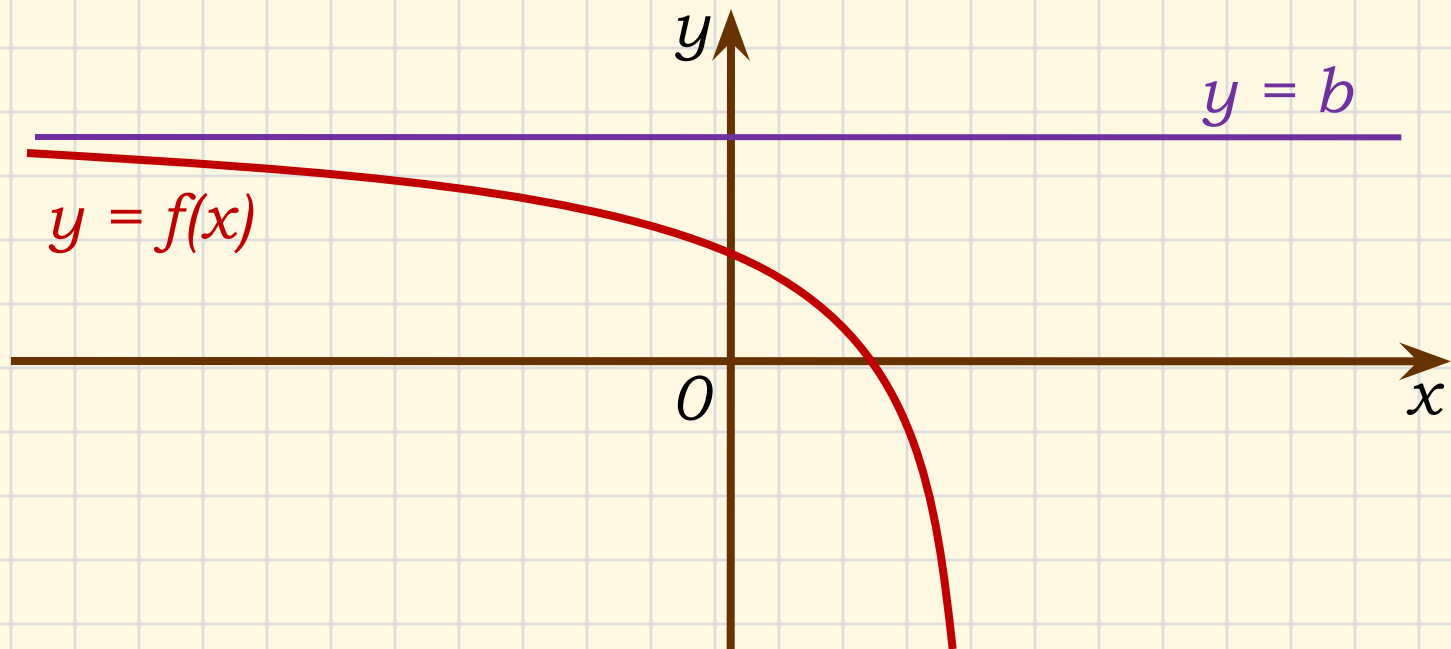
$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 \end{aligned}$$

Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$$

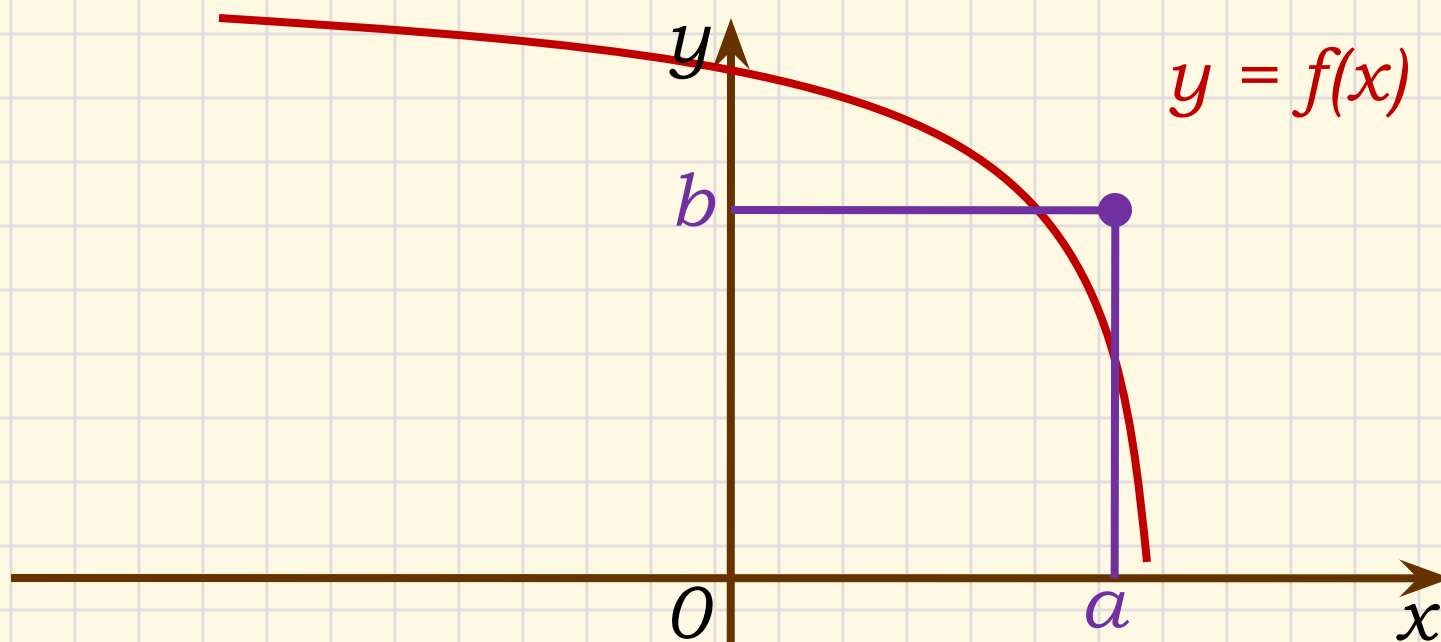
Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{N}$



Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow a$, если для каждого положительного числа ε , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \\ = \frac{-3 - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

Понятие непрерывности функции

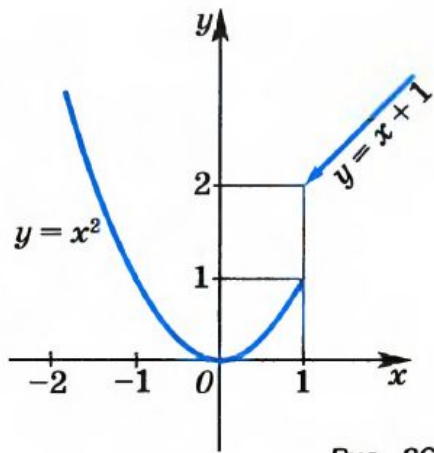


Рис. 36

На рисунке изображен график функции, состоящий из двух «кусков». Каждый из них может быть нарисован без отрыва от бумаги. Однако эти «куски» не соединены непрерывно в точке $x = 1$.

*Поэтому все значения x , кроме $x = 1$, называют **точками непрерывности функции** $y = f(x)$, а точку $x = 1$ – **точкой разрыва** этой функции.*

Вычислить:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - x + x^3}{2 + 2x - x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 7}{6x^2 - x + 5}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$