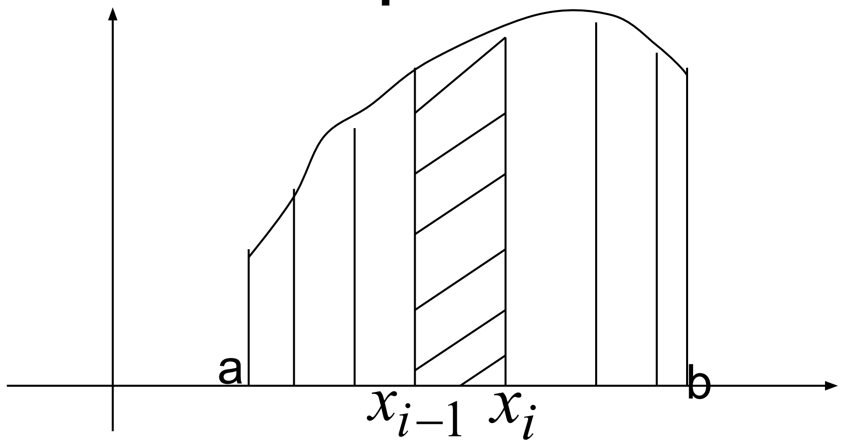
# Проект на тему: приложение определенного интеграла в геометрии

Подготовили ученики 12 «А» класса:
Война Анатолий,
Досан Филипп,
Козловский Андрей,
Хобенко Мария

# Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ох. Такую фигуру называют криволинейной трапецией



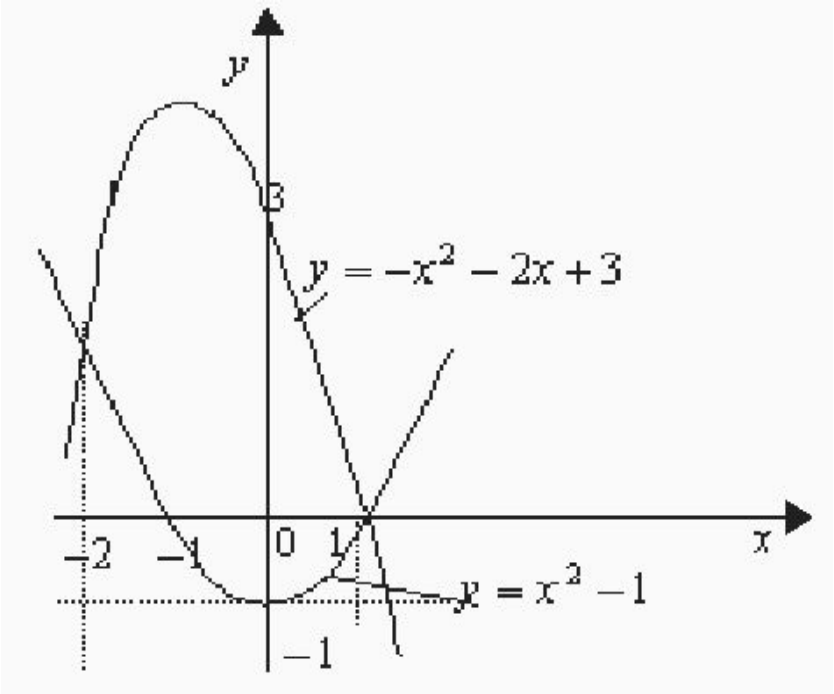
# Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a,b]$ на $n$ частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$.

При этом криволинейная трапеция разобьется на $n$ элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, .., n$ и высотой $h = f\left(\overline{x_i}\right)$, где $\overline{x_i}$ -произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

# Примеры

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и $y = x^2 - 1$



# Продолжение

Получим

$$S=\int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx=$$

$$=-2\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx=-2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=-2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)\right]=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6\right)=$$

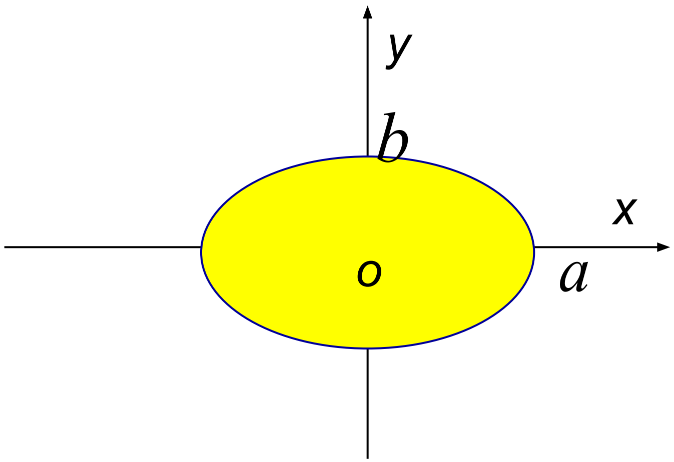
$$=-2\left(3-8+\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{9}{2}\right)=9$$

# Примеры

Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Параметрические уравнения эллипса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$




$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}4ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)_0^{\pi/2} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

# Вычисление объема тела вращения

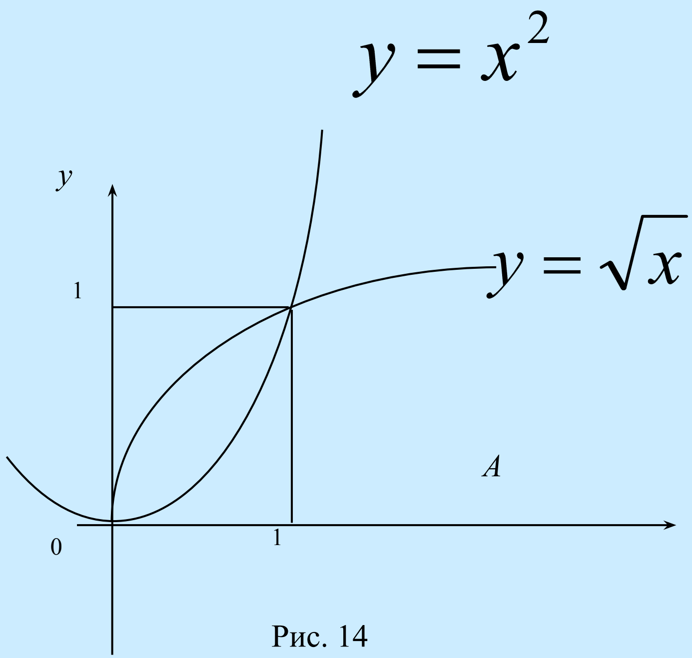



Рис. 14

Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

# Решение

Тогда

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$