Лекция 6,7,8

Геометрические характеристики плоских фигур – это площадь, ее статические моменты и моменты инерции: осевые, полярный, центробежный.

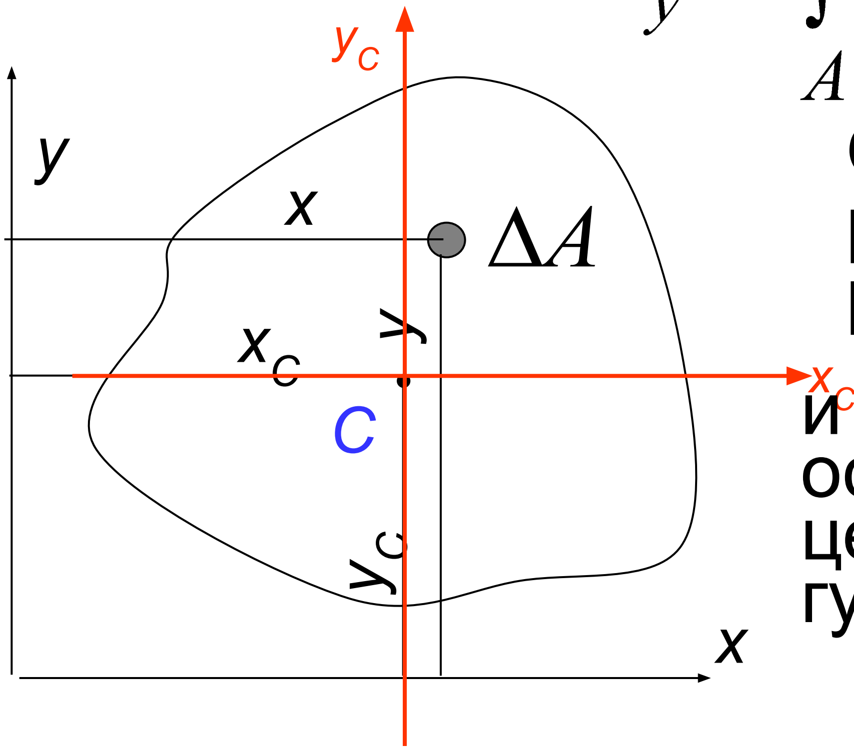
Геометрические характеристики плоских фигур.

Параметры, определяемые по формулам

$$x_C A = \int_A x dA; \qquad y_C A = \int_A y dA$$

называются **статическими моментами** площади плоской фигуры относительно осей

$$S_y = \int_A x \cdot dA; \qquad S_x = \int_A y \cdot dA$$



Они используются для определения положения центра тяжести плоской фигуры

и равны **нулю** относительно осей, проведенных через центр тяжести плоской фигуры (**центральных осей**).

По теореме о моменте равнодействующей имеем

$$S_x = y_C A \qquad S_y = x_C A$$

где x_C, y_C - координаты центра тяжести фигуры; A - площадь всей фигуры.

$$y_C = \frac{S_x}{A} \qquad x_C = \frac{S_y}{A}$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

Кроме площади и статических моментов к геометрическим характеристикам плоских фигур относятся **моменты инерции**: осевые, полярный, центробежный.

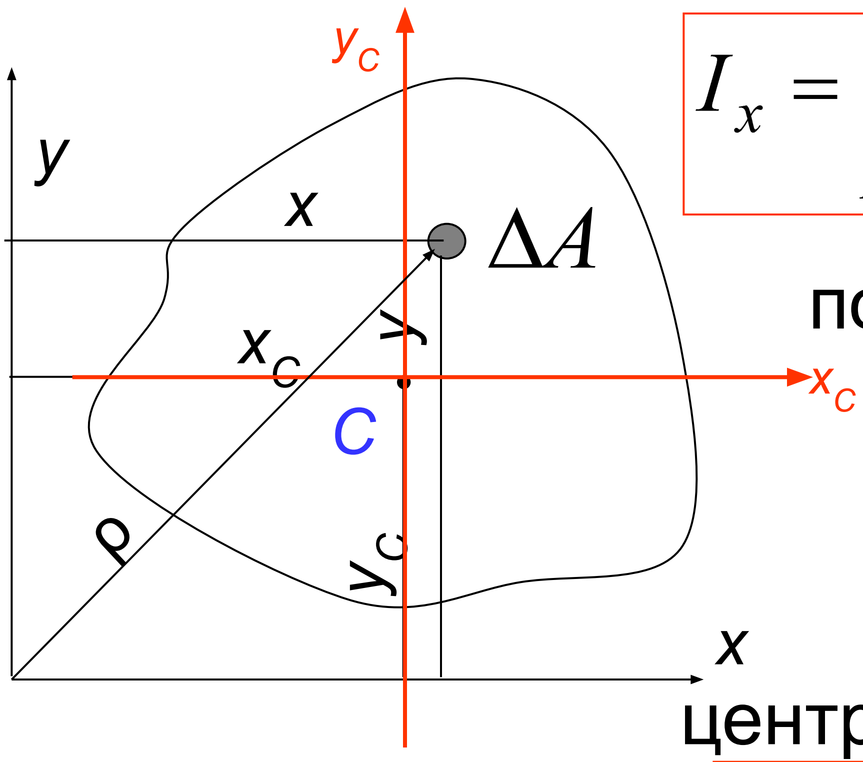
Вообще, для **твердых тел** момент инерции – это величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся наряду с массой мерой инертности тела при непоступательном движении:

$$I_y = \int_V \rho \cdot x^2 dV \qquad I_x = \int_V \rho \cdot y^2 dV$$

$$I_{xy} = \int_V \rho \cdot x \cdot y dV$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

Но, отвлекаясь от материала (плотность=1), для однородных плоских фигур единичной толщины мы получаем следующие характеристики:



осевые моменты инерции

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \qquad I_y = \int_A x^2 \cdot dA;$$

полярный момент инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA;$$

центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA;$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

Свойства некоторых моментов инерции заключают-ся в следующем.

Осевые моментов инерции всегда положительны.

Сумма осевых моментов инерции равна полярному моменту инерции.

Моменты инерции, определяемые относительно центральных осей, называются центральными.

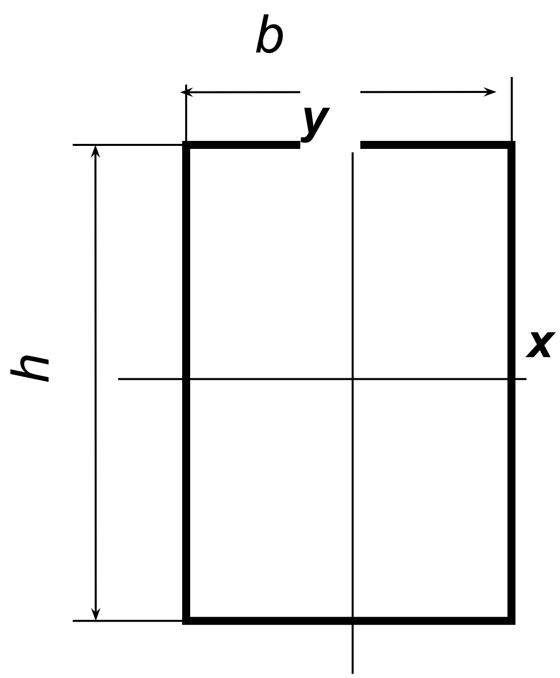
Центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен **нулю**, называются **главными**.

Ось симметрии для фигуры является **главной** осью

Геометрические характеристики плоских фигур.

Во многих расчетах на прочность используются эти характеристики.

Для простейших фигур по приведенным формулам выведены расчетные формулы для определения величины центральных моментов инерции.



Прямоугольник

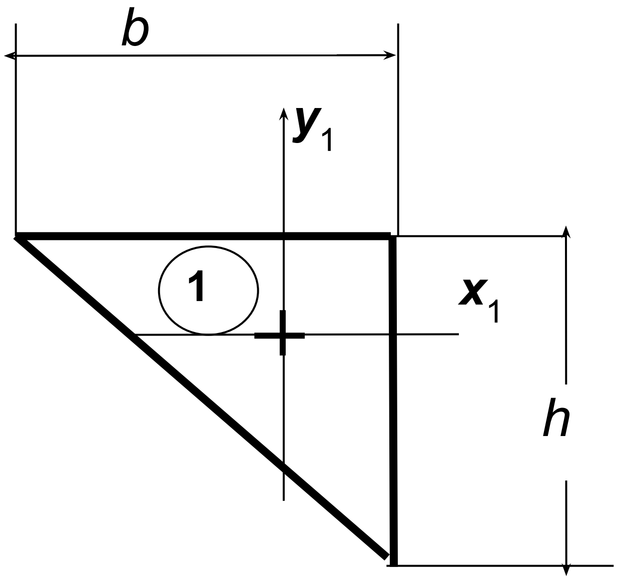
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{yx} = 0.$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

Треугольник

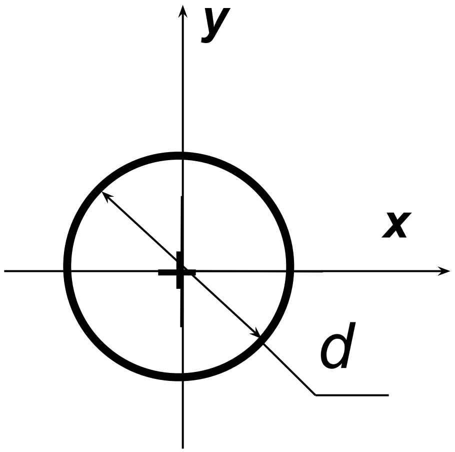


$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{36}$$

$$I_{yx} = \pm \frac{b^2 h^2}{72}.$$

Геометрические характеристики плоских фигур.



Круг

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$I_{yx} = 0.$$

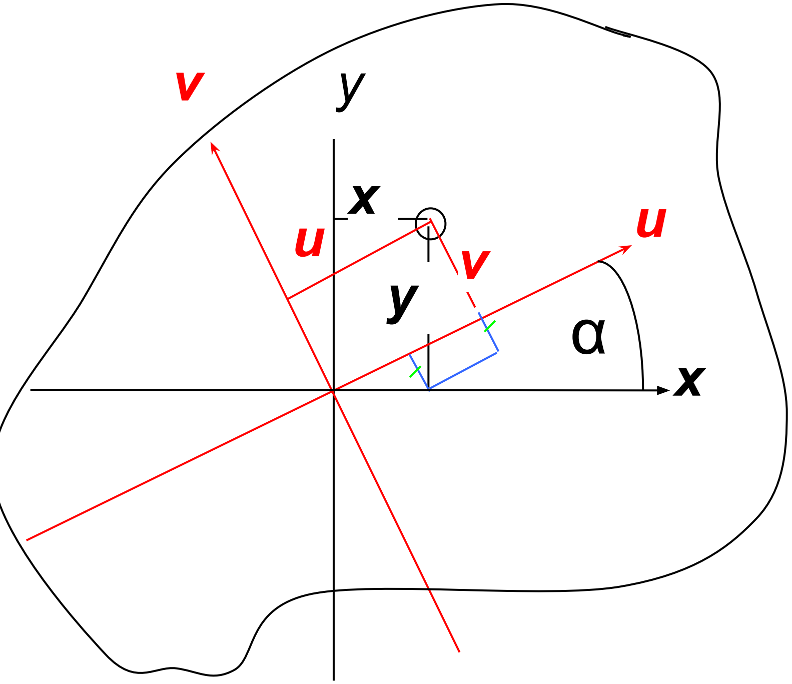
Геометрические характеристики плоских фигур.

Зная центральные моменты инерции простых фигур можно определить эти характеристики относительно других осей, используя формулу параллельного переноса осей:

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Геометрические характеристики плоских фигур.

Формулы поворота осей



$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha - I_{xy}\cos 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

$$tg2\alpha = -\frac{2I_{y_C x_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}}$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

При определении этих величин для фигур, имеющих сложные очертания, применяют метод разбиения их на простейшие фигуры.

Момент инерции *сложной фигуры* равен сумме моментов инерции ее составных частей:

$$I_x = I_{x1} + I_{x_2} + I_{x_3}$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3}$$

$$I_{xy} = I_{yx_1} + I_{yx_2} + I_{yx_3}$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

При определении главных осей, если угол положительный, поворот осей производится против часовой стрелки.

Осевые моменты относительно главных осей называются **главными** и имеют экстремальные значения

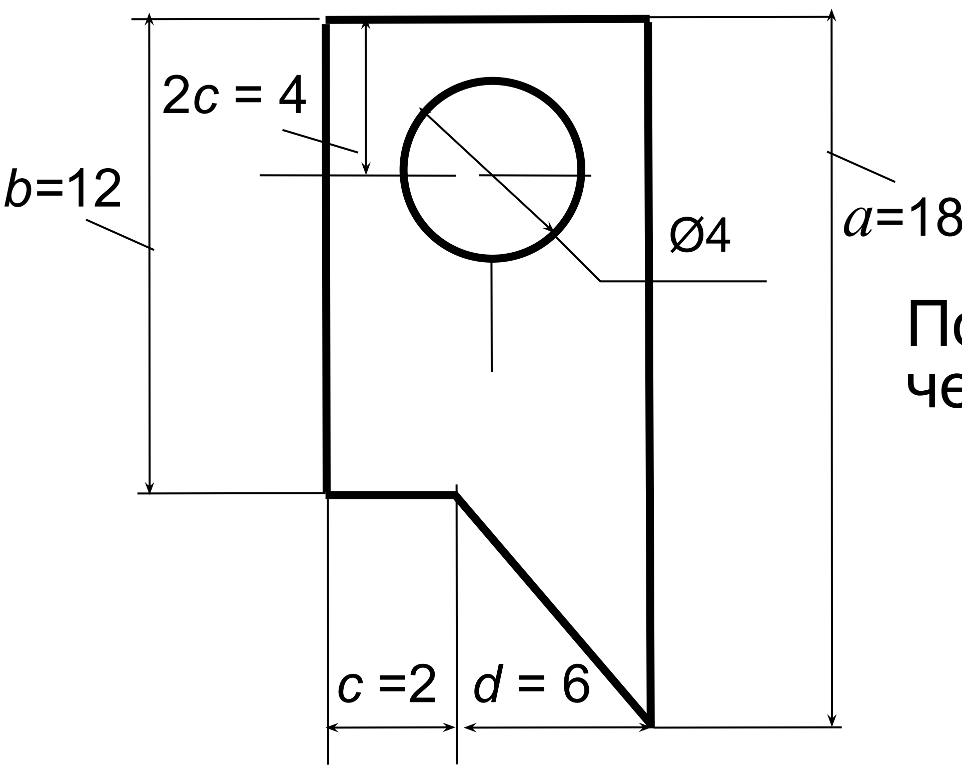
Их можно определить по формуле

$$I_{min}^{max} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{y_C x_C}^2}$$

Геометрические характеристики плоских фигур.

Для поперечного сечения

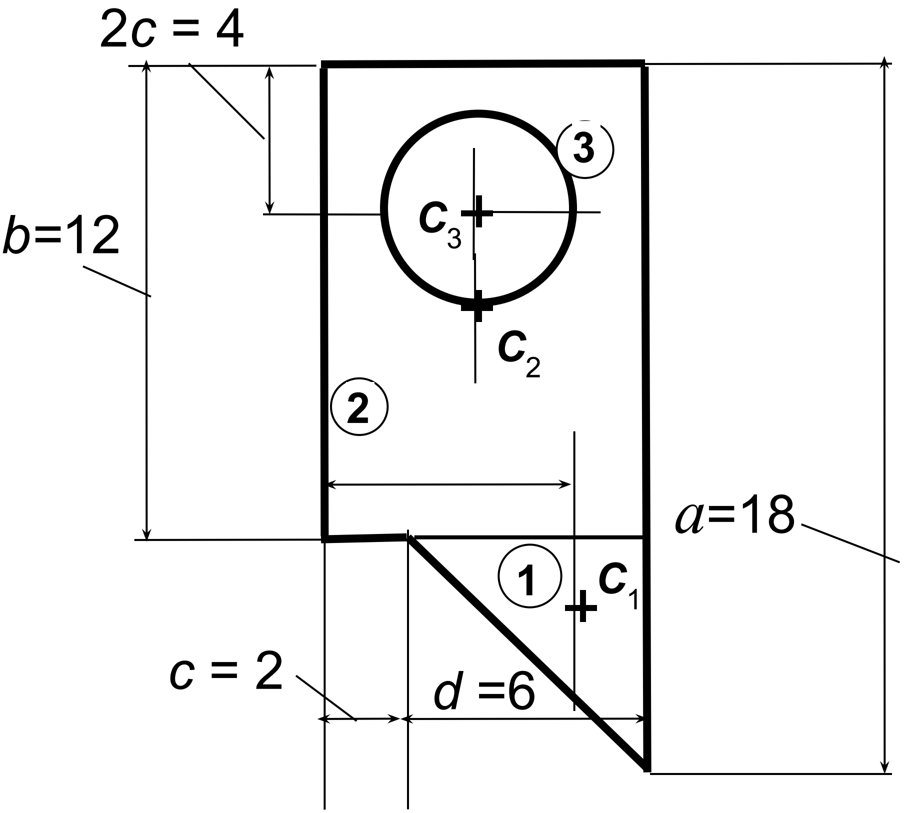
1. определить положение центра тяжести,
2. найти положение главных осей инерции,
3. найти значение главных моментов инерции



Поперечное сечение начерчено в масштабе 1:2

Размеры даны в см

Разбиваем сечение на простейшие фигуры:



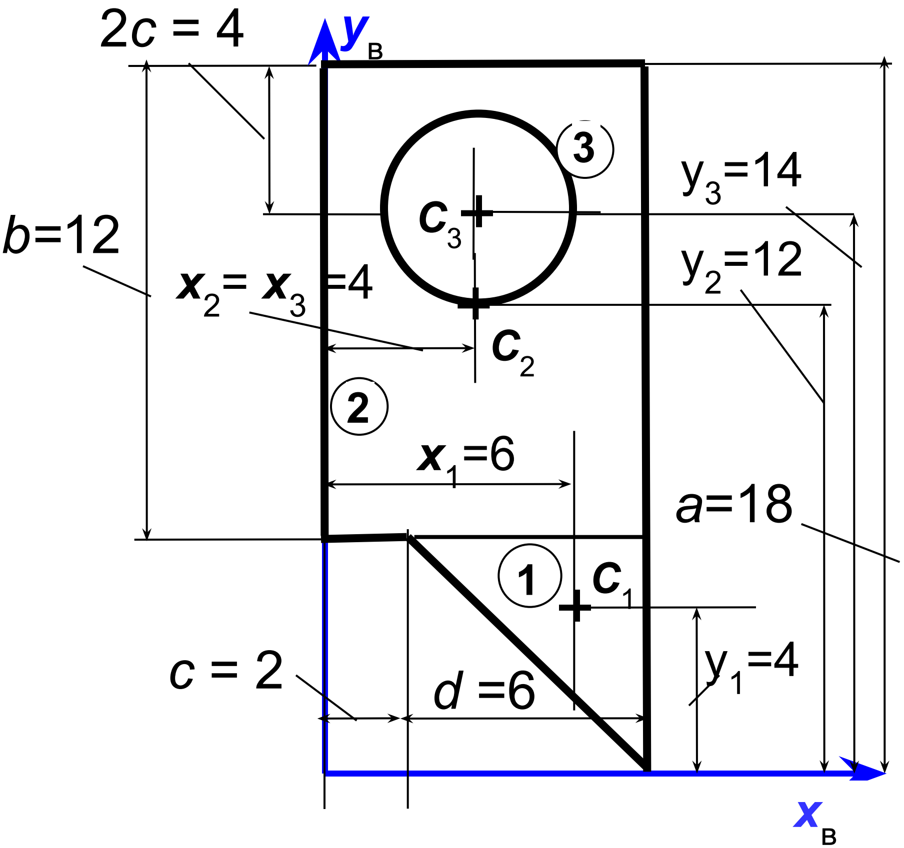
1– прямоугольный треугольник,

2 - прямоугольник,

3 – круг

C_1, C_2, C_3 –центры тяжести фигур

Через крайние точки плоскости проводим вспомогательные временные оси координат



вертикальную $y_в$

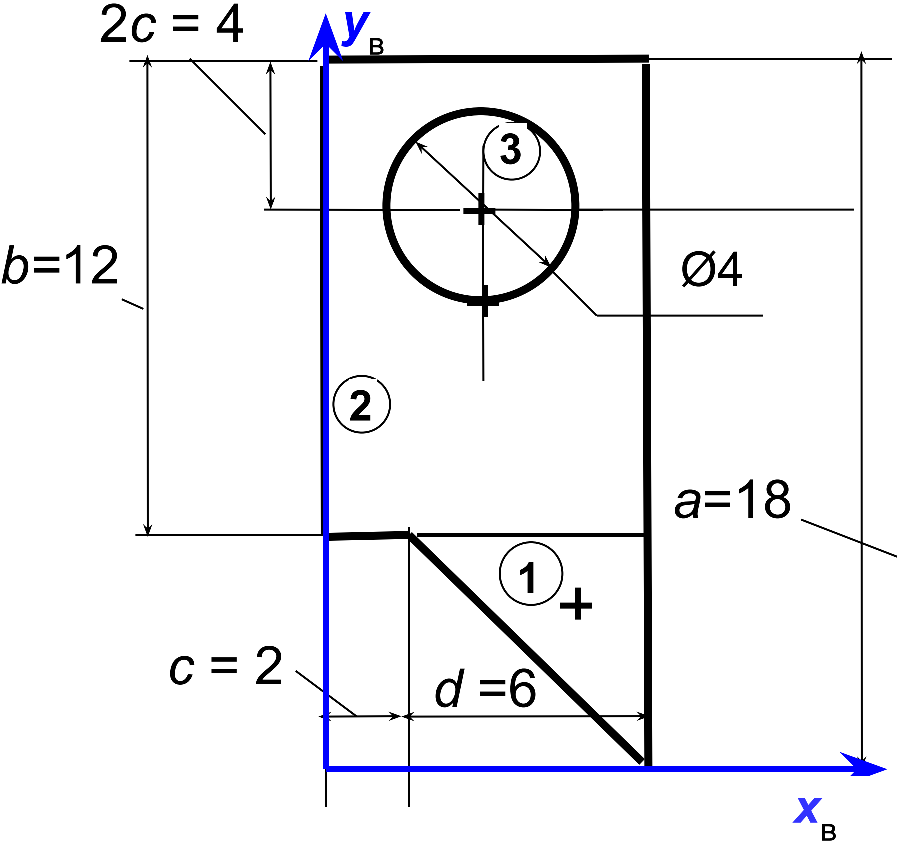
и горизонтальную $x_в$

Они необходимы для определения положения центра тяжести всей фигуры

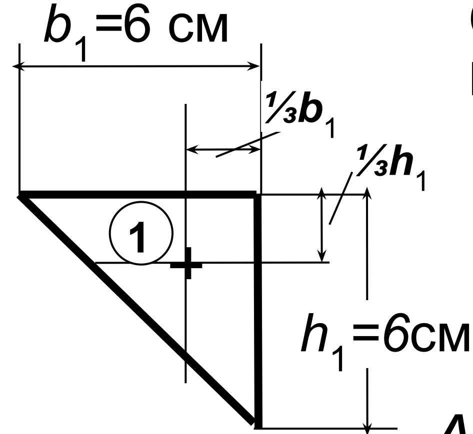
Находим координаты центров тяжести фигур

$$C_1 \begin{cases} x_1=6 \text{ см}; \\ y_1=4 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} x_2=4 \text{ см}; \\ y_2=12 \text{ см}; \end{cases} \qquad C_3 \begin{cases} x_3=4 \text{ см}; \\ y_3=14 \text{ см}; \end{cases}$$

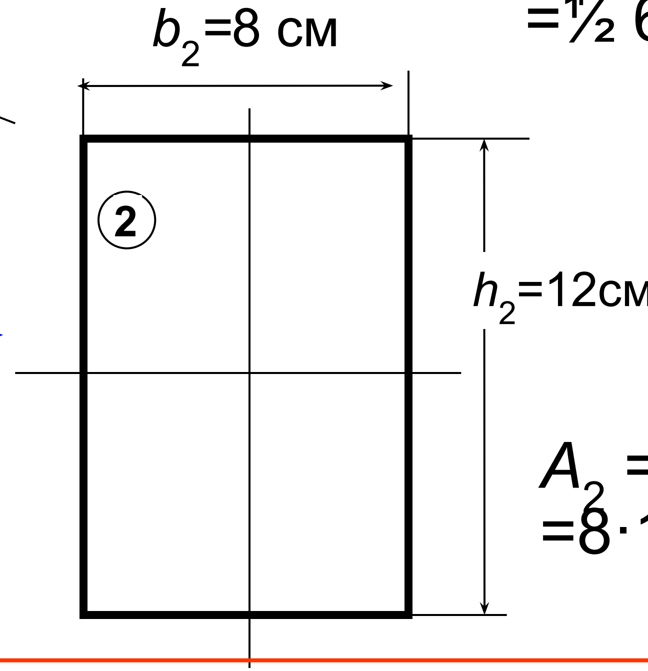
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ



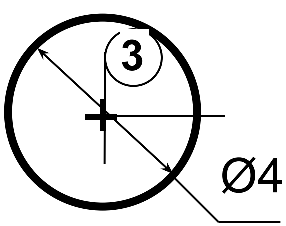
Определяем площади



$$A_1 = \tfrac{1}{2}\, b_1\, h_1 = \tfrac{1}{2}\, 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2$$

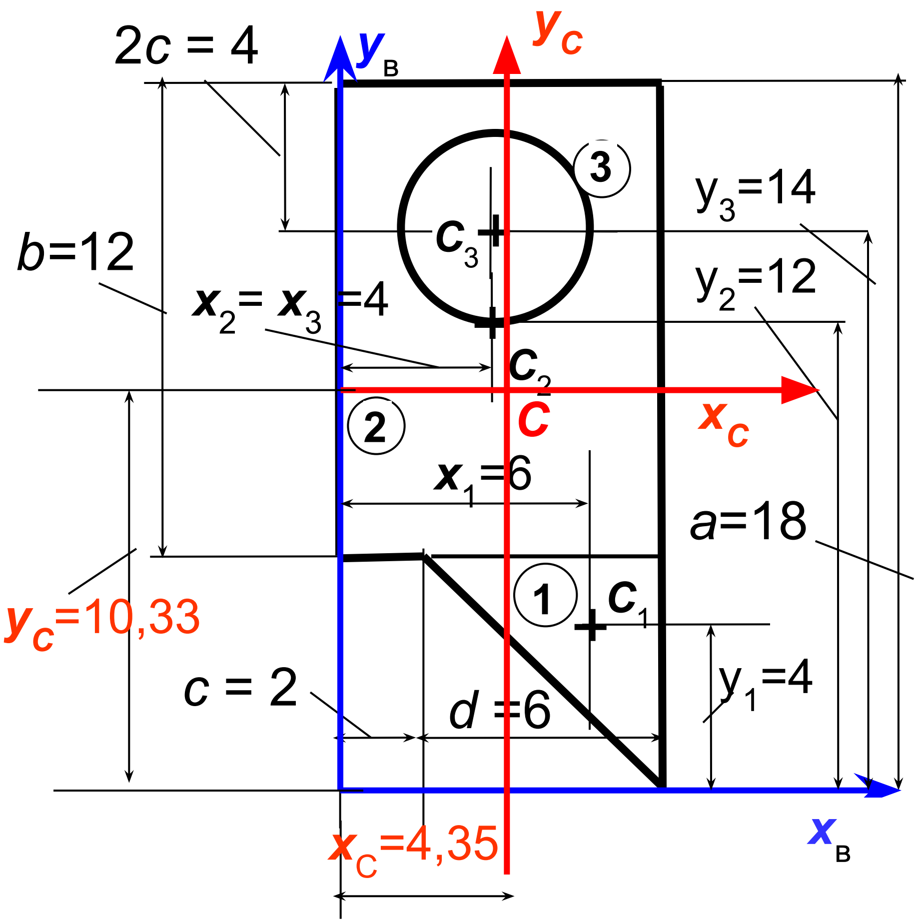


$$A_2 = b_2\, h_2 = 8 \cdot 12 = 96 \text{ см}^2$$



$$A_3 = \pi d^2/4 = 3{,}14 \cdot 4^2/4 = 12{,}56 \text{см}^2$$

$$\boxed{A = A_1 + A_2 - A_3 = 18 + 96 - 12{,}56 = 101{,}44 \text{ см}^2}$$



Определяем координаты центра тяжести фигуры

S – статические моменты

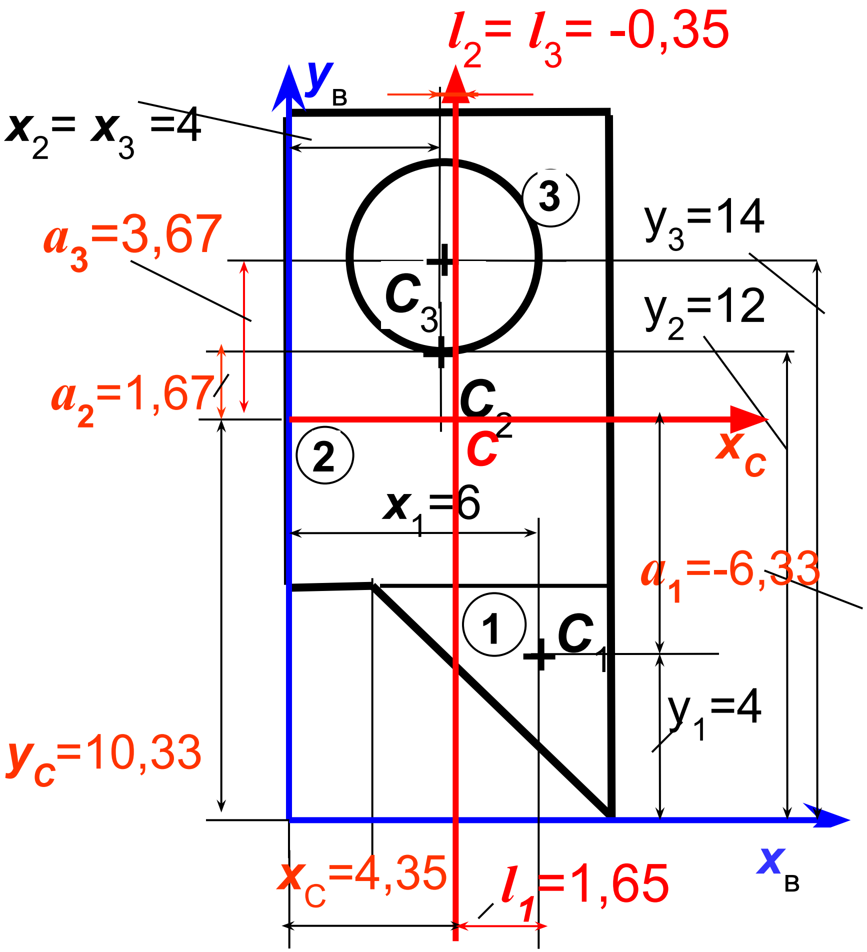
$$x_C = \frac{\Sigma S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3}{A}$$

$$x_C = \frac{18 \cdot 6 + 96 \cdot 4 - 12{,}56 \cdot 4}{101{,}44} = 4{,}35\text{см}$$

$$y_C = \frac{\Sigma S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3}{A}$$

$$y_C = \frac{18 \cdot 4 + 96 \cdot 12 - 12{,}56 \cdot 14}{101{,}44} = 10{,}33\text{см}$$

Через точку *C* с полученными координатами проводим центральные оси, параллельные временным.



Определим координаты центров тяжести простейших фигур относительно центральных осей (в новой системе координат)

Они отражают расстояния между центральными осями и соответствующими осями простейших фигур

a - расстояния между осями x

l – расстояния между осями y

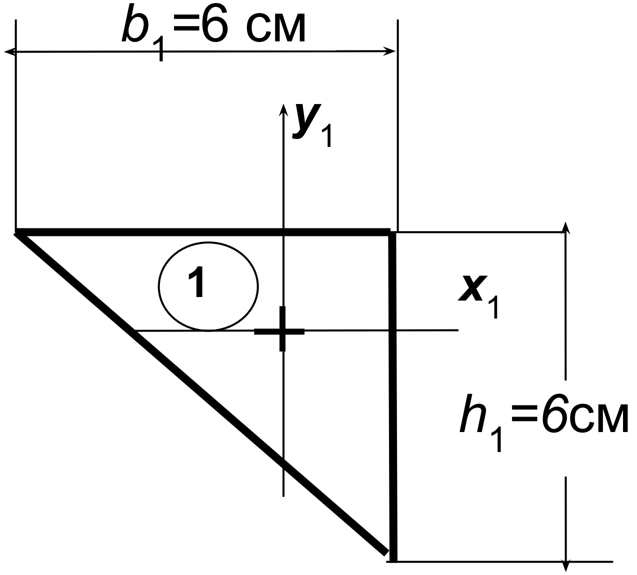
$$a = y - y_C \qquad l = x - x_C$$

$$C_1 \begin{cases} a_1 = 4-10{,}33=-6{,}33 \text{ см} \\ l_1 = 6-4{,}35=1{,}65 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} a_2 = 12-10{,}33=1{,}67 \text{см} \\ l_2 = 4-4{,}35=-0{,}35 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} a_3 = 14-10{,}33=3{,}67 \text{см} \\ l_3 = 4-4{,}35=-0{,}35 \text{ см} \end{cases}$$

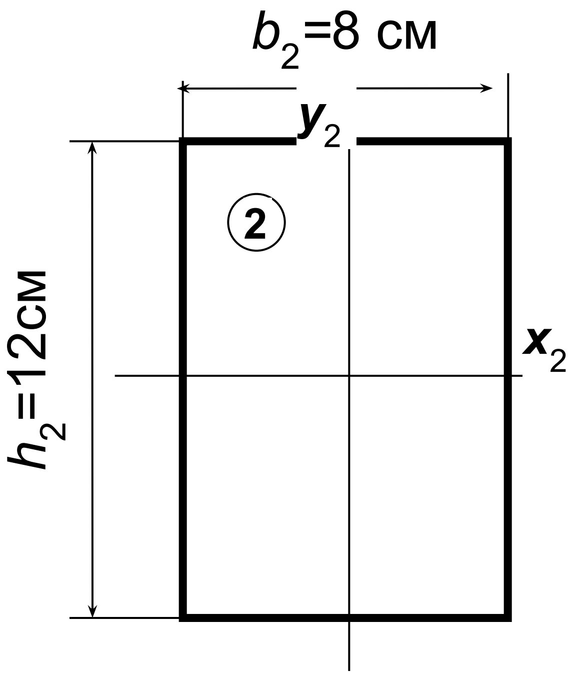
Определим моменты инерции простейших фигур относительно их центральных осей



$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^{\,3}}{36} = \frac{6 \cdot 6^3}{36} = 36 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{b_1^{\,3} h_1}{36} = \frac{6^3 \cdot 6}{36} = 36 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1 x_1} = -\frac{b_1^{\,2} h_1^{\,2}}{72} = -\frac{6_1^{\,2} 6_1^{\,2}}{72} = -18 \text{см}^4$$



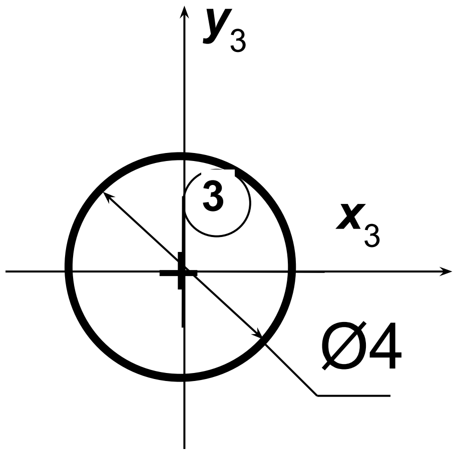
Прямоугольник

$$I_{x_2} = \frac{b_2 h_2{}^3}{12} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152\text{см}^4;$$

$$I_{y_2} = \frac{b_2{}^3 h_2}{12} = \frac{8^3 \cdot 12}{12} = 512\text{см}^4;$$

$$I_{y_2 x_2} = 0.$$

Круг



$$I_{x_3} = I_{y_3} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 4^4}{64} = 12{,}56 \text{см}^4;$$

$$I_{y_3 x_3} = 0.$$

Определим моменты инерции *всего сечения* относительно центральных осей:

Момент инерции *сложной фигуры* равен сумме моментов инерции ее составных частей:

$$I_{x_C} = I_{x_{C_1}} + I_{x_{C2}} - I_{x_{C3}}$$

$$I_{y_C} = I_{y_{C_1}} + I_{y_{C_2}} - I_{y_{C3}}$$

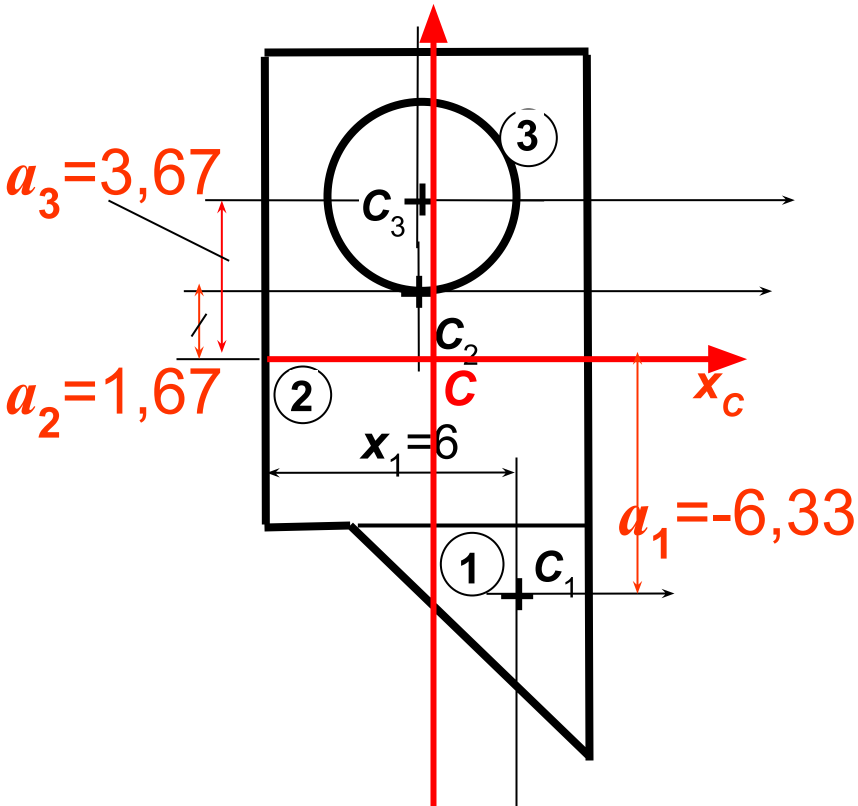
$$I_{y_C x_C} = I_{y_{C_1} x_{C1}} + I_{y_{C_2} x_{C_2}} - I_{y_{C_3} x_{C3}}$$

Моменты инерции составных частей найдем, используя формулу параллельного переноса осей:

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

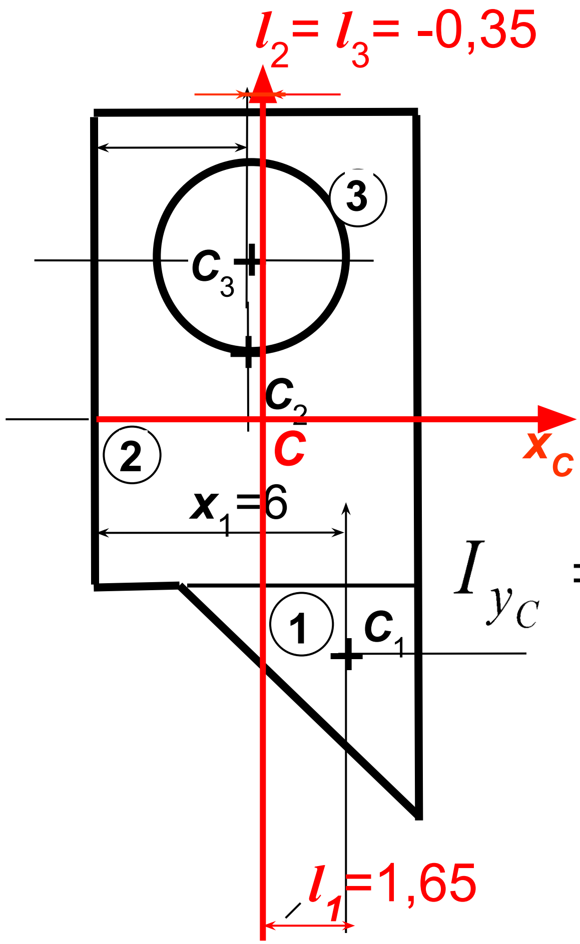
$$I_{x_C} = I_{x_{C_1}} + I_{x_{C2}} - I_{x_{C3}}$$



$$I_{x_C} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 - I_{x3} - a_3^2 A_3$$

$$I_{x_C} = 36 + (-6{,}33^2 \cdot 18) + 1152 + 1{,}67^2 \cdot 96 - 12{,}56 - 3{,}67^2 \cdot 12{,}56 = 1995{,}2\text{см}^4$$

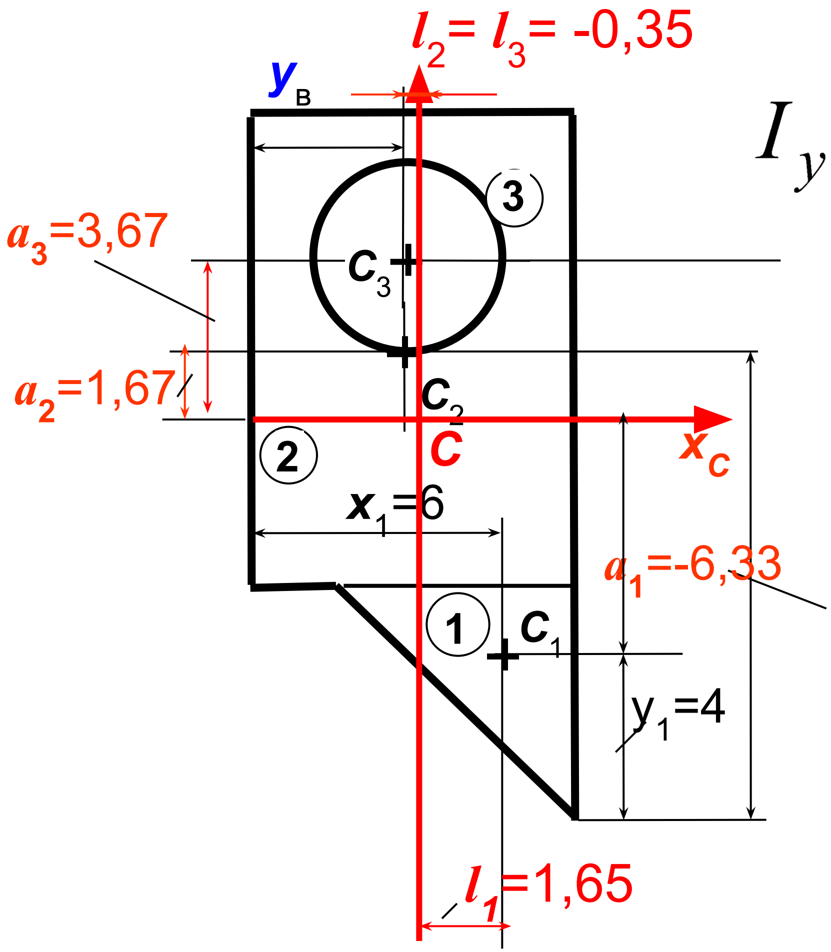
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ



$$I_{y_C} = I_{y_{C_1}} + I_{y_{C_2}} - I_{y_{C3}}$$

$$I_{y_C} = I_{y_1} + l_1^2 A_1 + I_{y_2} + l_2^2 A_2 - I_{y_3} - l_3^2 A_3$$

$$I_{y_C} = 36 + 1{,}65^2 \cdot 18 + 512 + (-0{,}35)^2 \cdot 96 - 12{,}56 - (-0{,}35)^2 12{,}56 = 427 \text{см}^4$$

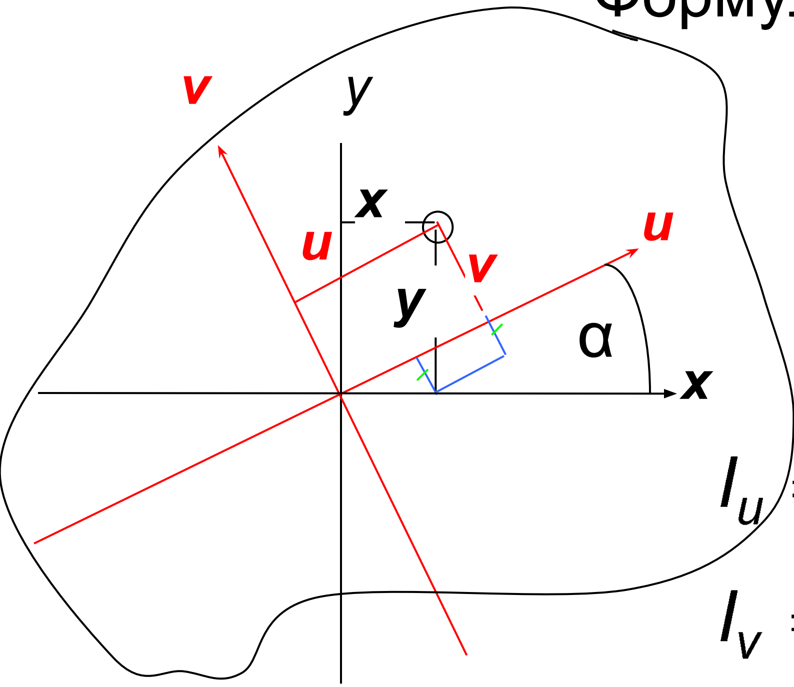


$$I_{y_C x_C} = I_{y_{C_1} x_{C1}} + I_{y_{C_2} x_{C_2}} - I_{y_{C_3} x_{C3}}$$

$$I_{y_C x_C} = I_{y_1 x_1} + a_1 l_1 A_1 + I_{y_2 x_2} + a_2 l_2 A_2 - I_{y_3 x_3} - a_3 l_3 A_3$$

$$I_{y_C x_C} = -18 + (-6{,}33)1{,}65 \cdot 18 + 0 + 1{,}67 \cdot (-0{,}35)96 - 0 - 3{,}67 \cdot (-0{,}35)12{,}56 = -246\text{см}^4$$

Формулы поворота осей



$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

$$I_u = I_x\cos^2\boldsymbol{\alpha} + I_y\sin^2\boldsymbol{\alpha} + I_{xy}\cos 2\boldsymbol{\alpha}$$

$$I_v = I_x\sin^2\boldsymbol{\alpha} + I_y\cos^2\boldsymbol{\alpha} - I_{xy}\cos 2\boldsymbol{\alpha}$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\boldsymbol{\alpha} + I_{xy}\cos 2\boldsymbol{\alpha}$$

$$tg 2\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2I_{y_C x_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}}$$

Получили центробежный момент инерции сечения отличным от нуля, следовательно, оси $\boldsymbol{x}_C$ $\boldsymbol{y}_C$ не являются главными осями инерции.

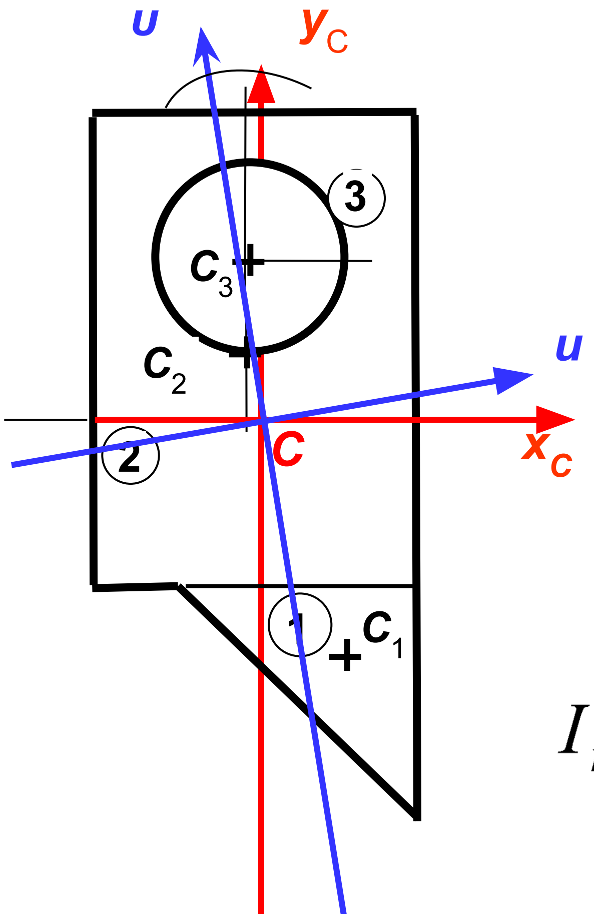
Найдем положение главных осей инерции. Угол поворота осей определим по формуле:

$$tg2\alpha = -\frac{2I_{y_C x_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}}$$

$$tg2\alpha = -\frac{2(-246)}{1995{,}2 - 427} = 0{,}3137;$$

$$2\alpha = 17{,}4°; \qquad \alpha = 8{,}7°.$$

При знаке «+» поворот выполняется против часовой стрелки, если«-», то поворот а направлении часовой стрелки



Строим главные оси **u u**, так как угол положительный, поворот осей производим против часовой стрелки.

Определим значения **главных** моментов инерции по формуле

$$I_{min}^{max} = \frac{I_{x_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{y_C x_C}^2}$$

$$I_u = \frac{1995{,}2 + 427}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1995{,}2 - 427)^2 + 4 \cdot (-246)^2} = 2032{,}9\text{см}^4$$

$$I_\upsilon = \frac{1995{,}2 + 427}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1995{,}2 - 427)^2 + 4 \cdot (-246)^2} = 389{,}3\text{см}^4$$

Проверка

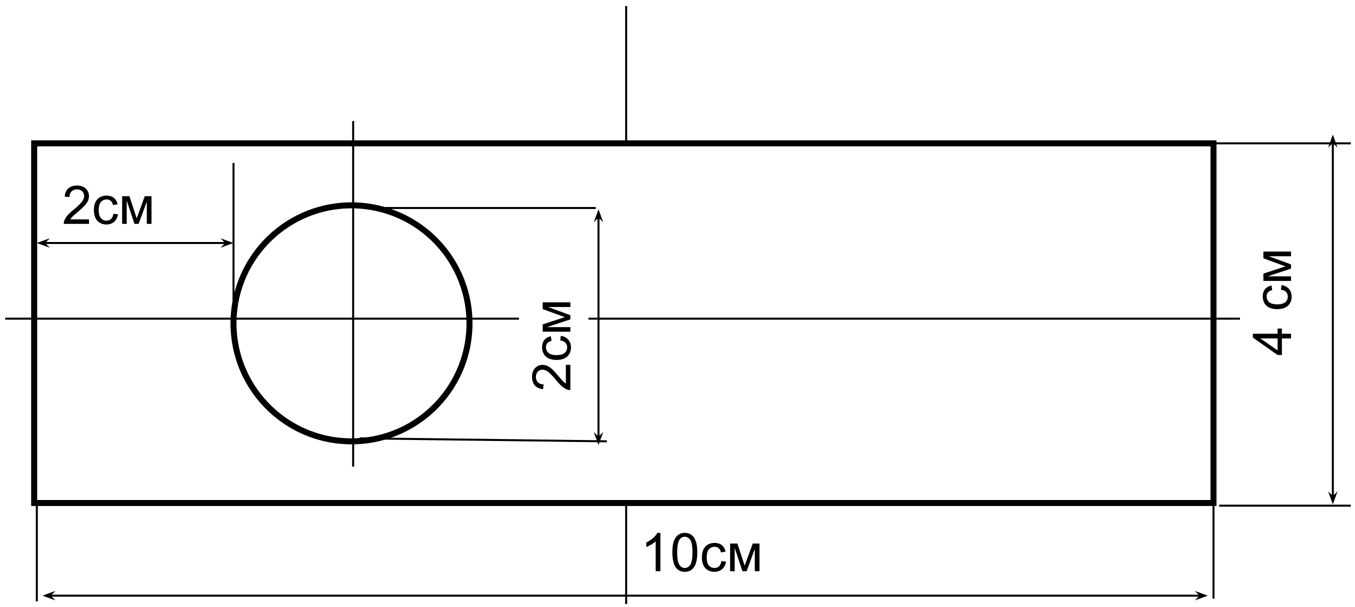
$$I_{x_C} + I_{y_C} = I_u + I_\upsilon$$

1995,2+427=2032,9+389,3

2422,2=2422,2

$$I_{u\upsilon} = \frac{I_{x_C} - I_{y_C}}{2} sin\,2\alpha + I_{x_C y_C}\; cos\,2\alpha = \frac{1995{,}2 - 427}{2} 0{,}299 - 246 \cdot 0{,}954 = 0$$

234,4-234,6=0



2см
2см
4 см
10см