Теореми і аксіоми.

Методи доведення теорем.

Методика навчання учнів доведенню теорем.

ПЛАН

1. Теореми і аксіоми. Види теорем.
2. Загальні прийоми роботи з теоремою.
3. Методи доведення теорем.
4. Методика навчання учнів доведенню теорем.

У математиці доводиться мати справу з **висловленнями** (твердженнями), **які доводяться** (теореми, задачі на доведення), і такими, що їх домовляються **приймати без доведення** (аксіоми).

В основі науки геометрії лежать твердження, які не потребують доведення. Їх назвали ***аксіомами***, що в перекладі з грецької означає «повага», «авторитет».

Аксіоми планіметрії — це основні властивості найпростіших геометричних фігур.

Аксіоми планіметрії

1. Для будь-якої прямої існують точки, що належать їй, і точки, що не належать їй.

2. Через будь-які дві різні точки можна провести пряму і лише одну.

3. Із трьох точок на прямій одна і лише одна лежить між двома іншими.

4. Кожний відрізок має певну довжину.

5. Кожний кут має певну градусну міру.

6. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і лише одну.

Введення аксіом, як і первісних (неозначуваних) понять, пов’язане з дедуктивним характером побудови математики.

Справді, доведения будь-якого твердження складається із тверджень, істинність яких обгрунтовується раніше доведеними істинними твердженнями. Оскільки низка раніше доведених тверджень не може бути нескінченною, виникає потреба домовитись прийняти без доведення декілька істинних тверджень. ***На основі аксіом***, доведених раніше тверджень і означень доводять нові твердження (**теореми**, задачі на доведення).

Твердження, які потребують доведення їх істинності за допомогою аксіом або логічних міркувань, називаються ***теоремами***. *Наприклад*, теоремою є твердження:
Внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній рівні.

Найважливіші теореми, за допомогою яких можна перевірити виконання якоїсь властивості, називаються ***ознаками***. *Наприклад*: Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні або сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180 градусам, то задані прямі паралельні.

У математичних текстах теоремами зазвичай називають тільки **досить важливі твердження**. При цьому необхідні докази зазвичай ким-небудь знайдені.

Менш важливі твердження-теореми зазвичай називають ***лемами, твердженнями, наслідками***, та іншими подібними термінами.

Твердження, про які невідомо, чи є вони теоремами, зазвичай називають ***гіпотезами***.

- **Більшість теорем складаються з таких структурних компонентів**
- ***Пояснювальна частина*,**
- **в якій роз'яснюється, для яких об'єктів доводиться теорема**
- ***Умова теореми*,**
- **в якій вказується на ті поняття, що використовують-ся в теоремі, та яка може мати різноманітну структуру**
- ***Висновок теореми***

- Види теорем
  - Пряма
  - Обернена
  - Протилежна
  - Обернена до протилежної

Пряма і обернена до протилежної теореми є рівносильними.

Приклад: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» – **пряма теорема.**

Обернена: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні».

Протилежна: «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні».

Обернена до протилежної: «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні».

Загальні прийоми роботи з теоремою

Можна умовно виділити наступні *етапи вивчення теореми*

Порядок роботи над формулюванням теореми

- Прочитати дану теорему
- Виділити умову і висновок
- Замінити терміни їх визначеннями
- Все, що можливо, виразити за допомогою креслення
- Доповнити креслення коротким записом

Доведення теорем в навчальних посібниках викладені суцільним текстом, тому необхідно його <u>розчленувати на логічні кроки</u>.

Доцільно *відокремити результати* кроків доведення від їх обґрунтувань або дати структурну схему доведення.

Прийоми ознайомлення з доведенням теореми

1. Вчитель висловлює доведення теореми і для активізації класу використовує евристичну бесіду.

2. Вчитель висловлює доведення теореми у вигляді короткої розповіді, не перериваючи її питаннями. (можливо, коли доведення не громіздке або спосіб доведення новий для учнів)

3. Після роботи над теоремою вона перетворюється на завдання по готовому малюнку, якщо це завдання посильне учневі, то пропонується для самостійної роботи.

4. Доведення пропонується вивчити самостійно по навчальному посібнику, потім один з учнів тут же на уроці доводить теорему.

5. У вигляді лекції висловлюється доведення, коли воно досить громіздке.

Методи доведення теорем

Аналітичний	Синтетичний	Метод доведення від супротивного
Координатний	Векторний	Метод геометричних перетворень
Метод геометричних місць точок	Метод повної індукції	Метод математичної індукції

Аналітичний метод

До математики і методики її навчання історично увійшли два види аналітичних міркувань. Перший з них разом із синтетичним описав **Евклід** у своїх ***«Началах»,*** хоча вони були відомі ще раніше **Платану** (428-348 до н.е.) і **Аристотелю** (384-322 до н. е.). Другий вид ввів **Папп** (III ст.).

Суть аналізу Евкліда можна пояснити так.
Міркування тут проводяться від того, що треба довести. При цьому з припущення правильності того, що треба довести (основа), виводились наслідки, які привели до очевидного правильного висновку (наслідку). Такі аналітичні міркування і називають **аналізом Евкліда**.

Проте цей аналіз не можна вважати доведенням, бо, хоч ми і дістали очевидну правильну нерівність, оскільки правильність наслідку ще не гарантує правильності основи.

Аналітичний метод

Справді, з хибної основи правильними міркуваннями можна дійти правильного наслідку.

Наприклад, -а = а, де а $\neq$ 0 - хибне твердження. Якщо піднести обидві частини цієї неправильної рівності до квадрата, дістанемо таку рівність

$a^2 = a^2$.

Перехід від істинності наслідку до істинності основи можливий тільки тоді, коли основа і наслідок рівносильні взаємно обернені судження.

Саме з цієї причини аналіз Евкліда не можна вважати доведенням, і тому його називають інколи «***недосконалим аналізом***».

Синтетичний метод

Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У синтетичному методі доведення міркування проводяться від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного.

Недоліком синтетичного методу доведення в розглянутому прикладі є неможливість (коли не проведено аналізу Евкліда) здогадатися, з чого треба починати доведення.

У геометричних доведеннях синтетичним методом *важко здогадатися про додаткову побудову*, яку часто в процесі доведення треба виконати.

Синтетичний метод

Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда можна задати так.

1. Припустити, що висновок (вимога) теореми (задачі на доведення) правильний.

2. Вивести з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Переконатися, що одержаний висновок-наслідок є або очевидною, або встановленою раніше істиною.

4. Взявши одержаний істинний висновок за вихідне твердження, провести міркування у зворотному напрямку і перейти, якщо це можливо, до висновку про правильність доводжуваного твердження.

Аналітико-синтетичний метод

Цей метод полягає в тому, що пошук доведення **починають аналітичним методом**, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають *міркувати у зворотному напрямку*, тобто з розгортання умови. Отже, **далі доведення виконують синтетичним методом**.

Рух з протилежних кінців в загальному випадку проводиться доти, доки міркування не зустрінуться на спільному твердженні або на суперечливих висновках. Цей метод особливо зручний тоді, коли перетворення лише умови чи лише висновку теореми (задачі) не приводить до мети.

Метод від супротивного

Для супротивних тверджень справджується **закон виключеного третього**: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге – ні, а третього бути не може.

Тому замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що ***супротивне йому твердження неправильне***. З цього випливатиме справедливість даного.

Деякі автори метод від супротивного ще називають ***непрямим, зведенням до абсурду.***

Іноді з припущення виводять наслідок, який суперечить цьому самому припущенню або деякому вже обґрунтованому твердженню чи аксіомі. Це свідчить про те, що **припущення** (твердження, супротивне доводжуваному) **неправильне**, а, отже, <u>правильне доводжуване твердження</u>.

Координатний метод

Перевага методу координат перед синтетичним методом, за якого безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує особливого підходу, полягає в його **алгоритмічності**. Справді, за допомогою методів координат ***будь-яка задача зводиться до алгебраїчної***, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізуються.

Метод координат є основним методом дослідження **властивостей геометричних фігур** в аналітичній геометрії. Цей метод спрощує розв’язання багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу, що стосується векторів, тригонометричних функцій.

Векторний метод

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом – орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, перше з яких учні вміють доводити і без застосування векторів. Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила – орієнтира векторного методу доведення тверджень.

1. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умову і вимоги, виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Перетворити одержані рівності й прийти до потрібної.

3. Перекласти одержану рівність на мову геометрії.

Метод геометричних перетворень

Вивчивши центральну та осьову симетрії вже можна скласти правило-орієнтир методу руху, яке в подальшому вивченні матеріалу підтвердить себе як правило-орієнтир методу геометричних перетворень.

1. Провести синтетичний аналіз доведення теореми (задачі).

2. Визначити, які об’єкти чи частини об’єктів, що розглядаються в доведенні, могли утворитися методом геометричних перетворень.

3. Застосувати основні властивості геометричних перетворень.

4. Зробити висновок.

Метод геометричних місць точок

Основа даного методу – поняття геометричного місця точок. **Геометричним місцем точок (ГМТ)** простору називається множина всіх точок простору, кожна з яких має властивість зазначену вище. Усі інші точки простору зазначеної властивістю не мають. ГМТ задається властивістю точки, яка називається ***характеристичною властивістю цього ГМТ (фігури).***

Математична сутність методу геометричного місця точок полягає в тому, що шукана точка визначається як точка перетинання деяких двох геометричних місць (або іноді як точка перетинання деякогогеометричного місця точок з даною прямою або окружністю).

Метод геометричного місця точок є одним з найважливіших прийомів розв'язування геометричних задач на побудову.

Метод повної індукції

Якщо, доводячи теорему, розчленовують її на скінчене число тверджень і доводять кожне з цих тверджень окремо, то такий метод доведення називають **методом повної індукції**.

Логічною основою цього методу є така *аксіома логіки*: якщо якусь властивість мають всі елементи множини А і всі елементи множини В
і якщо множина М є сума множин А і В, то цю саму властивість має і кожен елемент множини М.

Метод математичної індукції.

Логічною основою методу є **принцип математичної індукції**, взятий в шкільному курсі за аксіому.

Правило-орієнтир доведення методом математичної індукції складається з трьох кроків:

1. Перевірити правильність твердження для $n=1$ ($n=n_0$)

2. Припустити, що твердження правильне при $n=k$, де $k > n_0$, і довести, користуючись цим припущенням, що твердження правильне при $n=k+1$, тобто для наступного значення n.

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального числа n ($n > n_0$).

Методика навчання учнів доведенню теорем

- **Навчання доведень**
  - **Навчання готових доведень, запропонованих учителем або за підручником**
  - **Навчання учнів самостійного пошуку доведень**

Навчання готових доведень

За умови належної організації навчання готових доведень можна сформувати в учнів компоненти самостійного пошуку і побудови доведення.

Готові доведення мають виступати **як моделі**, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що покладено в основу вміння доводити, методів доведень та їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим.

Проблему навчання доведень доцільно поділити на **кілька навчальних завдань**, які розв'язують послідовно:

1) вивчення готових доведень, вміння відтворювати їх;

2) самостійна побудова доведення за вивченим зразком;

3) пошук і виклад доведення за вказаним учителем методом (способом);

4) самостійний пошук і виклад доведення учнями.

Під час вивчення готових доведень теорем учні мають усвідомлювати **істотні елементи доведення**, відсторонюватися від неістотних (розміщення рисунка, позначення) і помічати істотне спільне в доведеннях.

Перш ніж проводити докладне доведення, потрібно спочатку **назвати основні етапи** і твердження, на яких воно ґрунтуватиметься. Це дає можливість звернути увагу учнів на *структуру доведення в цілому, виявити основну його ідею, назвати метод.*

Психологи обґрунтовують це тим, що **докладне, розгорнуте доведення** забезпечує утворення зв'язків між окремими ланками, а **коротка схема з указівкою на ідею** і метод доведення забезпечує розуміння структури основних зв'язків в цілому, сприяє міцності засвоєння матеріалу.

Навчання учнів самостійного пошуку доведень

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять *необхідні й достатні або достатні ознаки понять*, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися **розгортати умови**, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

Навчання учнів уміння самостійно здійснювати пошук доведення значною мірою залежить від ***володіння основними складовими уміння доводити,***
методами доведень.

У процесі підготовки до пошуку складніших доведень можна скористатися **правилами-орієнтирами**, що вказують, як встановити найпоширеніші відношення між фігурами.

Наприклад, щоб **довести рівність трикутників**, досить:

1) підвести їх до однієї з ознак рівності або скористатися означенням рівних трикутників;
2) довести, що один з трикутників можна дістати з другого, виконавши деякий рух (симетрія, поворот, перенесення).

Для **доведення рівності відрізків або кутів** досить:

1) довести рівність трикутників або інших фігур, елементами яких є зазначені у вимозі відрізки (кути), і потім зробити висновок про рівність відповідних відрізків (кутів);
2) довести, що один відрізок (кут) можна отримати з другого, виконавши деякий рух.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!