Глава 3. Показатели надежности

3.1. Невосстанавливаемые объекты

Пусть при $t = 0$ объект начинает работу;

при $t = T$ происходит отказ объекта.

T – НСВ, которая называется **наработка до отказа.**

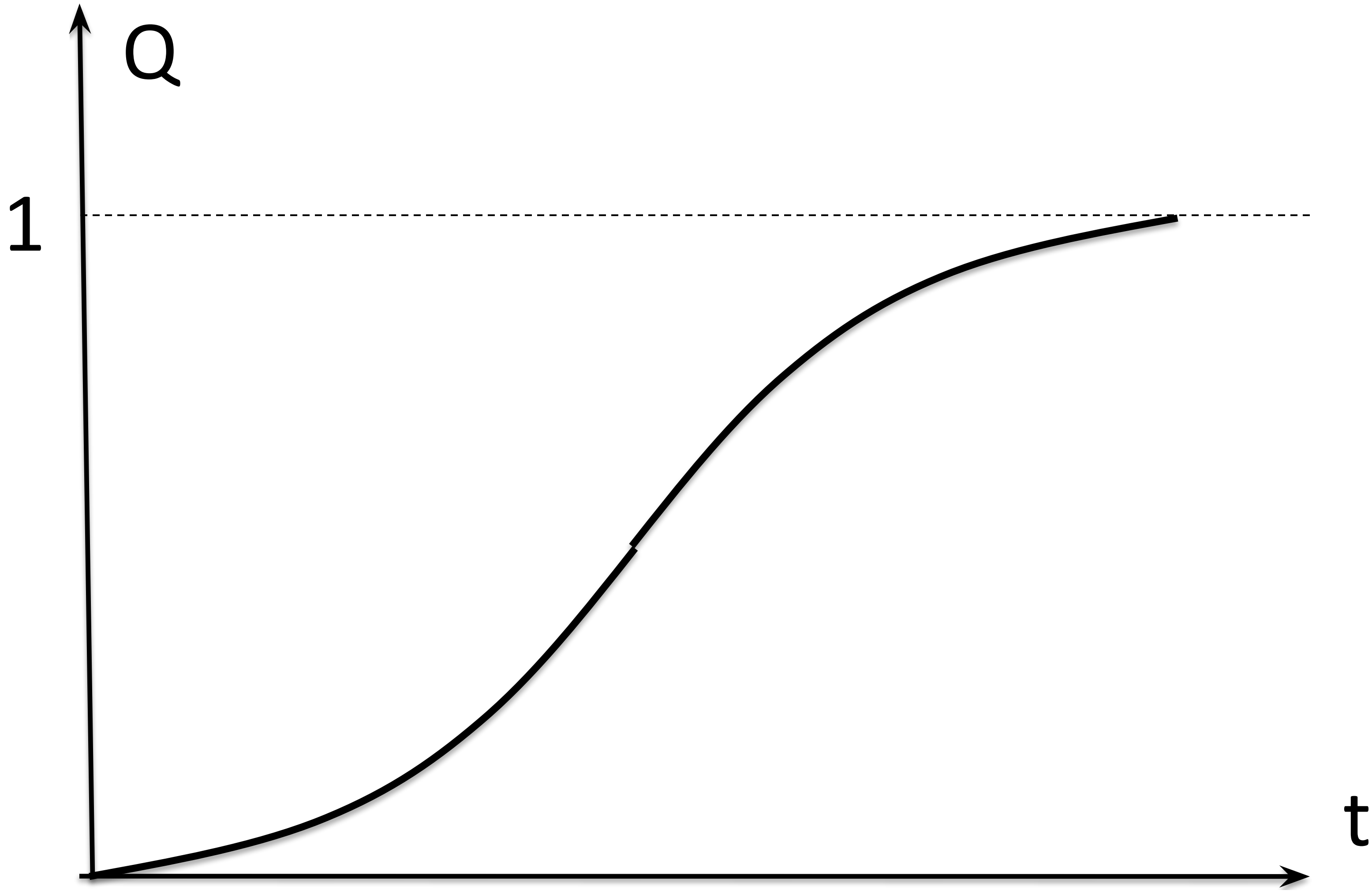
Обозначим функцию распределения этой НСВ $Q(t)$.

Назовём $Q(t)$ **функцией отказа.**

По определению:

$Q(t) = P(T < t)$ – вероятность отказа объекта до момента t.

Функция отказа



Введем понятие плотности вероятности отказа объекта f(t).

Аналитически:

$f(t) = Q'(t)$.

Статистически:

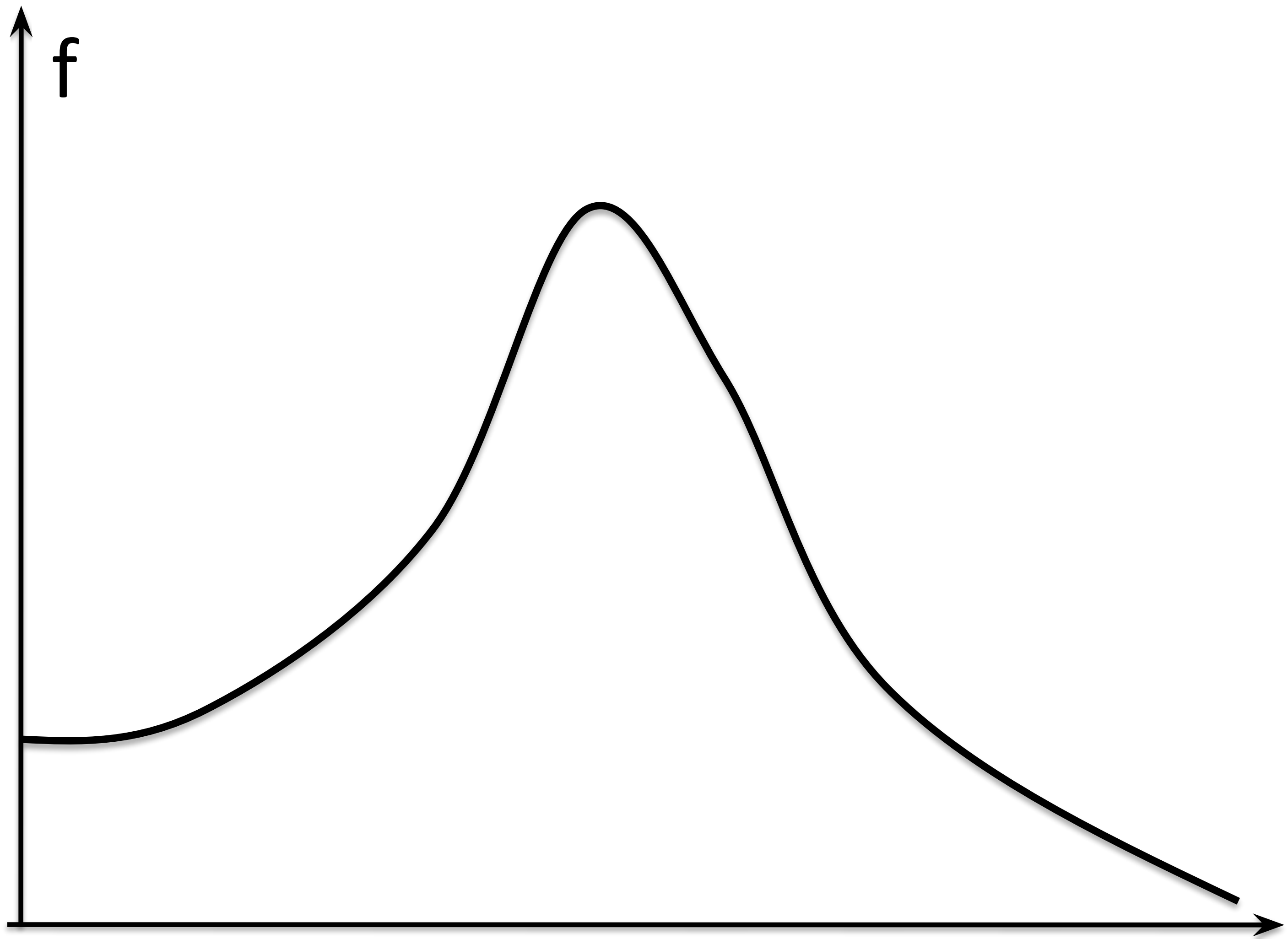
$$\hat{f}(t) = \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{N_0 \Delta t} = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N_0 \Delta t}$$

где m(t) – количество объектов, **отказавших** к моменту времени t;

N(t) – количество объектов, **исправных** к моменту времени t;

N_0 – количество объектов, **исправных** при t = 0.

Плотность вероятности отказа



Обозначим вероятность безотказной работы в течение времени t:

R(t) = P(T > t)

Назовём R(t) **функцией надежности.**

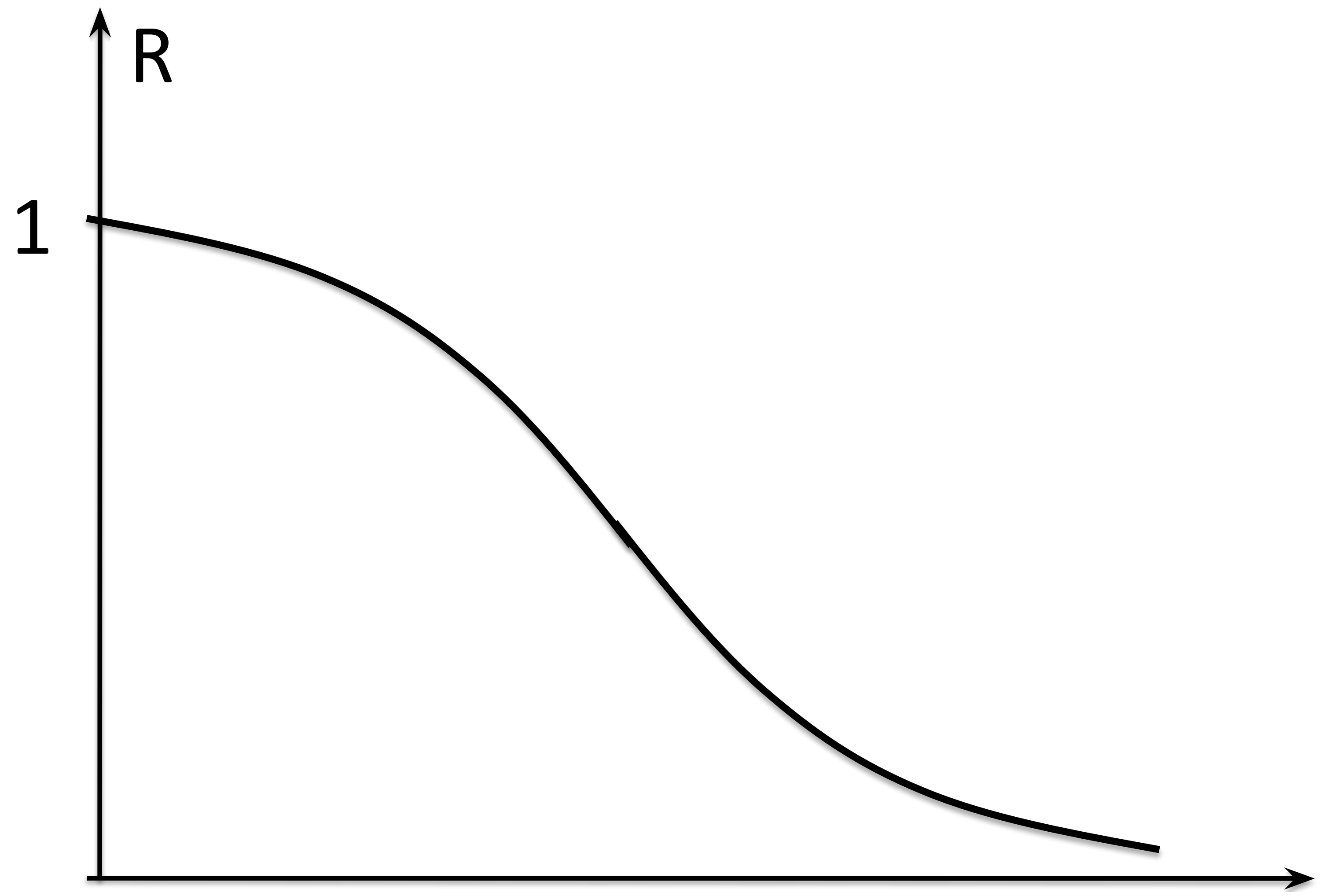
Аналитически:

R(t) = 1 – Q(t).

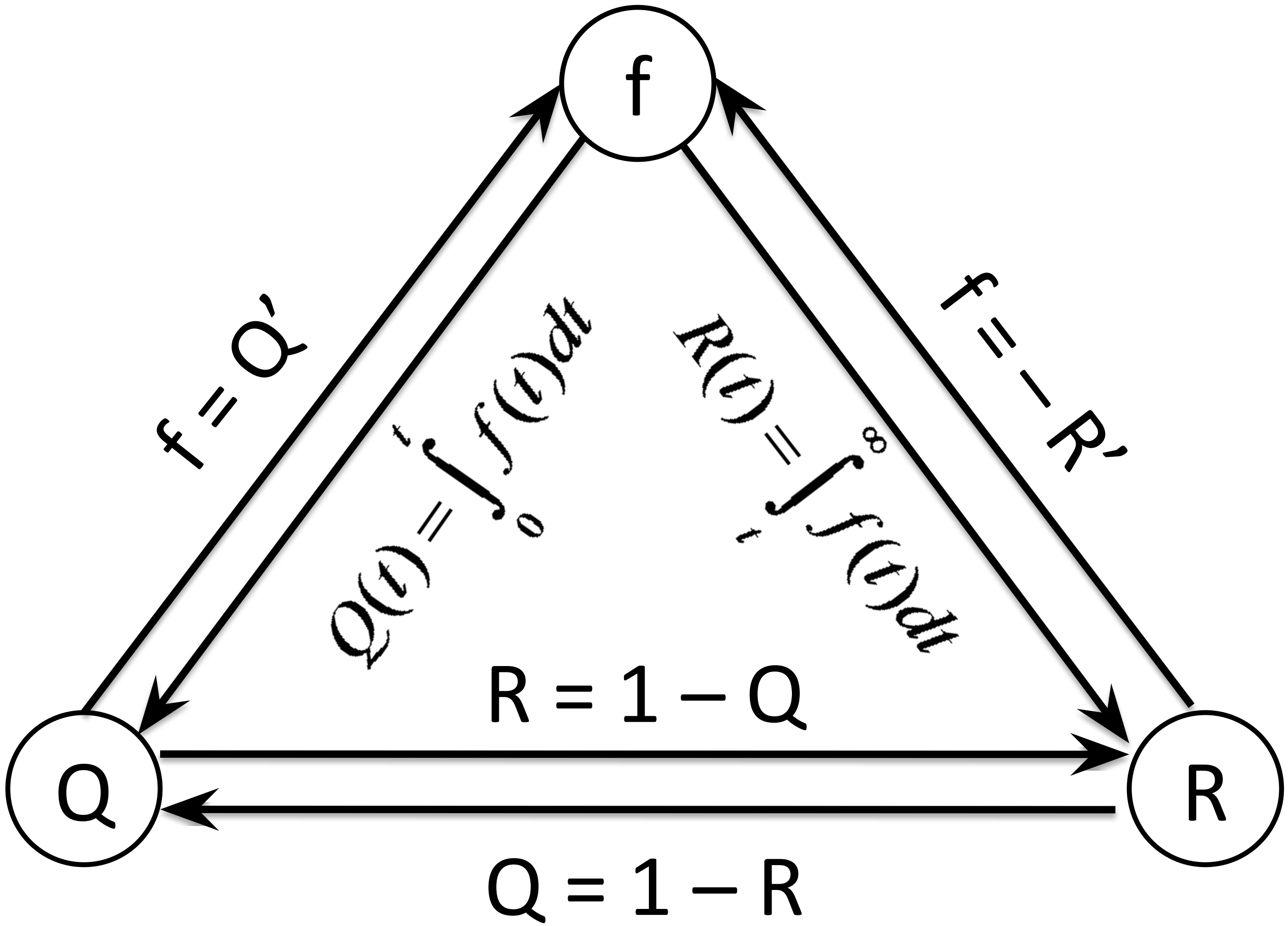
Статистически:

$$\hat{R}(t) = \frac{N(t)}{N_0}$$

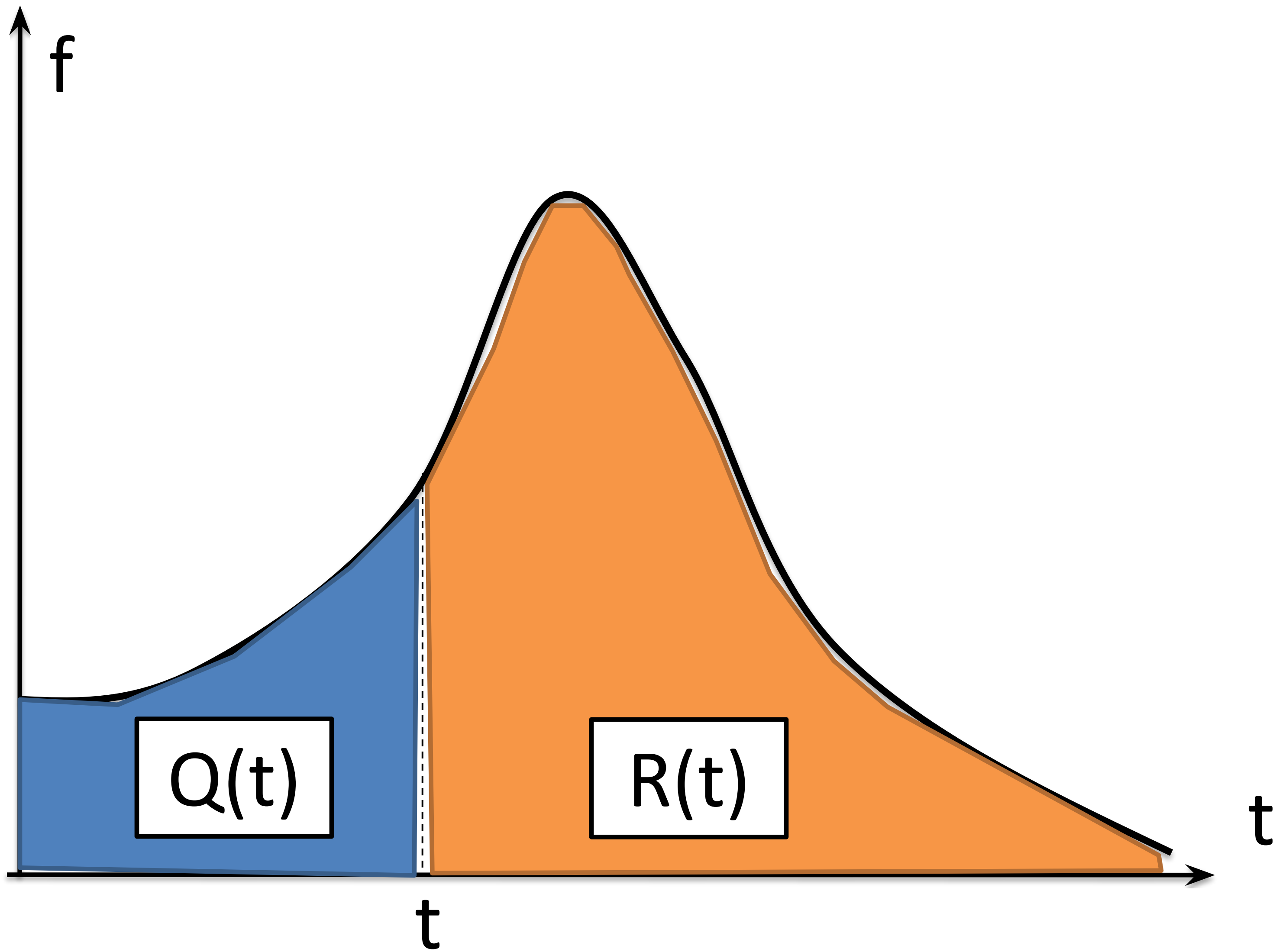
Функция надежности



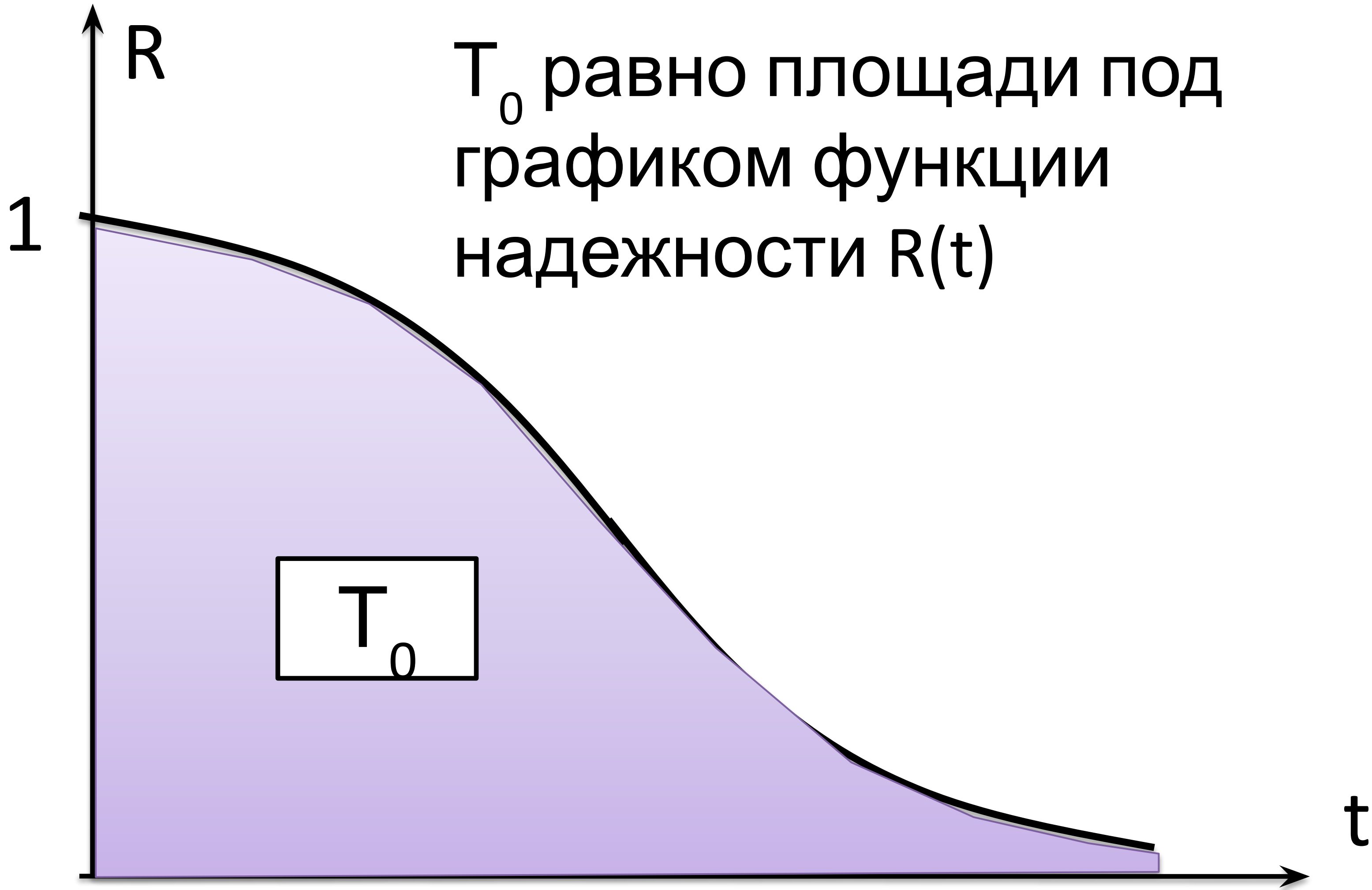
Связь между функциями Q, R, f



Графическая связь между функциями Q, R, f



Среднее время безотказной работы T_0



T_0 равно площади под графиком функции надежности R(t)

Среднее время безотказной работы T_0

Статистически:

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i$$

где

t_i – наработка до отказа i-го объекта;

N_0 – первоначальное количество исправных объектов.

Причём испытания проводят, пока все N_0 объектов не откажут.

Среднее время безотказной работы T_0

Если нет возможности дожидаться отказа всех объектов (из-за недостатка времени), то T_0 можно оценить так:

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{N_0}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i + t(N_0 - m)\right)$$

где

t – время испытания;

m – число отказавших объектов за время t

Интенсивность отказов $\lambda(t)$

$[\lambda] = с^{-1}$, $ч^{-1}$, $год^{-1}$ и т. д.

Статистически:

$\lambda(t)$ – число отказов в единицу времени, отнесённое к числу безотказно проработавших до этого времени объектов.

С позиций теории вероятности:

$\lambda(t)$ – условная плотность вероятности отказа объекта при условии, что до рассматриваемого момента отказа не было.

Таким образом $\lambda(t)$ является локальной характеристикой надёжности, т.е. определяет надёжность объекта в каждый данный момент времени.

Интенсивность отказов λ(t)

Аналитически:

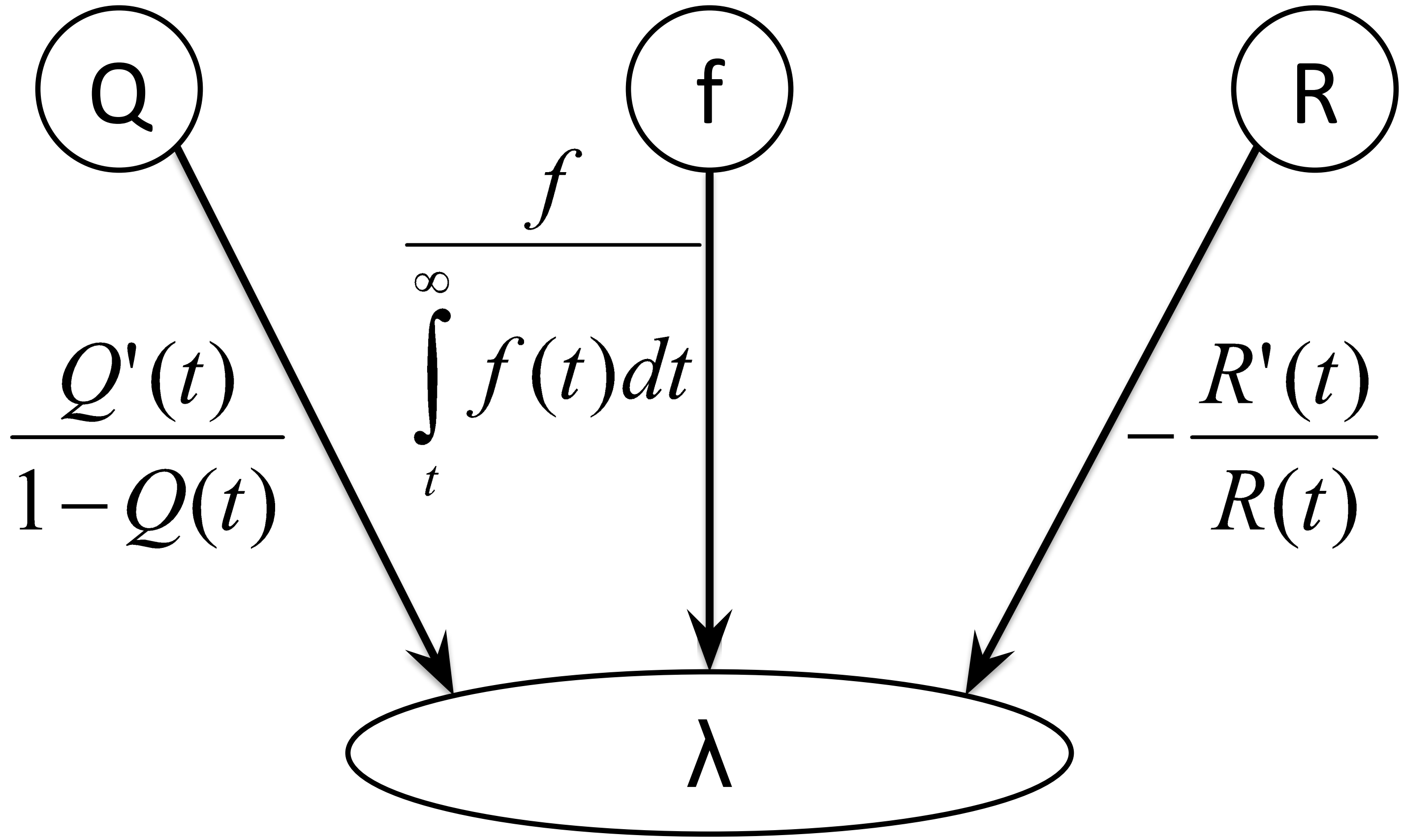
$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Статистически:

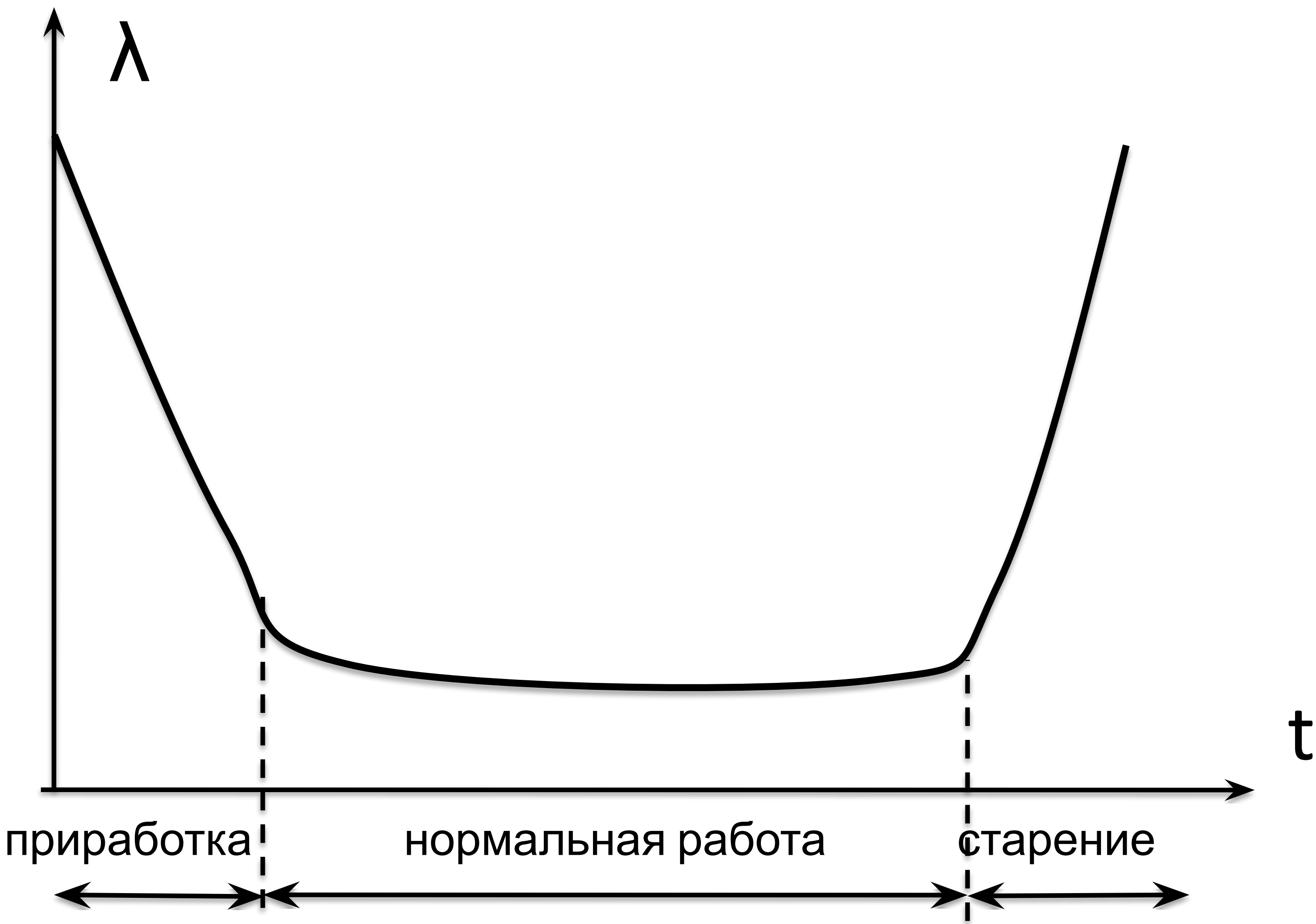
$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\dfrac{N(t)}{N_0} - \dfrac{N(t+\Delta t)}{N_0}}{\Delta t \cdot \dfrac{N(t)}{N_0}} = \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{\Delta t \cdot N(t)} = \frac{m(\Delta t)}{\Delta t \cdot N(t)}$$

где m(Δt) – количество отказов за время Δt.

Связь между функциями Q, R, f, λ



Интенсивность отказов



Рассмотрим нормальную работу

Для нормальной работы можно считать:

$\lambda(t) = const = \lambda$

Тогда

$R(t) = \exp(-\lambda t)$

$Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$

$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$

$T_0 = 1/\lambda$

Получили экспоненциальный закон распределения с параметром λ.

При экспоненциальном законе **вероятность безотказной работы** на интервале $(t;\ t + \Delta t)$ не зависит от времени предшествующей работы t, а **зависит только от продолжительности интервала** Δt.

Доказательство:

По формуле условной вероятности

$$R(t;\ t + \Delta t) = R(t + \Delta t)\ /\ R(t) =$$

$$= \exp(-\lambda(t + \Delta t))\ /\ \exp(-\lambda t) =$$

$$= \exp(-\lambda(t + \Delta t) + \lambda t) = \exp(-\lambda\Delta t).$$

Упрощение формул для малых времён t

В практических расчетах при малых временах рассмотренные выше формулы упрощают, используя соотношение из теории эквивалентов:

$\exp(x) \sim 1 + x$ при $x \to 0$

Тогда

$R(t) = 1 - \lambda t$

$R(t;\, t + \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$

$Q(t) = \lambda t$

Эти зависимости верны для малых λt (т.е. $t \ll$

3.2. Объекты с мгновенным восстановлением

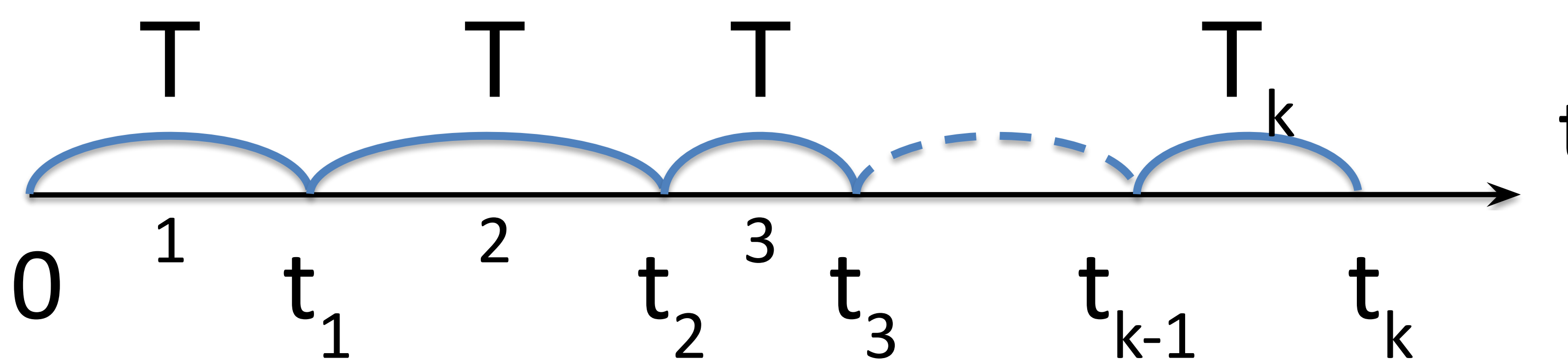
- Эксплуатация восстанавливаемого объекта не прекращается при его отказе.

- Объект ремонтируется или заменяется новым.

- Наработка между отказами и продолжительность восстановления являются НСВ.

- Рассмотрим ситуацию, когда время восстановления << наработки между отказами

Поток отказов объекта с мгновенным восстановлением

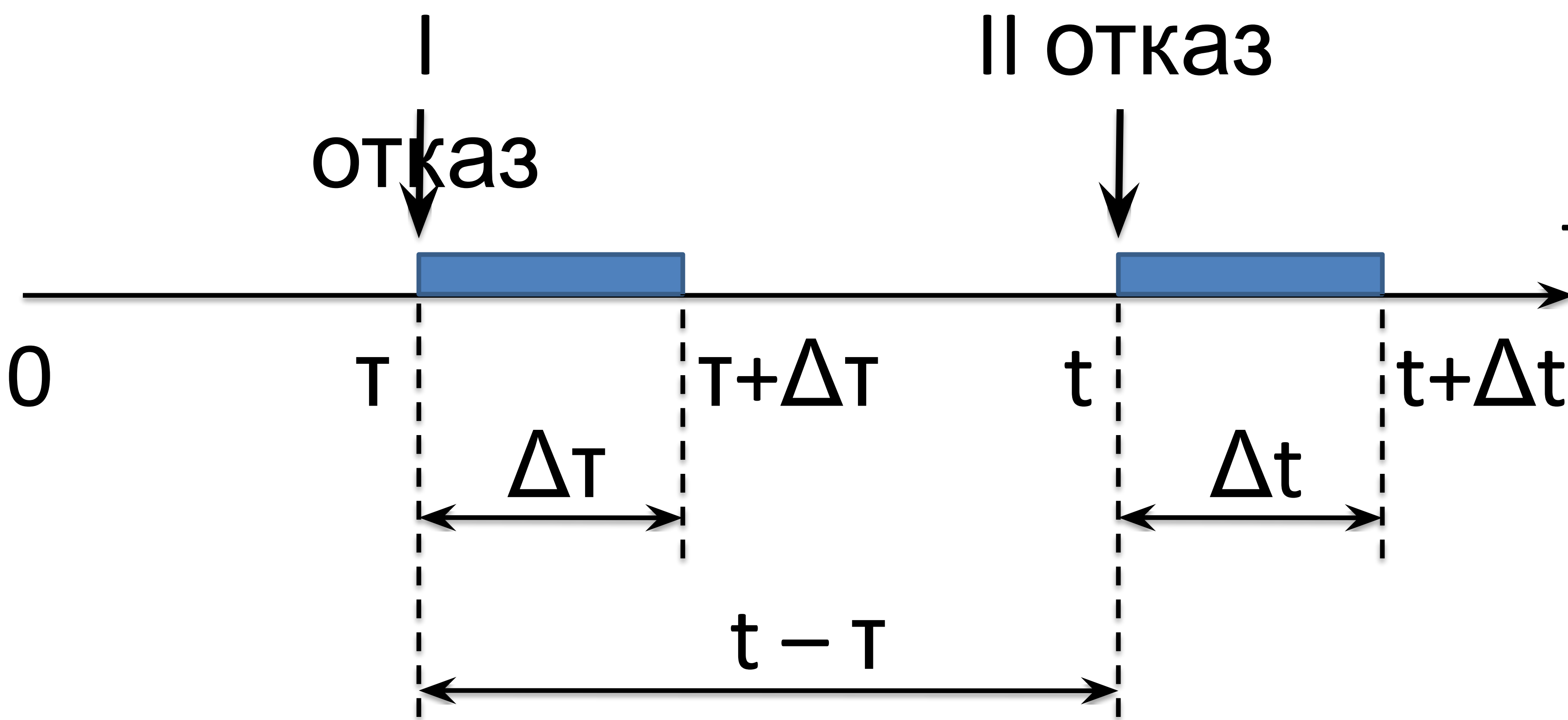


Рассмотрим плотности вероятностей времени:

- до первого отказа $f_1(t)$;
- до второго отказа $f_2(t)$;
- …
- до k-го отказа $f_k(t)$.

- Пусть первый отказ произошёл в момент τ;
- пусть второй отказ произошёл в момент t.

Рассмотрим первые 2 отказа объекта



Выведем формулу для $f_2(t)$

Наработка на второй отказ равна t – т.

Рассмотрим вероятность того, что второй отказ произойдёт на интервале (t; t + Δt):

$$\Delta f_2(t)\,\Delta t = f_1(\tau)\,\Delta\tau \cdot f_1(t-\tau)\,\Delta t$$

Разделим на Δt и проинтегрируем по т от 0 до t:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_1(t-\tau)\,d\tau$$

Обобщим этот результат на k отказов. Выведем формулу для $f_k(t)$.

$$f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(\tau) f_1(t-\tau)\, d\tau$$

Пояснение:

Дошли до (k – 1)-го отказа,

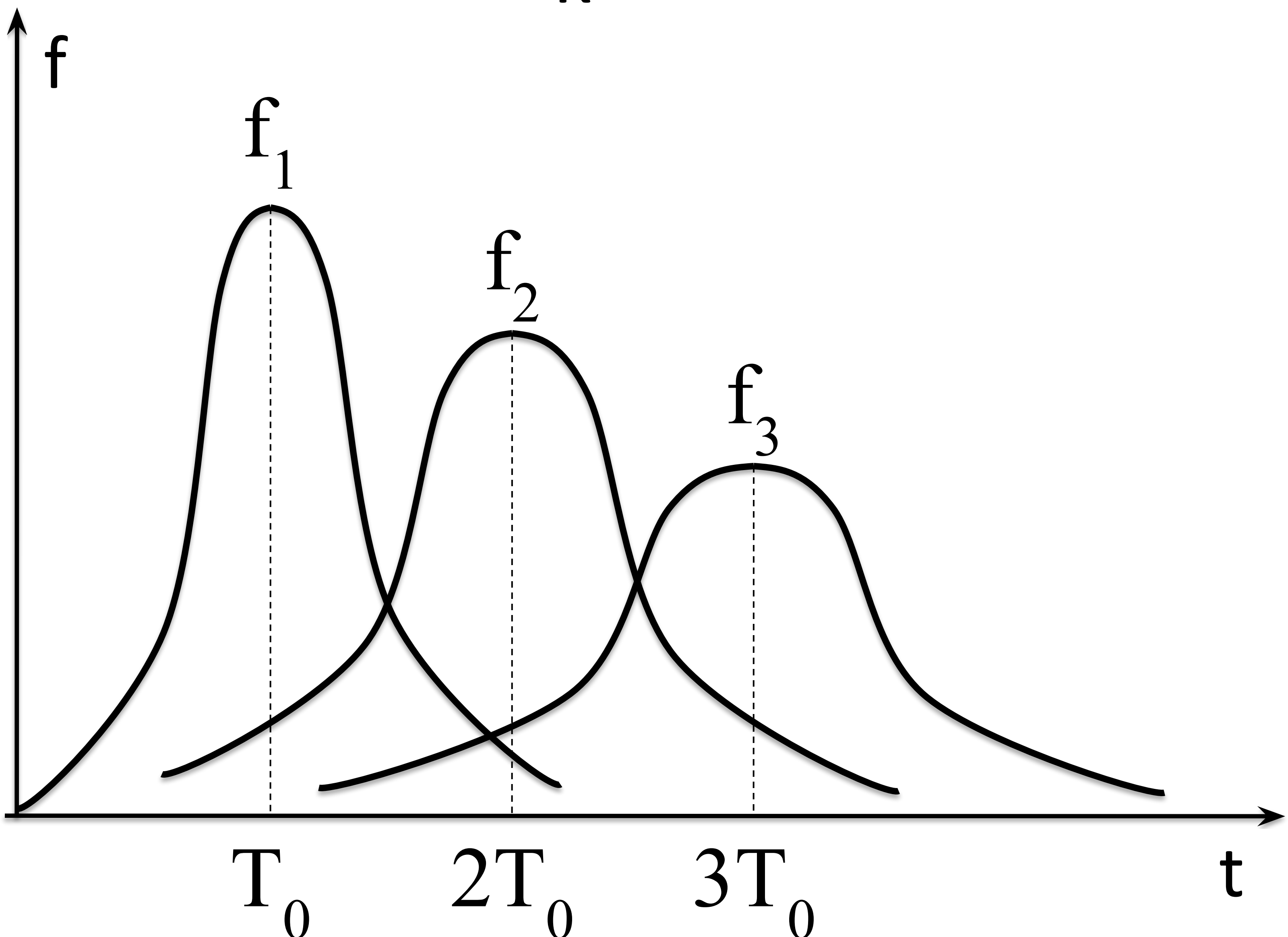
зафиксировали накопившуюся вероятность

и начали отсчёт времени с нуля.

Значит, следующий отказ будет первым =>

=> в интеграле имеется $f_1(t)$.

Построим графики $f_k(t)$ для разных k



Свойства графиков $f_k(t)$

1) Каждый график $f_k(t)$ имеет максимум в точке
   $t = kT_0$.
2) Каждый график $f_k(t)$ приблизительно симметричен относительно оси $t = kT_0$.
3) Максимальное значение функции $f_k(t)$ уменьшается с ростом k, т.к. накапливаются неопределённости по предыдущим наработкам.
4) Кривая $f_k(t)$ становится более пологой (широкой) с ростом k.

Параметр потока отказов ω(t)

Назовём сумму

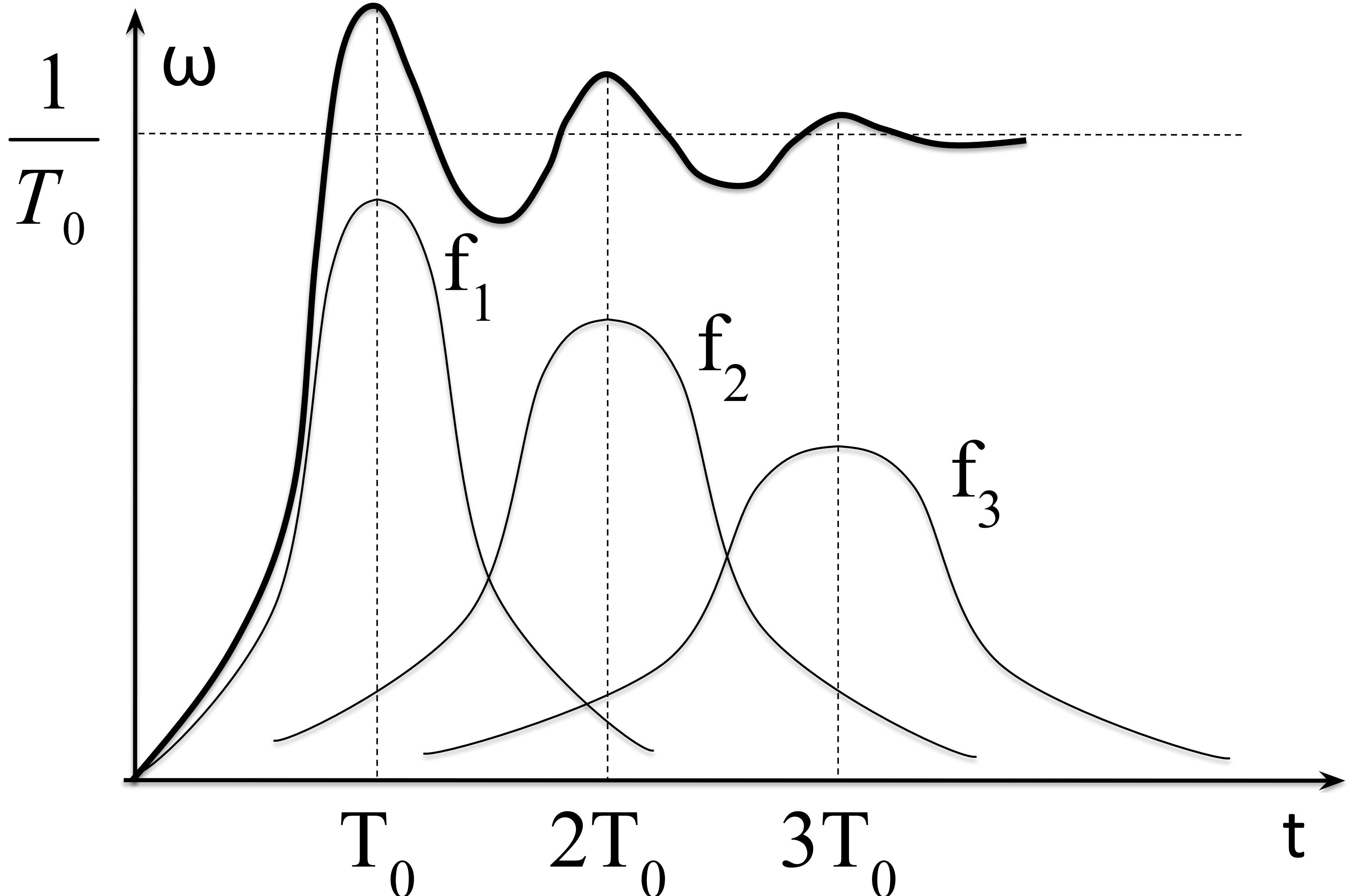
$f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_k(t) = \omega(t)$

параметром потока отказов.

По сути ω(t) – это плотность вероятности отказа.

С одной стороны функция ω(t) является локальной по времени, с другой стороны она охватывает одновременно все отказы, т.е. является глобальной по отказам.

Построим график ω(t)



Свойство графика ω(t)

1) График ω(t) имеет максимумы в точках $t = kT_0$.
2) Кривая ω(t) стабилизируется с течением времени и с ростом k на уровне $1/T_0$, т.е. процесс возникновения отказов становится стационарным, его локальные характеристики перестают зависеть от времени.

Свойства потоков отказов

Потоки отказов могут обладать свойствами:

1) Свойство **ординарности**. Вероятность совмещение 2-х и более отказов в один момент времени равна нулю.
2) Свойство **отсутствия последействия**. Числа отказов для любых неперекрывающихся интервалов времени независимы.
3) Свойство **стационарности**. Вероятность появления k отказов на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности Δt и не зависит от начала отсчёта времени.

Виды потоков отказов

- Если выполняется (1), то поток **ординарный**.
- Если выполняются (1) и (2), то поток **пуассоновский**.
- Если выполняются (1), (2), (3), то поток **простейший**.

Для простейшего потока:

$$f_1(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

$$f_2(t) = \lambda^2\, t \exp(-\lambda t)$$

$$\ldots$$

$$f_k(t) = \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda t)$$

$$\omega(t) = \lambda$$

$$T_0 = 1/\lambda$$

Для простейшего потока:

Вероятность k отказов за время t:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Вероятность безотказной работы за время t:

$$P_0(t) = \exp(-\lambda t)$$

3.3. Объекты с конечным временем восстановления

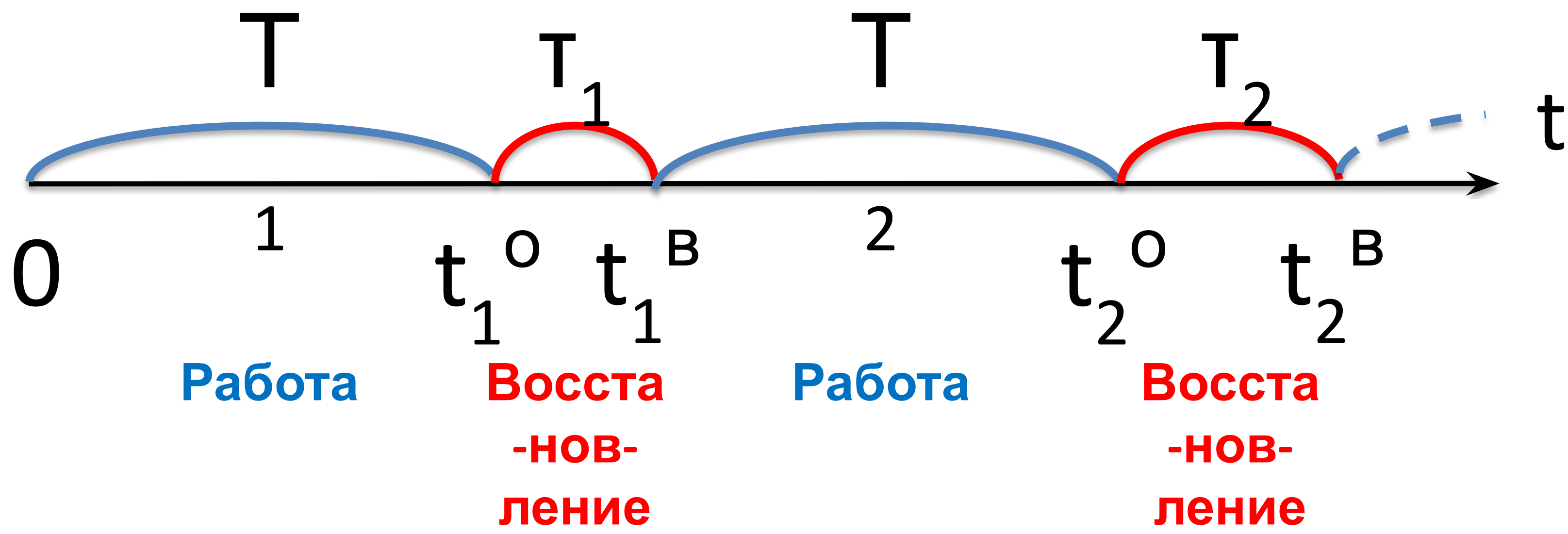
Время восстановления $\tau = t_п + t_р$

- $t_п$ – поиск неисправности;
- $t_р$ – ремонт или замена.

Пусть объект, проработав время T_1, выходит из строя и восстанавливается в течение τ_1.

Восстановленный объект через T_2 вновь отказывает, за τ_2 снова восстанавливается и т.д.

Поток отказов объекта с конечным временем восстановления



Сделаем допущения:

1) T_k, τ_k – независимые НСВ.

2) Все периоды работы T_k имеют:
- законы $F(t)$, $f(t)$;
- среднюю наработку на отказ $T = M(T_k)$;
- интенсивность отказов $\lambda = 1/T$.

3) Все периоды восстановления τ_k имеют:
- законы $G(t)$, $g(t)$;
- среднее время восстановления $\tau = M(\tau_k)$;
- интенсивность восстановлений $\mu = 1/\tau$.

4) Поток отказов и восстановлений – простейший.

Введём понятие **коэффициента готовности** Кг(t)

Кг(t) – это вероятность того, что в момент времени t объект находится в работоспособном состоянии (РСС).

Найдём зависимость Кг(t).

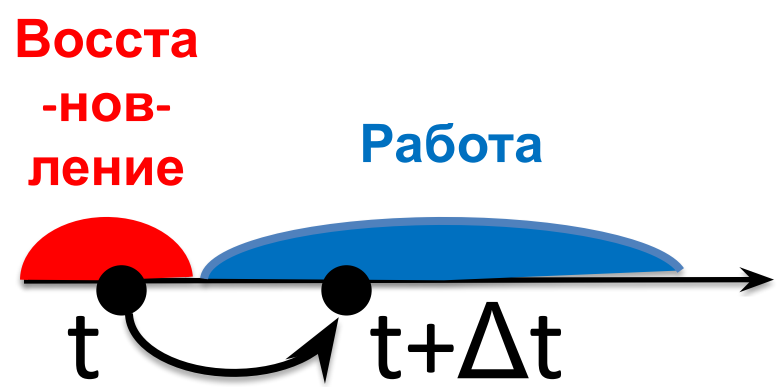
Вероятность застать объект в РСС в момент (t + Δt) зависит от его состояния в момент t и его поведения на интервале Δt.

Две гипотезы РСС объекта в момент времени t

Н1:
изначально объект работал, далее за время Δt работал безотказно

R(Δt)

Н2:
изначально объект восстанавливался (т.е. не работал), далее за время Δt успел восстановиться



G(Δt)

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)$$

$$Кг(t + \Delta t) = Кг(t)\cdot R(\Delta t) + (1 - Кг(t))\cdot G(\Delta t)$$

Вероятность РСС

Вероятность безотказной работы

Вероятность НРСС

Вероятность восстановления

В разделе 3.1 доказано, что:

$R(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t;$

$G(\Delta t) = \mu\Delta t.$

Подставим:

$$K_\text{г}(t + \Delta t) = K_\text{г}(t) - K_\text{г}(t)\lambda\Delta t + \mu\Delta t - K_\text{г}(t)\mu\Delta t$$

$$K_\text{г}(t + \Delta t) - K_\text{г}(t) = -K_\text{г}(t)(\lambda + \mu)\Delta t + \mu\Delta t.$$

$$K_\text{г}'(t) + (\lambda + \mu)K_\text{г}(t) = \mu.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$K_\text{г}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\exp(-(\mu+\lambda)t)$$

Статистически:

$$\hat{K}_{\Gamma} = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\hat{K}_{\Gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{m} T_i + (N_0 - m)t}{\sum_{i=1}^{m} T_i + \sum_{i=1}^{m} \tau_i + (N_0 - m)t}$$

Коэффициент неготовности – вероятность нахождения объекта в НРСС.

- Кнг = 1 – Кг
- Кнг(0) = 0
- Кнг(∞) = $\lambda/(\lambda+\mu)$ = т/(Т+т)
- график Кнг(t)

Коэффициент аварийного простоя – относительная длительность восстановления.

- qав = λ/μ = т/Т