Автор: Елена Юрьевна Семёнова

Метод координат в пространстве

Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

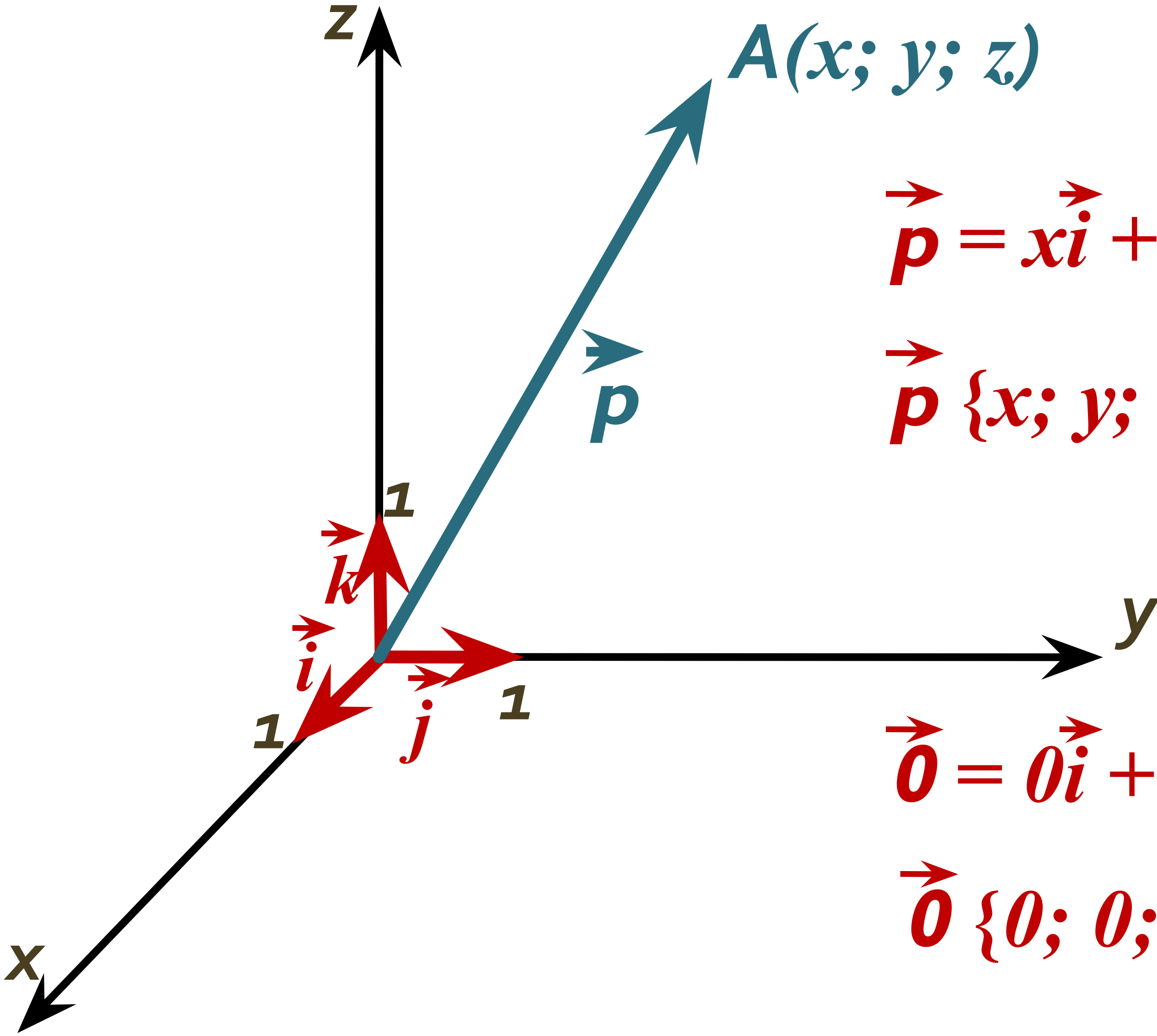
Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y, z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в данной системе координат.

Координаты вектора



$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{p}\ \{x; y; z\}$$

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{0}\ \{0; 0; 0\}$$

Действия над векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$$

Действия над векторами

$$\vec{a}\,\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$$

3. ***Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.***

$$k\vec{a}\,\{\,kx_1;\, ky_1\,;\, kz_1\}$$

Примеры

Дано: $\vec{a}\,\{3; -7; 2\}$ $\vec{b}\,\{-5; 4; 1\}$

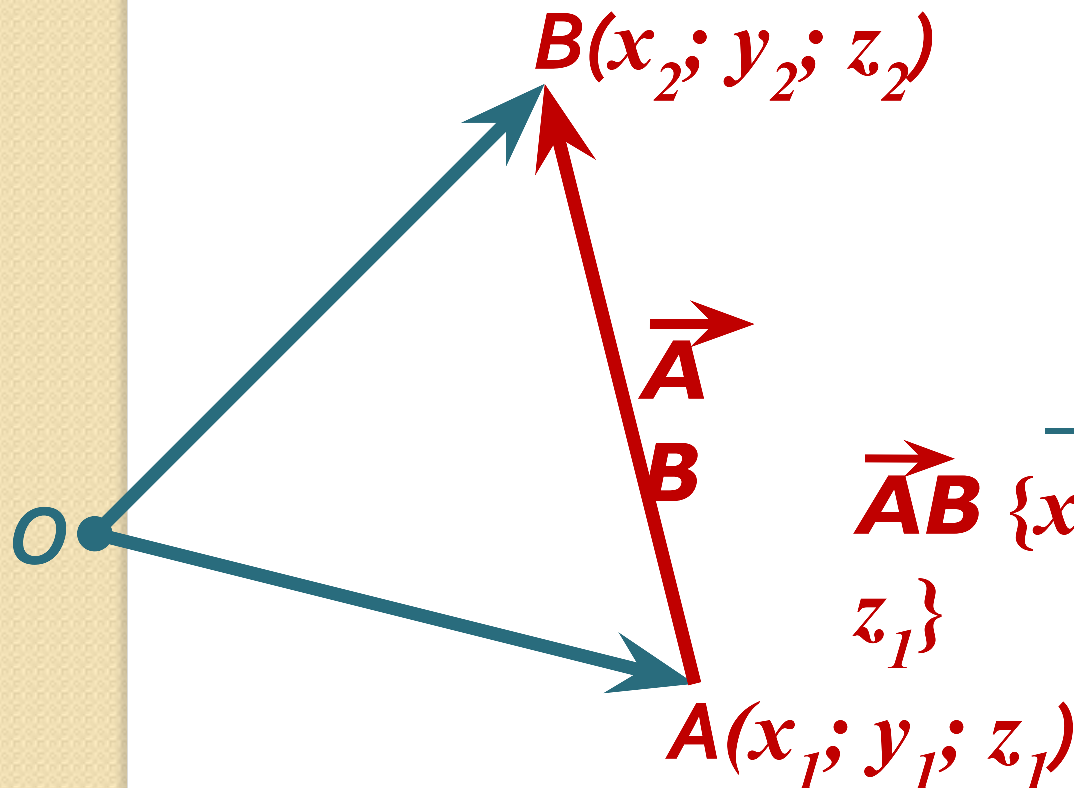
Найти: $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ $\vec{q} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$

Решение:

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\vec{a}\,\{9; -21; 6\} \\
+ & -2\vec{b}\,\{10; -8; -2\} \\
\hline
 & \vec{p}\,\{19; -29; 4\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & -5\vec{a}\,\{-15; 35; -10\} \\
+ & 6\vec{b}\,\{-30; 24; 6\} \\
\hline
 & \vec{q}\,\{-45; 59; -4\}
\end{array}
$$

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



$$-\begin{array}{l} \vec{OB}\,\{x_2; y_2; z_2\} \\ \vec{OA}\,\{x_1; y_1; z_1\} \end{array}$$

$$\vec{AB}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Примеры

$A(5; 3; -4)$, $B(-2; 4; 1)$

$\overrightarrow{AB}\ \{-2 - 5;\ 4 - 3;\ 1 - (-4)\}$

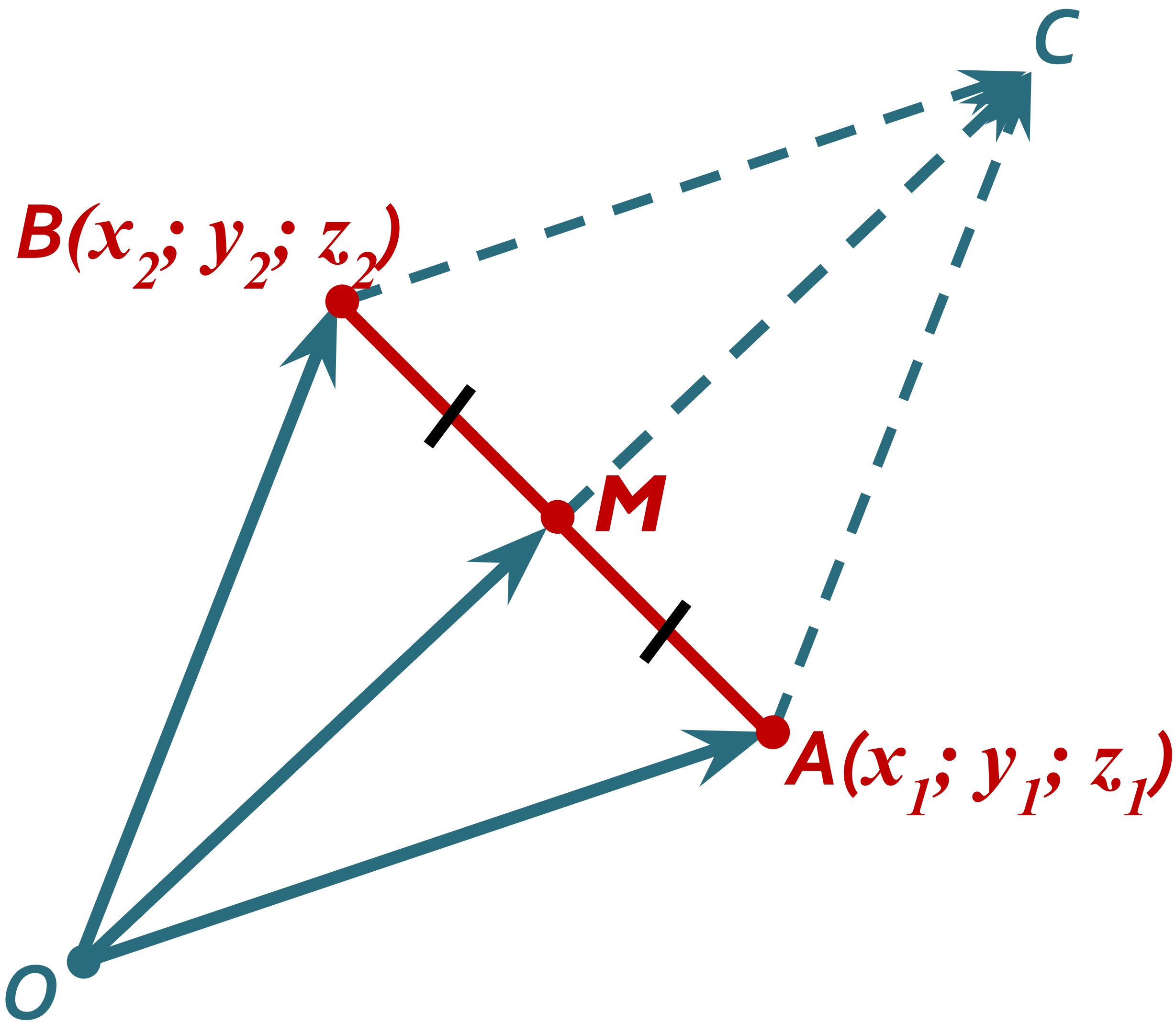
$\overrightarrow{AB}\ \{-7;\ 1;\ 5\}$

$M(-3; 8; 2)$, $N(0; -6; 5)$

$\overrightarrow{MN}\ \{0 - (-3);\ -6 - 8;\ 5 - 2\}$

$\overrightarrow{MN}\ \{3;\ -14;\ 3\}$

Координаты середины отрезка

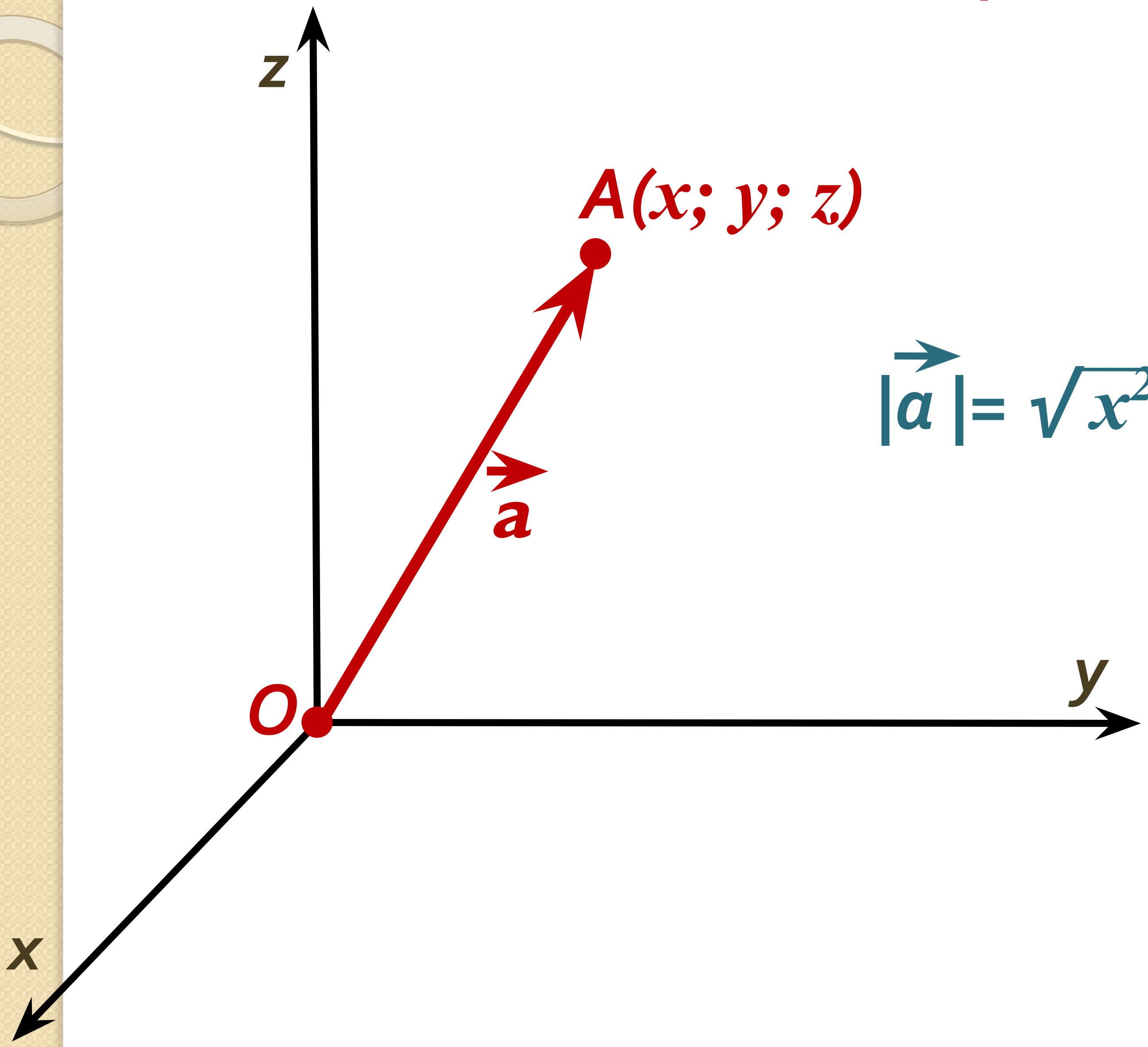


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Длина вектора

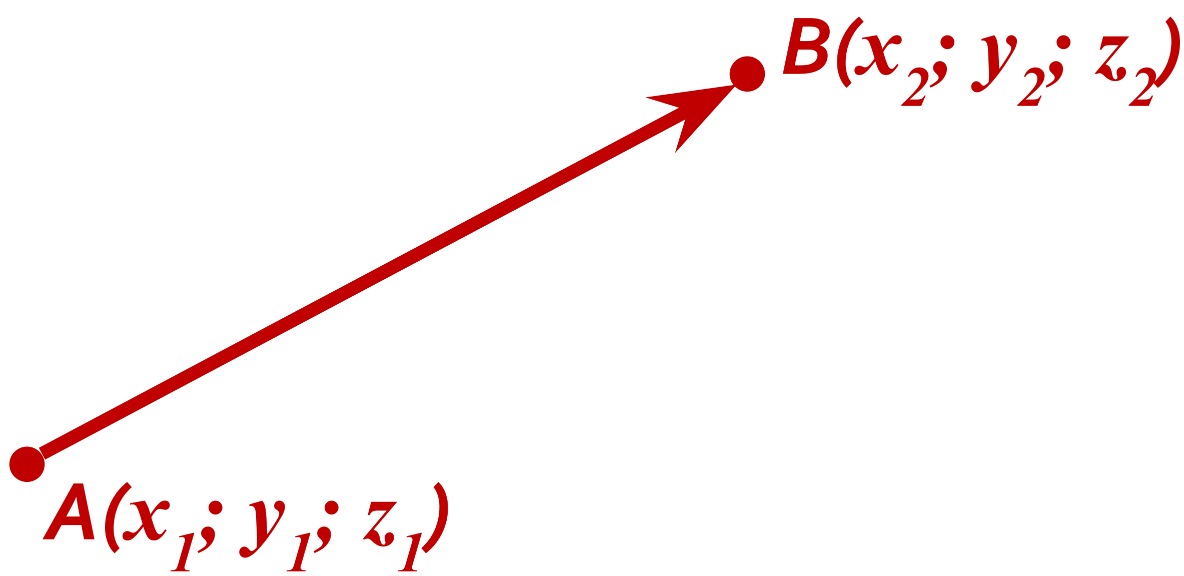


$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

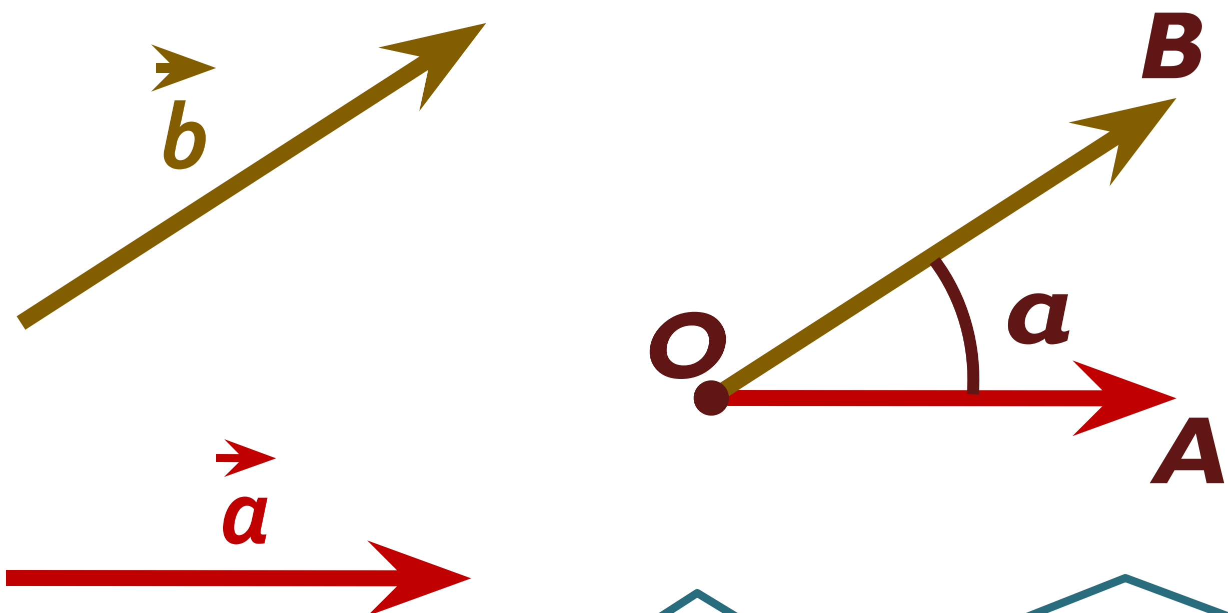
Расстояние между двумя точками

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Угол между векторами



$$\widehat{(\vec{a};\ \vec{b})} = \widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} = \alpha$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов **равно нулю** тогда и только тогда, когда эти **векторы перпендикулярны**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярный квадрат вектора **(т.е. скалярное произведение вектора на себя)** **равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Скалярное произведение векторов

Косинус угла α между ненулевыми векторами

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1. $\vec{a}^{\,2} \geq 0$, причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.

2. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (переместительный закон).

3. $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон).

4. $k(\vec{a}\,\vec{b}) = (k\vec{a})\,\vec{b}$ (сочетательный закон).

Угол между прямыми

Пусть $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ – *направляющие векторы прямых a и b. Косинус угла φ вычисляется по формуле:*

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА