Кафедра медицинской и биологической физики

Тема: Системы линейных уравнений.

лекция № 3 для студентов 1 курса, обучающихся по специальности 030401– Клиническая психология

к.п.н., доцент Шилина Н.Г.

Красноярск, 2015

План лекции

- Системы линейных алгебраических уравнений.
- Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса
- Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Значение темы

- Системы линейных уравнений используются для функционирования систем массового обслуживания (консультаций, поликлиник), при решении оптимизационных задач.

Какие уравнения называют линейными?

В линейные уравнения неизвестные переменные входят с показателями степеней, равными 1.

$$2x+3=0$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2+4=0$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=3\\ x-y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\ x-3y=2\end{cases}$$

Как решают линейные уравнения: «школьный вариант»

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Решить систему уравнений – это значит найти такие значения переменных, которые обращают **КАЖДОЕ** уравнение системы в верное равенство.

Последовательность действий при решении системы линейных уравнений:

Из первого уравнения выразим $y = 3 - x$

Подставляем значение y во второе уравнение:

$2x + (3 - x) = 5;$

Ищем решение этого линейного уравнения с одним неизвестным:

$2x + 3 - x = 5$, отсюда $x = 2$;

Подставляем значение x: $y = 3 – x = 3 – 2 = 1$

Возможные варианты решений

1. Единственное решение (предыдущий пример)

2. Решений нет

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 1 - x$$

$$x + 1 - x = 0$$

$$1 = 0$$

3. Решений бесконечно много

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$y = 1 - x$$

$$2x + 2(1 - x) = 2$$

$$2x + 2 - 2x = 2$$

$$0 = 0$$

Система из *n* линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

неоднородная система линейных уравнений

Метод Гаусса

Рассмотрим на простейшем примере суть метода Гаусса решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Возьмем первое из уравнений системы без изменений, а второе уравнение изменим следующим образом:

Умножим первое уравнение на -2 и сложим почленно со вторым уравнением. Получим измененную систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 3 \\ \quad -\boldsymbol{y} = -1 \end{cases}$$

Из последнего уравнения сразу следует, что ***y=1***. Подставим значение y=1 в первое уравнение и получим значение ***x = 2***.

Метод Гаусса

Рассмотрим на простейшем примере решения системы трех уравнений с тремя неизвестными самый простой и употребительный способ решения систем линейных уравнений – **метод Гаусса**.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \end{cases}$$

Для начала исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого мы должны вычесть из второго уравнения первое, умноженное на 4, а к третьему прибавить первое, умноженное на 5.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -3x_2 + 17x_3 = -8 \\ 9x_2 - 25x_3 = -2 \end{cases}$$

На втором шаге исключения мы не трогаем первое уравнение. Другие два уравнения содержат два неизвестных x_2 и x_3 и к ним можно применить ту же процедуру исключения. Для этого к третьему уравнению прибавляем второе, умноженное на 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 3x_2 + 17x_3 = -8 \\ 26x_3 = -26 \end{cases}$$

Далее из третьего уравнения находим $x_3 = -1$, подставляем это значение во второе уравнение, получаем $x_2 = -3$ и наконец, из первого уравнения получаем $x_1 = 2$. Этот процесс называется простой подстановкой.

Таким образом, процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса состоит из двух этапов.

1. Первый этап (прямой ход метода) – система приводится к треугольному виду.
2. Второй этап (обратный ход) – неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего неизвестного и кончая первым.

Аналогично, эту идею последовательного исключения можно применить и в случае системы любого размера.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1ж}x_ж = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2ж}x_ж = b_2 \\ \ldots \\ a_{ж1}x_1 + \quad + \quad + a_{жж}x_ж = b_ж \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать, что в нашей системе коэффициент $a_{11} \neq 0$ (иначе просто переставим уравнение).

На первом шаге мы просто исключим x_1 из всех уравнений, начиная со второго, для чего из второго уравнения почленно вычтем первое, умноженное на a_{21}/a_{11}, из третьего почленно вычтем первое, помноженное на a_{31}/a_{11} и т.д.. Тогда система заменится эквивалентной системой:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \quad + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ \dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \quad + a_{mm}^{(1)}x_m = b_m^{(1)} \end{cases}$$

Продолжая этот процесс и дальше, на (m-1)-ом шаге приведем исходную систему к треугольной системе.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)}x_m = b_3^{(2)} \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mm}^{(m-1)}x_m = b_m^{(m-1)} \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3m}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

На этом прямой ход метода Гаусса заканчивается

Второй этап – обратный ход, заключается в решении треугольной системы.

Из последнего уравнения находим $\boldsymbol{x_m}$. По найденному $\boldsymbol{x_m}$ из ***(m-1)*** уравнения находим $\boldsymbol{x_{m-1}}$. Затем по $\boldsymbol{x_{m-1}}$ и $\boldsymbol{x_m}$ из (***m-2***) уравнения находим $\boldsymbol{x_{m-2}}$. Процесс продолжаем, пока не найдем $\boldsymbol{x_1}$ из первого уравнения.

Если у нас число уравнений меньше числа неизвестных, то мы придем не к треугольной системе, а к ступенчатой.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + a_{km}^{(k-1)}x_m = b_k^{(k-1)} \end{cases}$$

В таком случае в каждом уравнении системы перенесем все члены с неизвестными $\boldsymbol{x_{k+1},\ldots,x_m}$ в правую часть.
Придавая неизвестным $\boldsymbol{x_{k+1},\ldots,x_m}$ (называемым свободными) произвольные значения, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные (называемые базисными).
Так как произвольные значения можно придавать любыми способами, система будет иметь бесчисленное множество значений.

Если при прохождении первого этапа метода Гаусса мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это указывает на то, что уравнение не удовлетворяется никакими значениями неизвестных, то есть полученная система несовместна. Значит, несовместной является и исходная система.

В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $\boldsymbol{x_n = b_n}$, затем $\boldsymbol{x_{n-1}}$ и так далее, то есть система является совместной и определенной.

Если же мы получим ступенчатую систему, то часть неизвестных будут свободными и мы будем придавать им произвольные значения. Такая система является совместной и неопределенной.

Итак, ответ на вопрос о совместности системы может быть дан лишь в конце вычислений, либо этот ответ может дать теорема Кронекера - Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли:

для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу ее расширенной матрицы.

Матрица системы *– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных.* ***Расширенная матрица системы*** *– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов*

$$r(A)=r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}=r(B)$$

Если ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы равны числу неизвестных, ***r(A) = r(B) = n***, то исходная система имеет единственное решение. Если же ***r(A) = r(B) < n*** , то система имеет бесчисленное множество решений.

Матричная форма записи системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Метод Крамера

Система линейных алгебраических уравнений, записанная в виде ***Ax = b***, является *матричным уравнением*.
Если матрица системы *невырождена*, то у нее существует обратная матрица и тогда решение системы ***Ax = b*** дается формулой:
$X = A^{-1} b$.

<u>Формула Крамера.</u>
Если определитель ***D=det A*** матрицы системы ***Ax=b*** отличен от нуля, то система имеет единственное решение x_1, x_2, ..., x_n, определяемое *формулами Крамера*
$x_i = D_i / D$, $i=1,2, \ldots, n$,
где D_i - определитель матрицы ***n*** -го порядка, полученной из матрицы ***A*** системы заменой **i** -го столбца столбцом правых частей **b**.

Решим первую систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{D} = \det \boldsymbol{A} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{D} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \boldsymbol{D}_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \boldsymbol{D}_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{D} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \boldsymbol{D}_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \boldsymbol{D}_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Метод Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Тогда главный определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если D=0, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя.

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

Ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Если в уравнении отсутствуют переменные, то на их месте в главном определителе ставится 0.

Пример

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-9+20) + 4 \cdot (-9-40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- **Обязательная:**
- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.
- Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных/А.Д. Наследов.- СПб.: Речь, 2008.
- **Дополнительная:**
- Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др. – М.: ИНФРА–М, 2011. –373 с.
- Болдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика /К.В. Болдин К, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, 2010
- **Электронные ресурсы:**
- УБИЦ КрасГМУ Портал центра дистанционного образования Электронная библиотека
- Ресурсы интернет

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ