

Тема 4:

Основы оптимальной обработки сигналов.
Оптимальная оценка параметра сигнала.

Основные понятия

Оптимальный приёмник – устройство обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из сигнала, принимаемого в смеси с аддитивной шумовой помехой

Шумовая помеха – нормальный белый шум

Синтез оптимального приёмника – нахождение структуры и параметров устройства обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из определённого типа сигнала

Критерий оптимальности приёмника – правило, которое определяет, какой способ выделения полезной информации считается наилучшим

Примеры:

- критерий минимума СКО
- критерий максимума апостериорной вероятности

Задачи, решаемые в теории оптимального приёма сигналов

- изучаются в курсе
1. Обнаружение сигнала на фоне помех
 2. Различение двух или нескольких сигналов на фоне помех
 3. Оценка одного или нескольких параметров сигнала, принимаемого в смеси с помехами
 4. Фильтрация (выделение) сигнала из смеси с помехами

(Задачи 1 и 2 – частный случай задачи 3)

10.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

Априорная и апостериорная вероятности

a priori – «из предыдущего» (до «опыта»)

a posteriori – «из последующего» (после «опыта»)

Принимаемая смесь сигнала и шума: $y(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$

До начала обработки известно (априорная информация):

- вид сигнала
- распределение вероятностей шума
- априорное распределение вероятностей параметра λ

Обрабатываются N отсчётов принятого колебания: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) = \mathbf{s}_{\lambda} + \mathbf{n}$

или
реализация $y(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$

Формула полной вероятности

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Совместная плотность
вероятности

отсчётов и параметра λ

$$w(\lambda, \underline{y}) = w(\lambda | \underline{y}) \cdot w(\underline{y}) \Rightarrow w(\lambda | \underline{y}) \cdot w(\underline{y}) = w(\underline{y} | \lambda) \cdot w(\lambda)$$

$$= w(\underline{y} | \lambda) \cdot w(\lambda)$$

$w(\underline{y} | \lambda) = L(\lambda)$ – условная плотность вероятности отсчётов $\underline{y}$ при условии, что параметр равен λ (функция

правдоподобия)
 $w(\lambda) = w_{pr}(\lambda)$ – априорная плотность вероятности

параметра λ
 $w(\lambda | \underline{y}) = w_{ps}(\lambda)$ – апостериорная плотность вероятности параметра λ при условии, что приняты отсчёты

$w(\underline{y})$ – плотность вероятности отсчётов

Формула Байеса. Функция правдоподобия

$$w_{ps}(\lambda) = \frac{1}{w(\mathbf{y})} L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda)$$

Функция правдоподобия $L(\lambda) = w(\mathbf{y} | \lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$ – условная плотность вероятности отсчётов принятой смеси сигнала и шума, **рассматриваемая как функция параметра λ**

Функция правдоподобия параметра сигнала, принимаемого на фоне нормального белого шума

1-й шаг - находим функцию правдоподобия при следующих условиях:

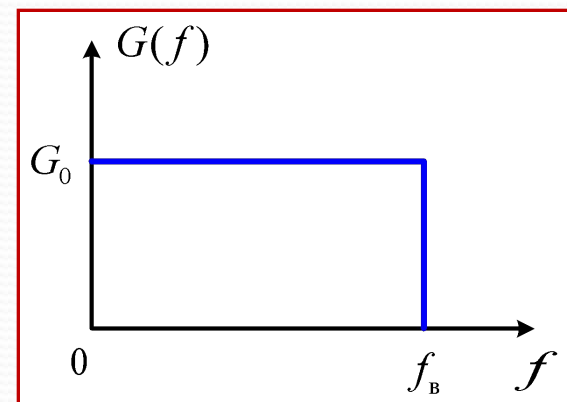
а) спектр шума ограничен частотой f_B ,

дисперсия шума $\sigma^2 = G_B f$

б) отсчёты $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ берутся

с частотой $f_d = 2f_B$ (по теореме Котельникова)

Получаем $L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$



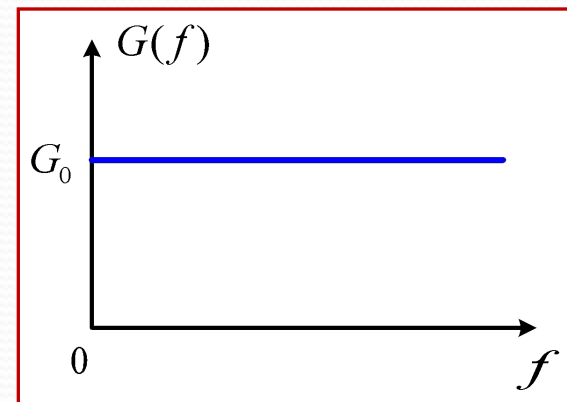
2-й шаг - переходим к пределу:

$f_B \rightarrow \infty \Rightarrow$ белый шум, дисперсия шума

$f_d \rightarrow \infty$ непрерывное колебание

$\sigma^2 \rightarrow \infty$

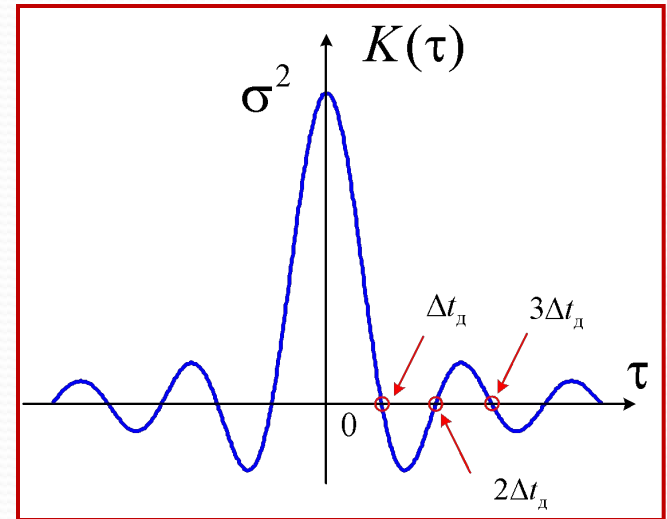
Получаем $L(\lambda) = w(y(t) | \lambda)$



Функция правдоподобия при ограниченной частоте f_B

АКФ шума

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau \, df = G_0 \int_0^{f_B} \cos 2\pi f \tau \, df = \\ &= G_0 f \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau} = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau} \end{aligned}$$



Отсчёты шума, взятые с интервалом дискретизации $\Delta t_d = 1/f_d = \frac{1}{2f_B}$,
– некоррелированы и **статистически независимы** (т.к. имеют нормальное распределение)

$$L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda) = w(y_1 | \lambda) w(y_2 | \lambda) \dots w(y_N | \lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda)$$

Функция правдоподобия при ограниченной частоте f_B

Нормальное распределение вероятностей отсчётов:

$$w(y_i | \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}}$$

отсчёт сигнала $(y_i - s_{\lambda i})$ —

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \right)$$

Дисперсия шума $\sigma^2 = G_{\theta} f$, следовательно

$$L(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_{\theta} f}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2G_{\theta} f} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_{\theta} f}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right)$$

$\frac{1}{2f_B} = \Delta t_{\text{д}}$

Функция правдоподобия при $f_B \rightarrow \infty$

$$L(\lambda) = \lim_{f_B \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_B f}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda_i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) \right\} = \lim_{\substack{f_B \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_B f}} \right)^N \cdot \lim_{\Delta t_{\text{д}} \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda_i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{неопре-} \\ \text{делённость}}}{0^\infty} \cdot \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{от } \lambda \text{ не} \\ \text{зависит}}}{c_2} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right) = c_2 \exp(k(\lambda))$$

Аргумент экспоненты: $k(\lambda) = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y^2(t) - 2y(t)s_\lambda(t) + s_\lambda(t)^2] dt =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{G_0} \int_0^T y^2(t) dt}_{\substack{\text{от } \lambda \text{ не зависит}}} + \underbrace{\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_\lambda(t) dt}_{\substack{\text{корреляционный} \\ \text{интеграл}}} - \underbrace{\frac{1}{G_0} \int_0^T s_\lambda(t)^2 dt}_{\substack{\text{энергия} \\ \text{сигнала}}} = c_3 + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0}$$

$$L(\lambda) = c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}}$$

Апостериорная плотность вероятности параметра

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = c_1 c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} \cdot w_{pr}(\lambda) = C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} w_{pr}(\lambda)$$

Оценка параметра по критерию максимума апостериорной вероятности:

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmax}_{\lambda} w_{ps}(\lambda) = \operatorname{argmax}_{\lambda} \ln w_{ps}(\lambda)$$

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln \left(C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} w_{pr}(\lambda) \right) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T x(t) \cos(\lambda t) dt$$

критерий корреляции

$$E_c(\lambda) = \int_0^T x^2(t) \cos^2(\lambda t) dt$$

энергия сигнала