

Функции и их свойства

Выполнила:
преподаватель математики
КрИЖТ
Чеботарева Н.А.

Функция — одно из важнейших математических понятий.

Функцией называют такую зависимость переменной Y от переменной X , при которой каждому значению переменной X соответствует единственное значение переменной Y .

- Переменную X называют независимой переменной или аргументом.
- Переменную Y называют зависимой переменной.
- Говорят, что переменная Y является функцией от переменной X .
- Значения зависимой переменной называют значениями функции.

- Если зависимость переменной Y от переменной X является функцией, то коротко это записывают так: $y=f(x)$.
- Символом $f(x)$ обозначают значение функции, соответствующее значению аргумента, равному X .

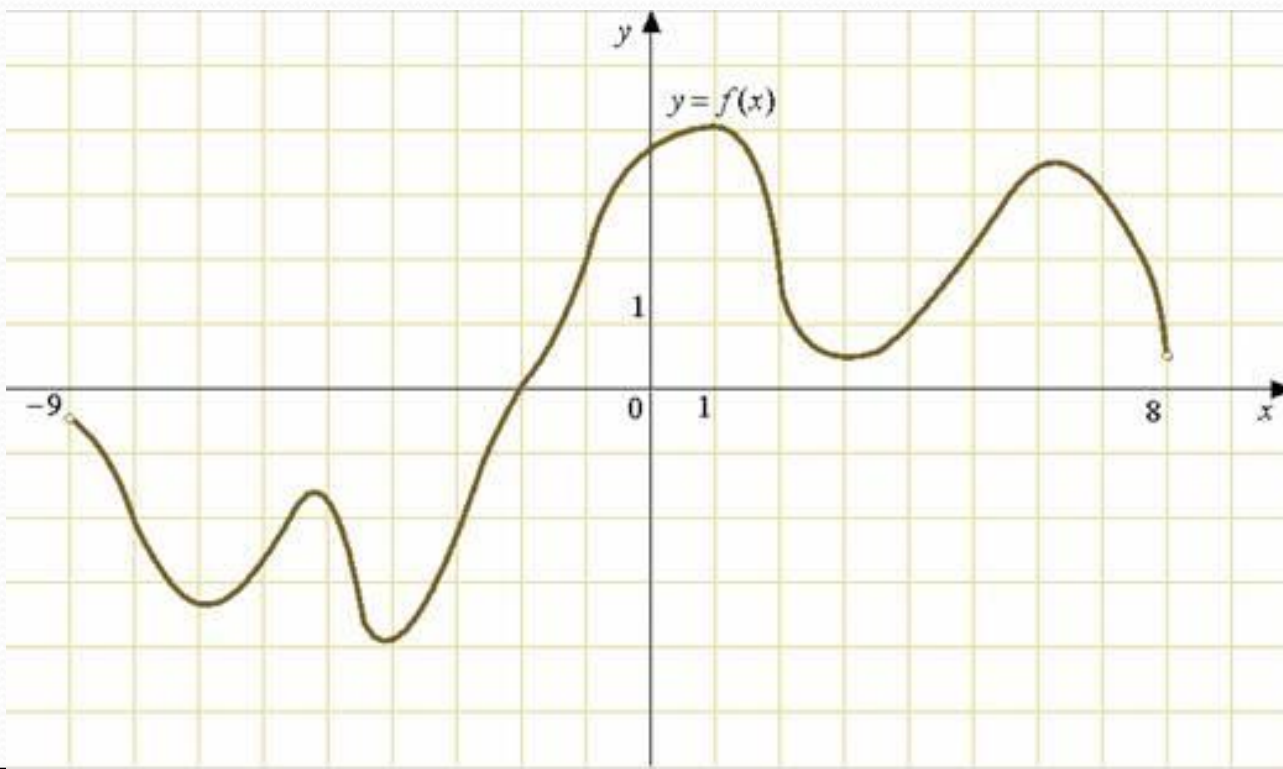
- Все значения независимой переменной образуют **область определения функции**. $D(f)$ (по переменной x)
- Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют **область значений функции**. $E(f)$ (по переменной y)

- Если функция задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Способы задания функции:

- 1. аналитический способ (функция задается с помощью математической формулы);
- 2. табличный способ (функция задается с помощью таблицы);
- 3. описательный способ (функция задается словесным описанием);
- 4. графический способ (функция задается с помощью графика).

- **Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

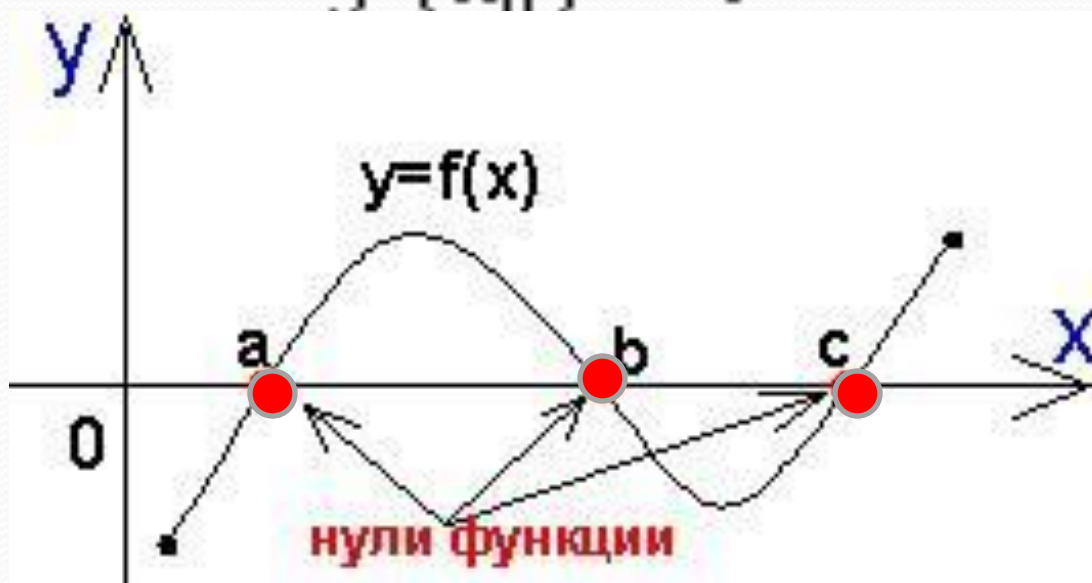


ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1. Нули функции

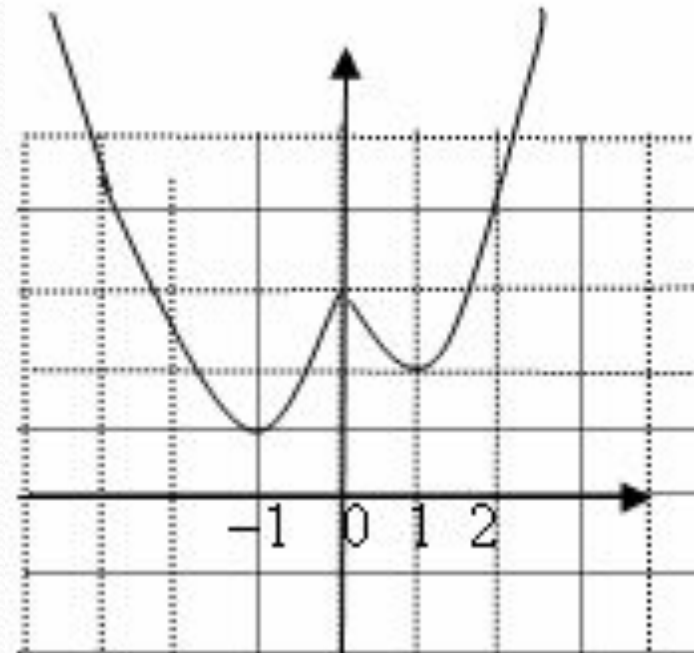
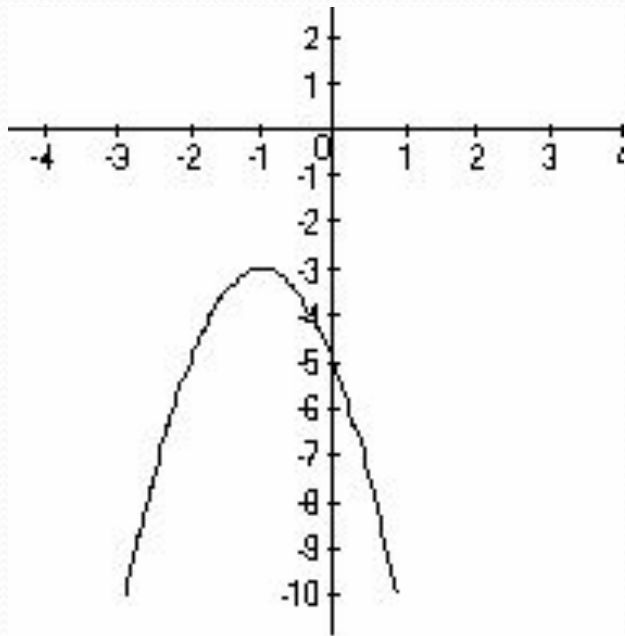
Ноль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю .

$$f(x_0) = 0$$



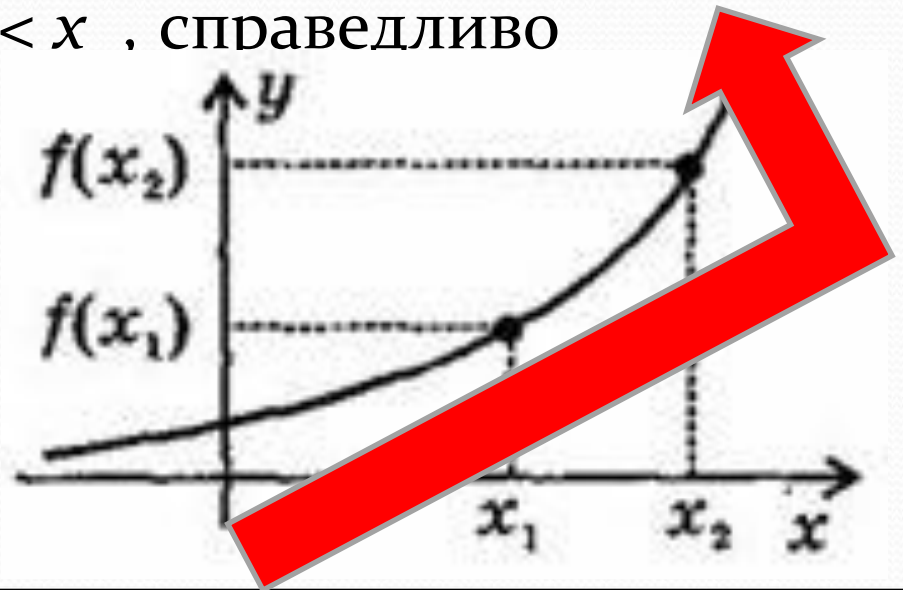
2. Промежутки знакопостоянства функции

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.



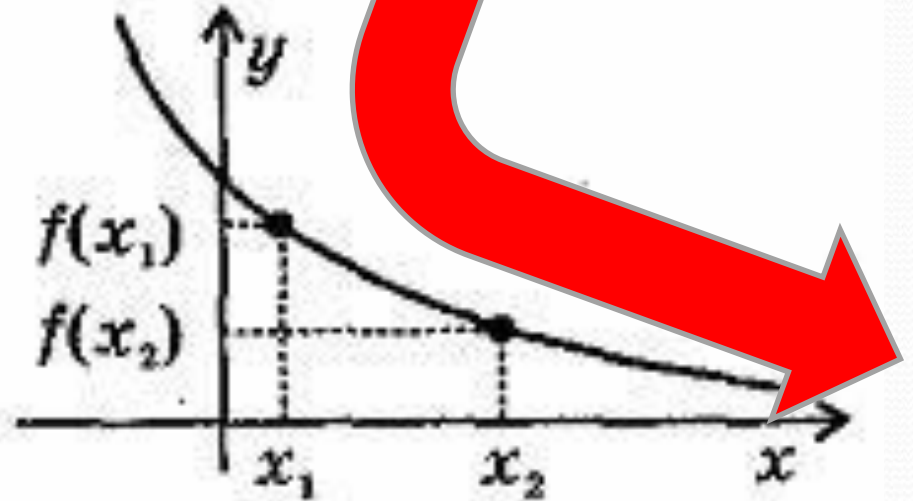
3. *Возрастание функции.*

- Возрастающая в некотором промежутке функция - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
- Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



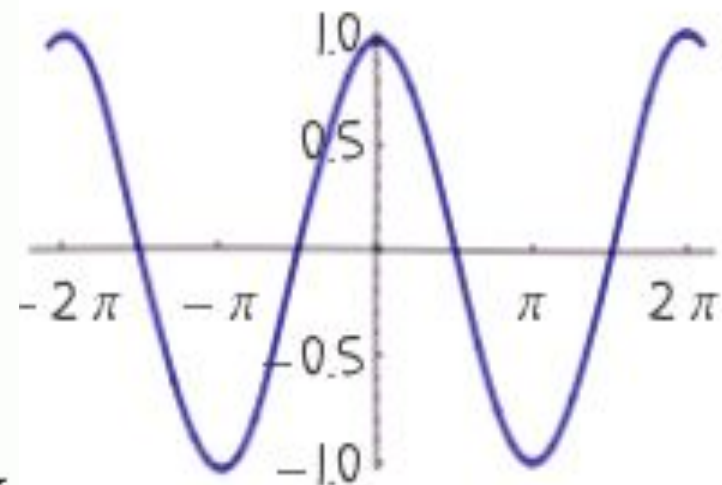
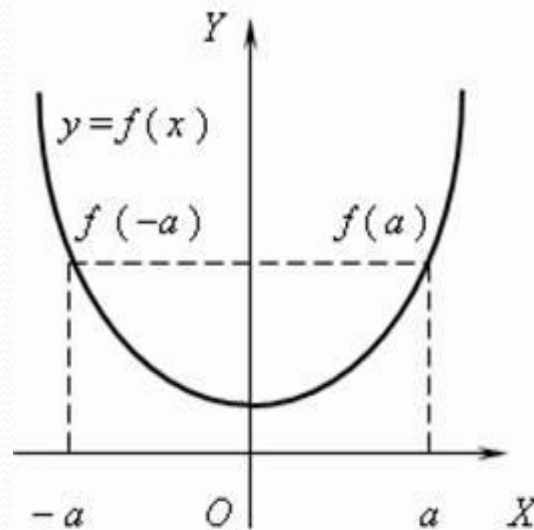
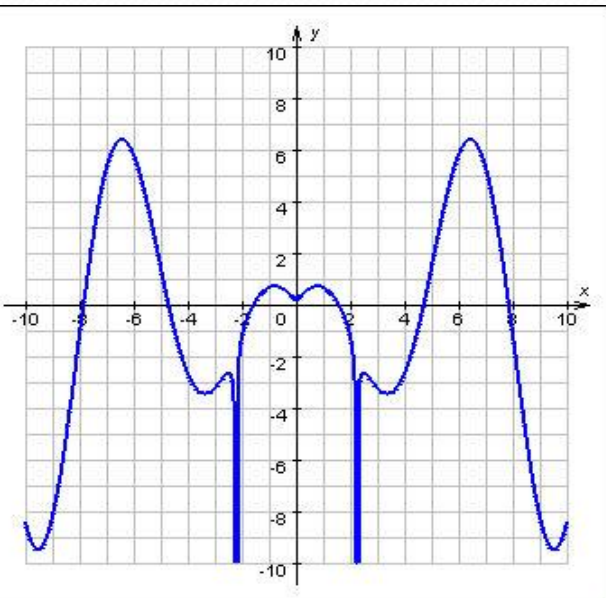
3. Убывание функции.

- Убывающая в некотором промежутке функция - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.
- Функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



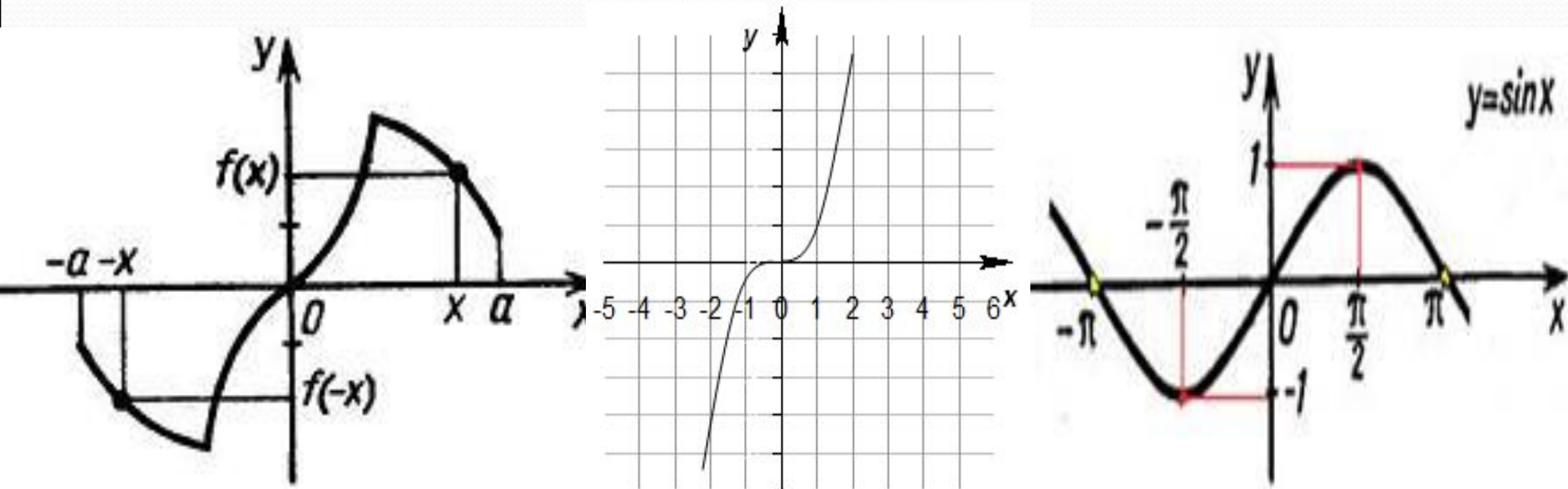
4. Четность функции

- Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.
- График четной функции симметричен относительно оси ординат.
- Например, $y = x^2$ - четная функция.



Нечетность функции

- **Нечетная функция** - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.
- График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
- *Например: $y = x^3$ - нечетная функция.*



Определение четности функции

$f(-x)=f(x)$ - четная

$f(-x)=-f(x)$ - нечетная

Например:

$$f(x) = x^2 ; f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

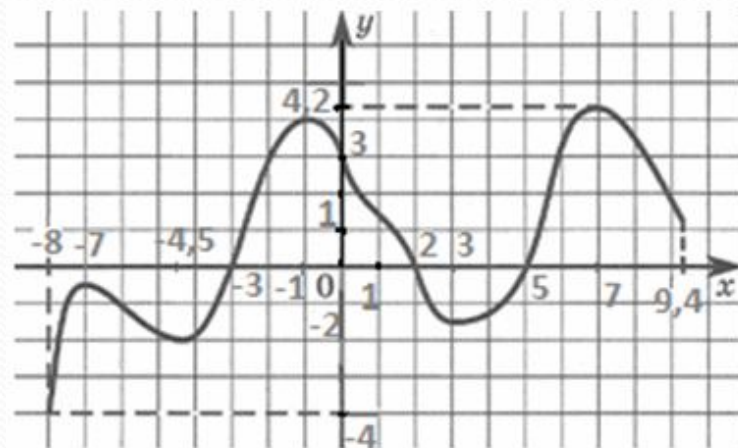
Например:

$$f(x) = x^3 ; f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

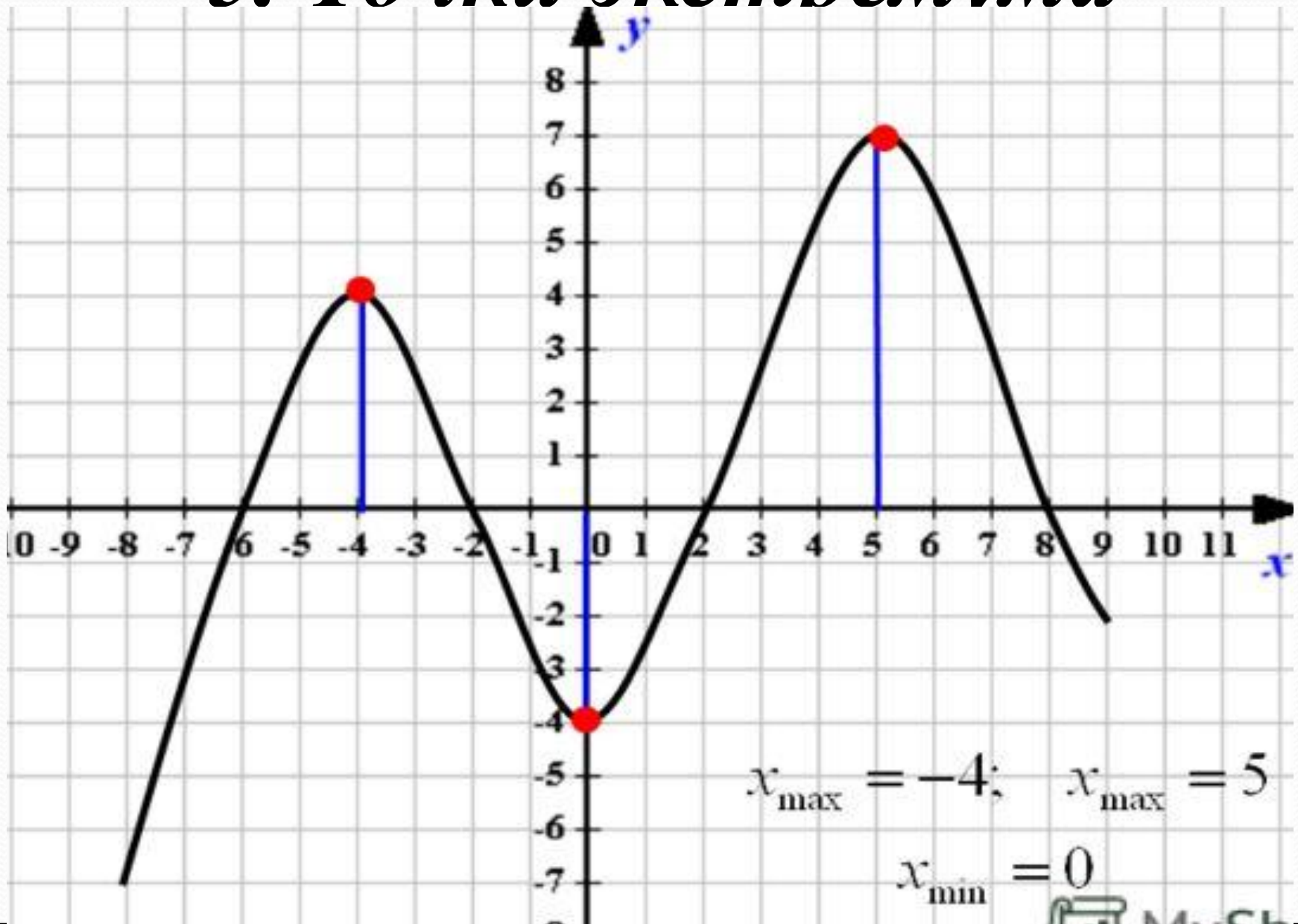
- если ни то, ни другое, то не четная и не нечетная

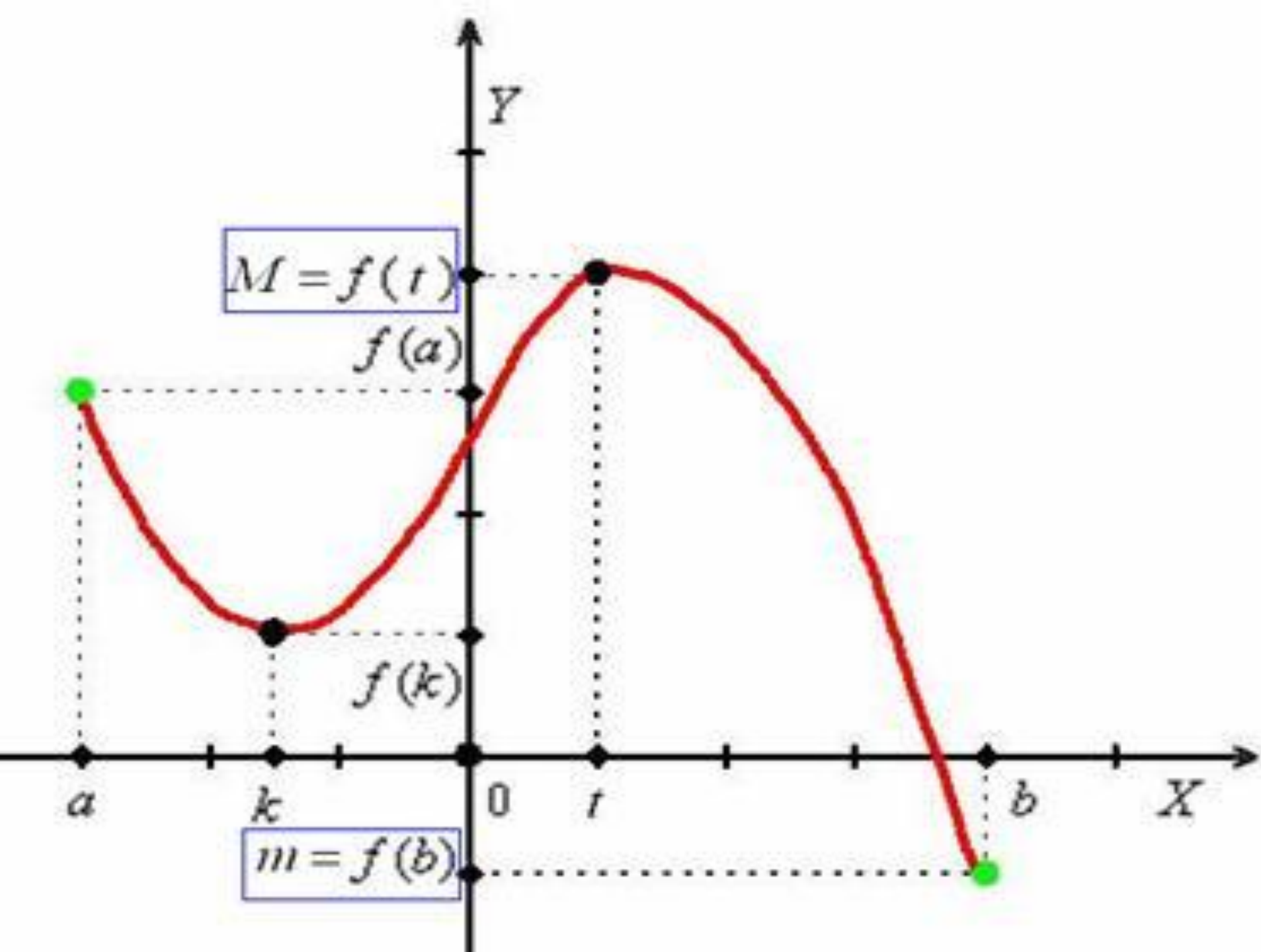
Например:

$$f(x) = x^2 + x ; f(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x$$



5. Точки экстремума





7. Ограниченность функции

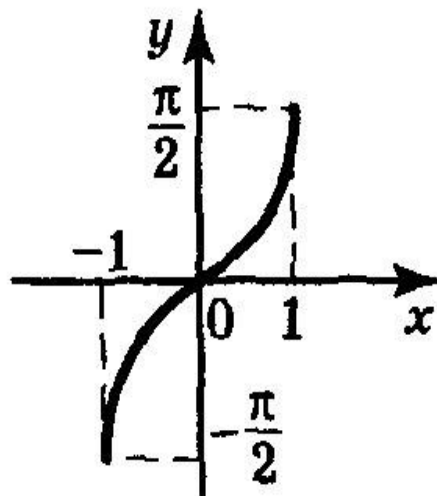
- Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X , называется **ограниченной сверху**, если множество её значений ограничено сверху.
- Иначе говоря, функция f ограничена сверху, если существует $x \in X$ постоянная M , что для к $f(x) \leq M$ неравенство

- Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X , называется *ограниченной снизу*, если множество её значений ограничено снизу, то есть если существует такая постоянная M , что для $x \in X$ каждого выполняется неравенство $f(x) \geq M$

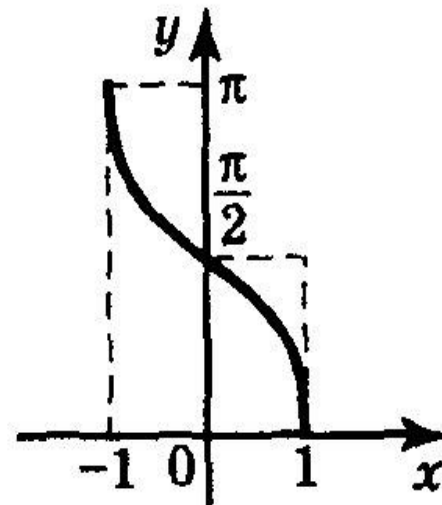
Например, таковыми являются показательные функции, функции $y=x^{2n}$, $y=\sqrt{x}$.

- Функция $f(x)$ называется значений 0
- Примерами числовой p
- $y = \sin x$,
- $y = \cos x$,
- $y = \arccos x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctg x$,
- $y = \text{arcctg } x$.

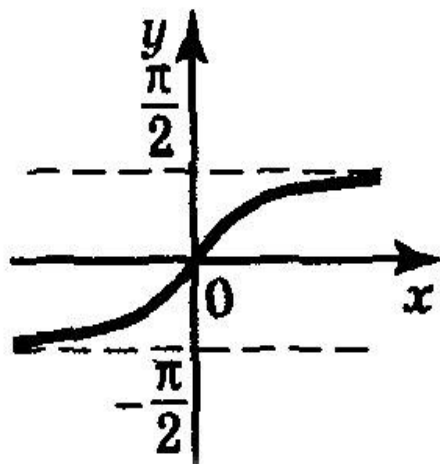
$$y = \arcsin x$$



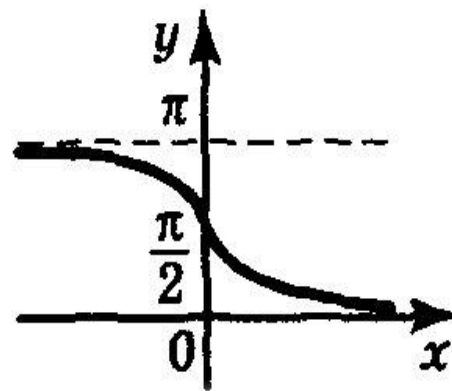
$$y = \arccos x$$



$$y = \arctg x$$

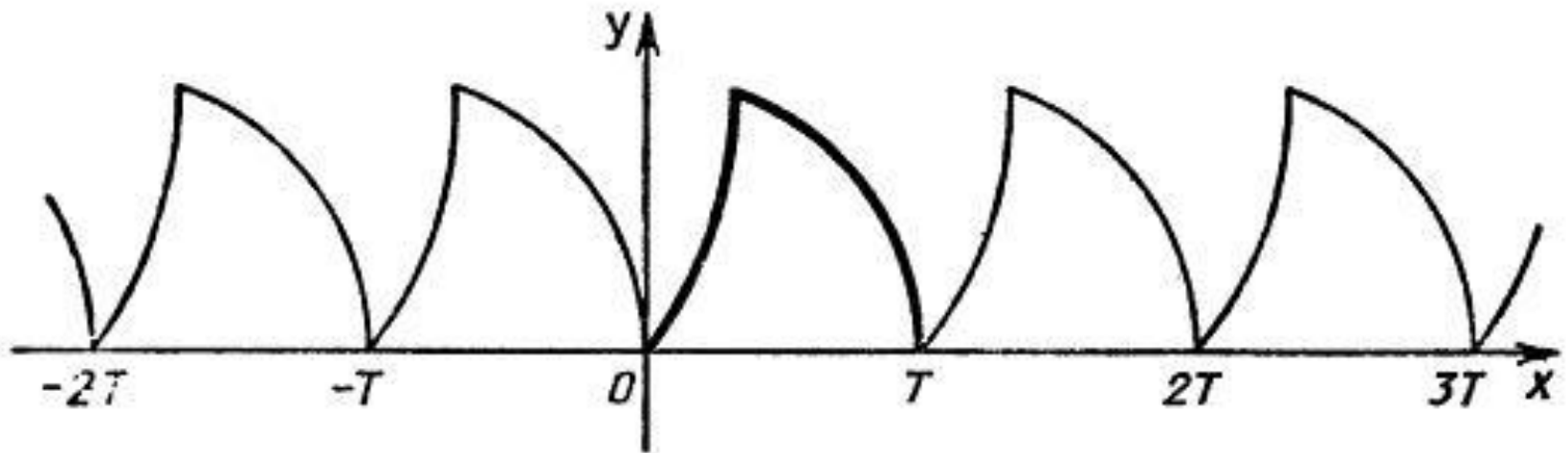


$$y = \text{arcctg } x$$



8. Периодичность

- **Период функции** – положительное число T , обладающее двумя свойствами:
- а) вместе с числом x в область определения данной функции входят также числа $x + T$ и $x - T$;
- б) для любого значения x из области определения функции справедливы равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
- Наименьшее из чисел T , обладающих указанными свойствами, называется *основным периодом* функции.



Свойства некоторых функций и их графики

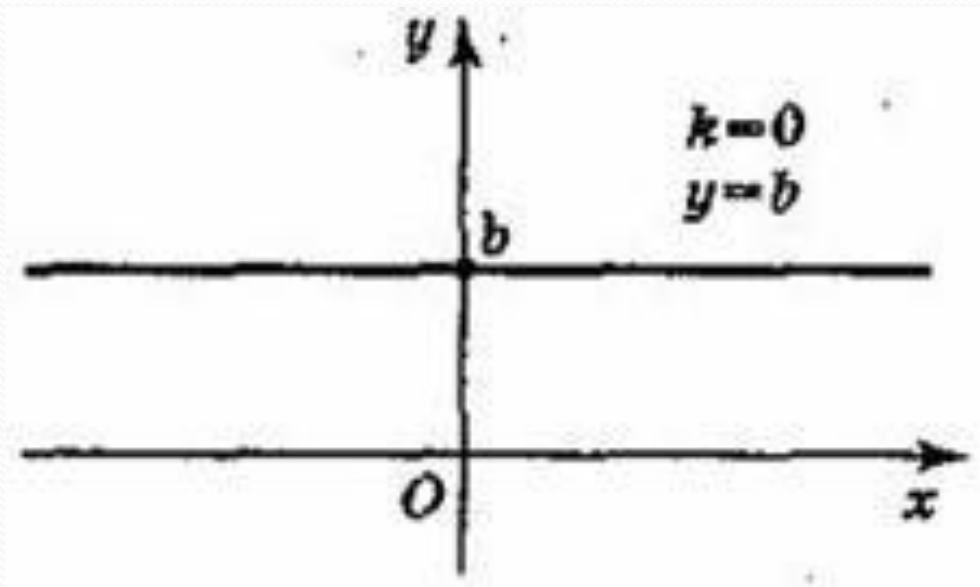
	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$k > 0$	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a positive slope k and a negative y-intercept b. The line intersects the x-axis at b/k and the y-axis at b. A right-angle symbol is drawn at the intersection of the line and the x-axis.</p>	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a positive slope k and a y-intercept $b = 0$. The line passes through the origin. A right-angle symbol is drawn at the origin.</p>	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a positive slope k and a positive y-intercept b. The line intersects the x-axis at b/k and the y-axis at b. A right-angle symbol is drawn at the intersection of the line and the x-axis.</p>
$k < 0$	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a negative slope k and a negative y-intercept b. The line intersects the x-axis at b/k and the y-axis at b. A right-angle symbol is drawn at the intersection of the line and the x-axis.</p>	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a negative slope k and a y-intercept $b = 0$. The line passes through the origin. A right-angle symbol is drawn at the origin.</p>	<p>A Cartesian coordinate system showing a line with a negative slope k and a positive y-intercept b. The line intersects the x-axis at b/k and the y-axis at b. A right-angle symbol is drawn at the intersection of the line and the x-axis.</p>

функции:

- 1. При $k > 0$ функция $y = kx + b$ возрастающая в области определения.
- 2. При $k < 0$ функция $y = kx + b$ убывающая в области определения.
- 3. Множеством значений функции $y = kx + b (k \neq 0)$ является вся числовая прямая, т.е. множество \mathbb{R} действительных чисел.
- При $k = 0$ множество значений функции $y = kx + b$ состоит из одного числа b .
- При $b = 0$ и $k = 0$ функция не является ни четной, ни нечетной.
- При $k = 0$ линейная функция имеет вид $y = b$ и при $b \neq 0$ она является четной.
- При $k = 0$ и $b = 0$ линейная функция имеет вид $y = 0$ и является одновременно четной и нечетной.

функции:

- 4. Графиком линейной функции $y = b$ является прямая, проходящая через точку $(0; b)$ и параллельная оси Ox . Заметим, что при $b = 0$ график функции $y = b$ совпадаете осью Ox .

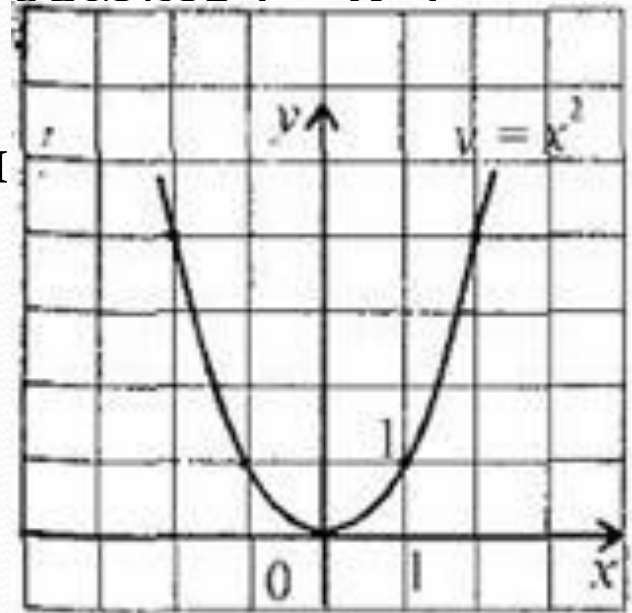


Свойства линейной функции:

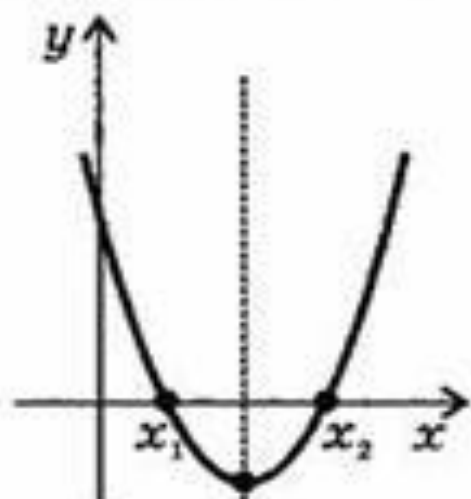
5. При $k > 0$ имеем, что $y > 0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и $y < 0$, если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$. При $k < 0$ имеем, что $y > 0$, если $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

Функция $y = x^2$

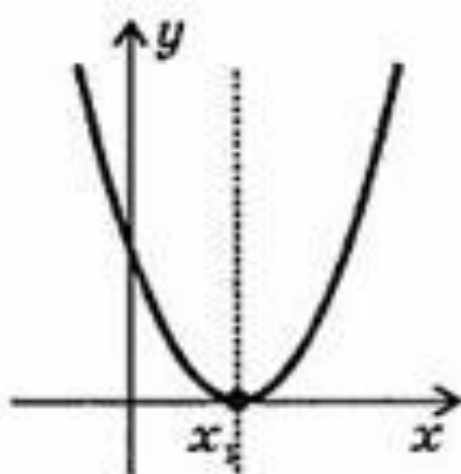
- Область определения этой функции - множество \mathbb{R} действительных чисел.
- Передавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = x^2$, изображаем график функции.
- График функции $y = x^2$ называется *параболой*.



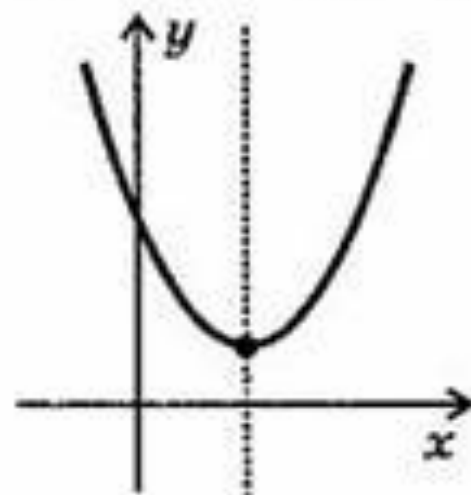
$$a > 0, D > 0$$



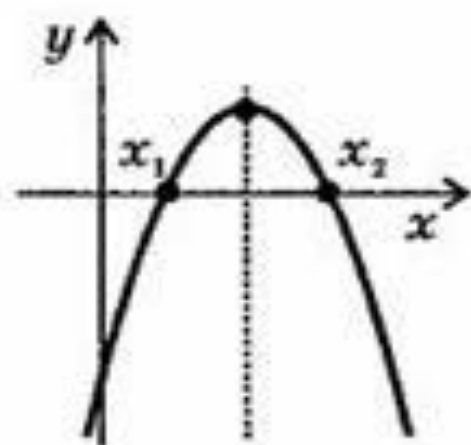
$$a > 0, D = 0$$



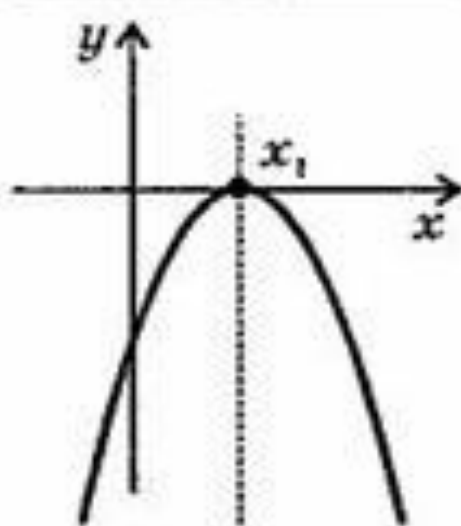
$$a > 0, D < 0$$



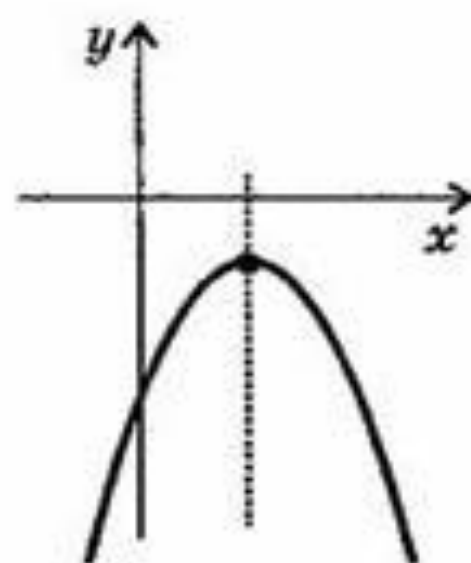
$$a < 0, D > 0$$



$$a < 0, D = 0$$

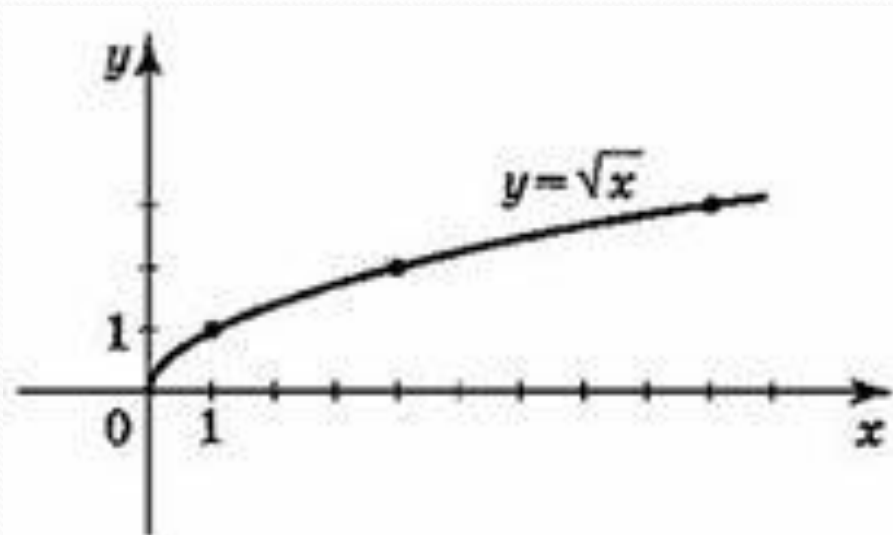


$$a < 0, D < 0$$

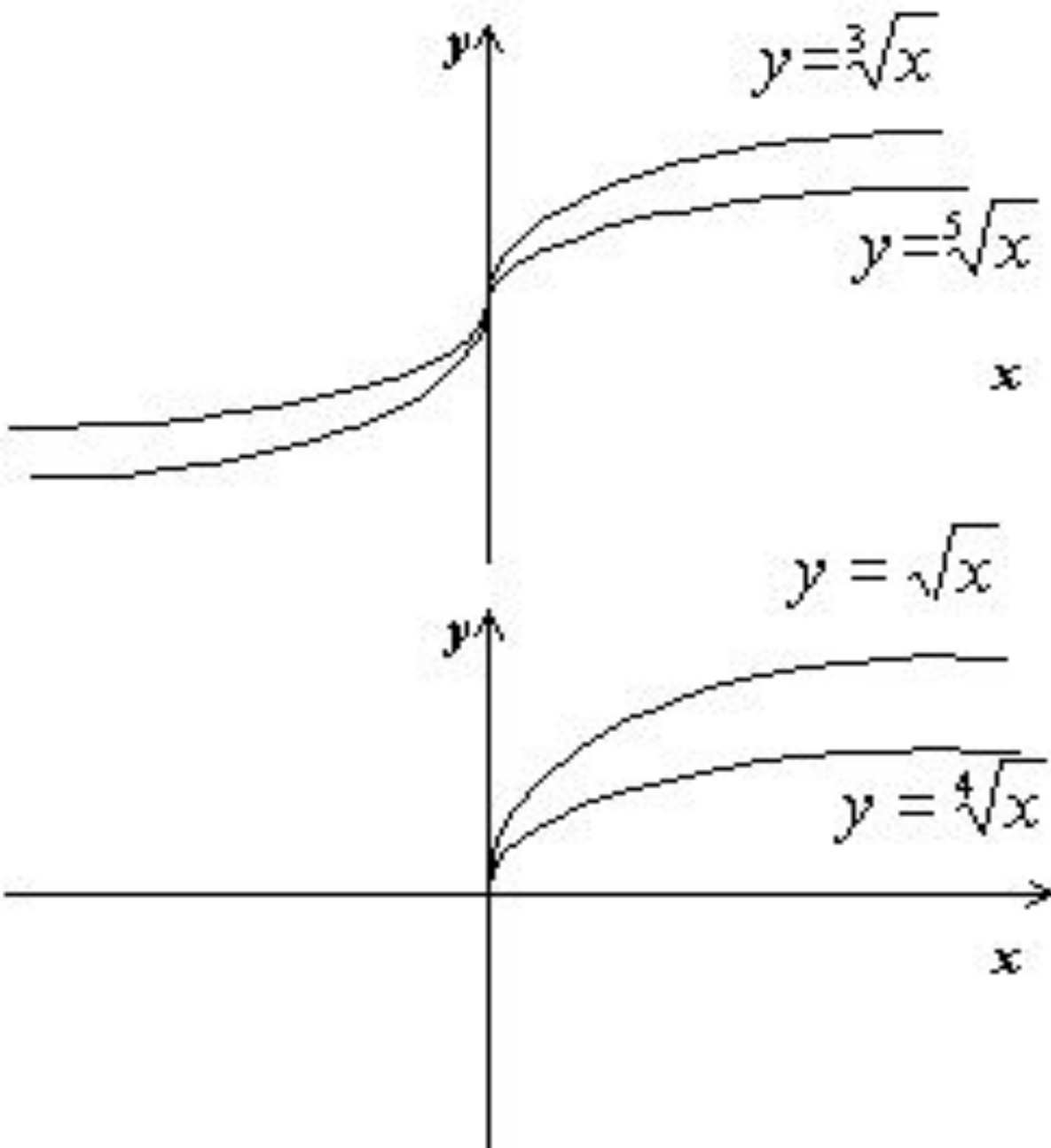


Функция $y = \sqrt{x}$

- Область определения этой функции - промежуток $[0; +\infty)$, т. е. все неотрицательные числа.
- Придавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = \sqrt{x}$, изображаем график функции

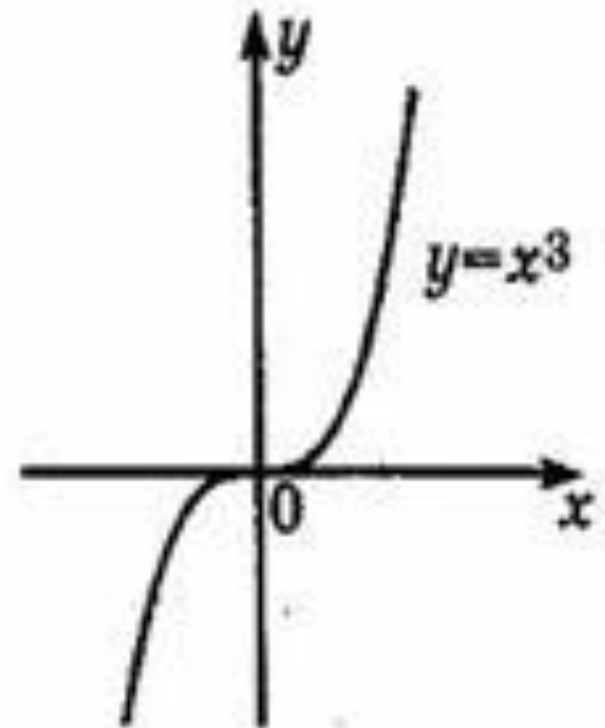


$$y = \sqrt[n]{x}$$

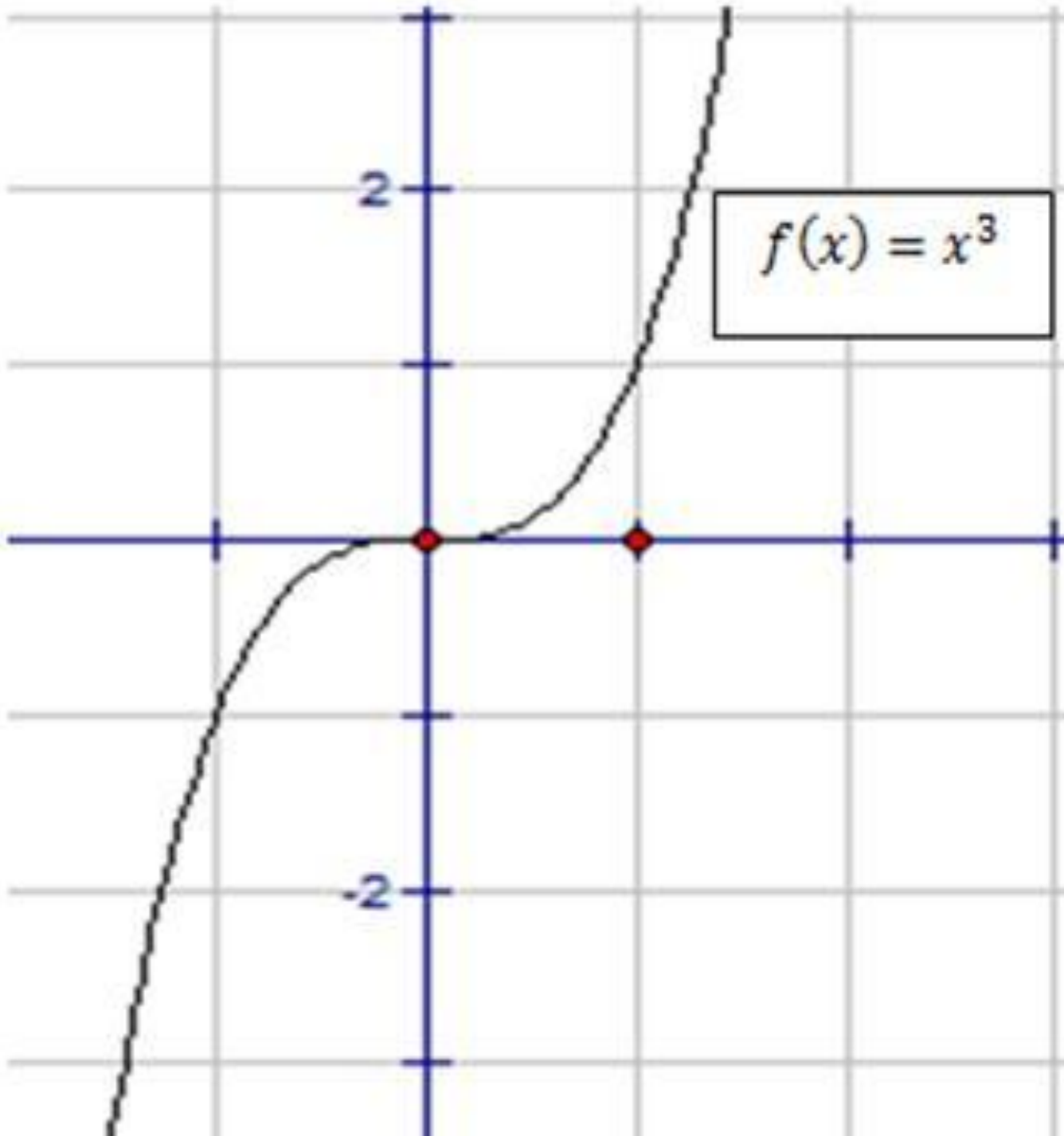


Функция $y = x^3$

- Область определения этой функции - множество \mathbb{R} действительных чисел,
- Придавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = x^3$, изображаем график функции.
- График функции $y = x^3$ называется кубической параболой.



- 1. Е
- пер
- кос
- 2.]
- куб
- кос
- 3.]
- чис
- 4.
- зна
- зна
- отн
- неч
- 5. (

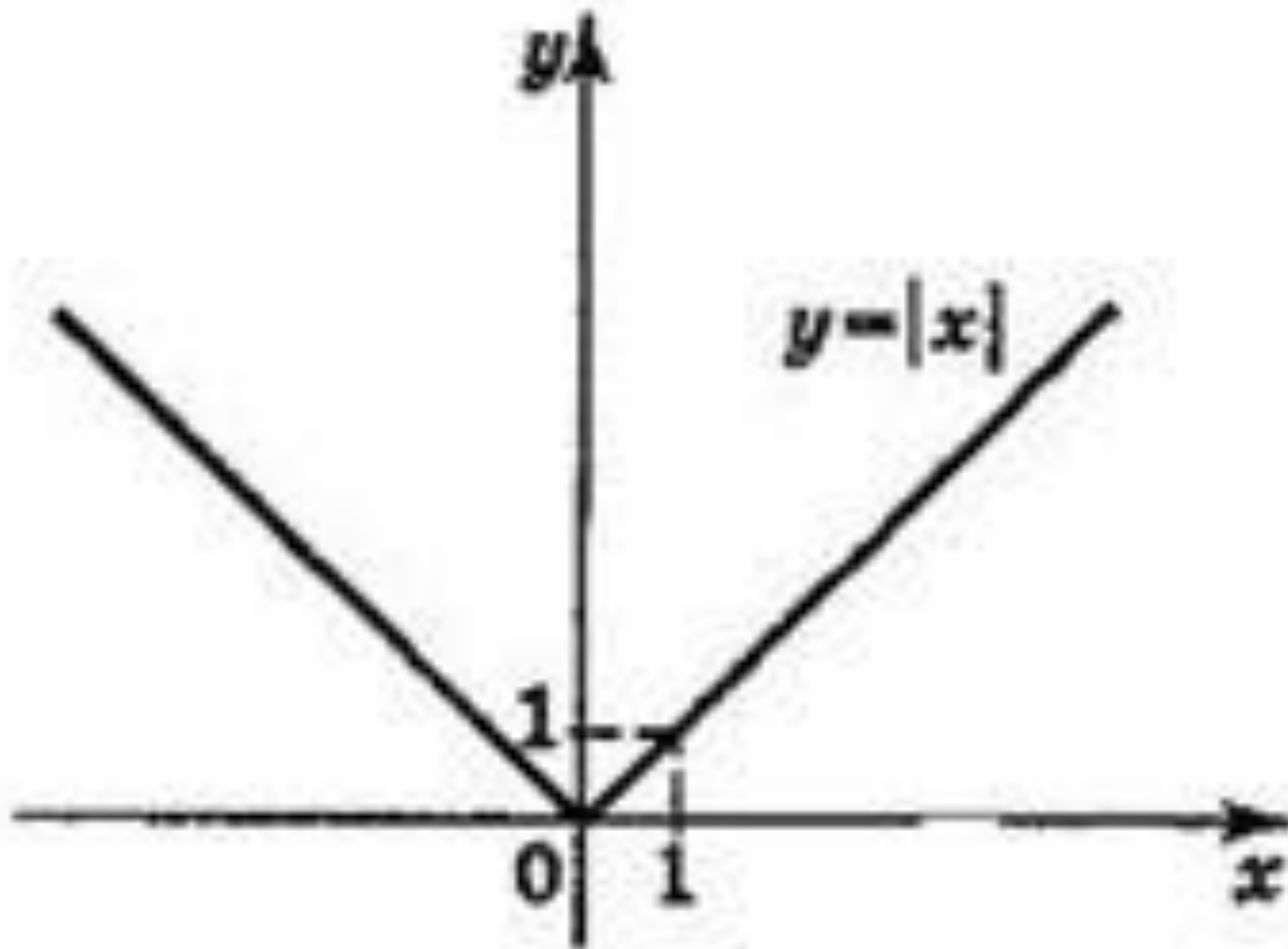


я вся

ко

ления.

Функция $y = |x|$



R

O

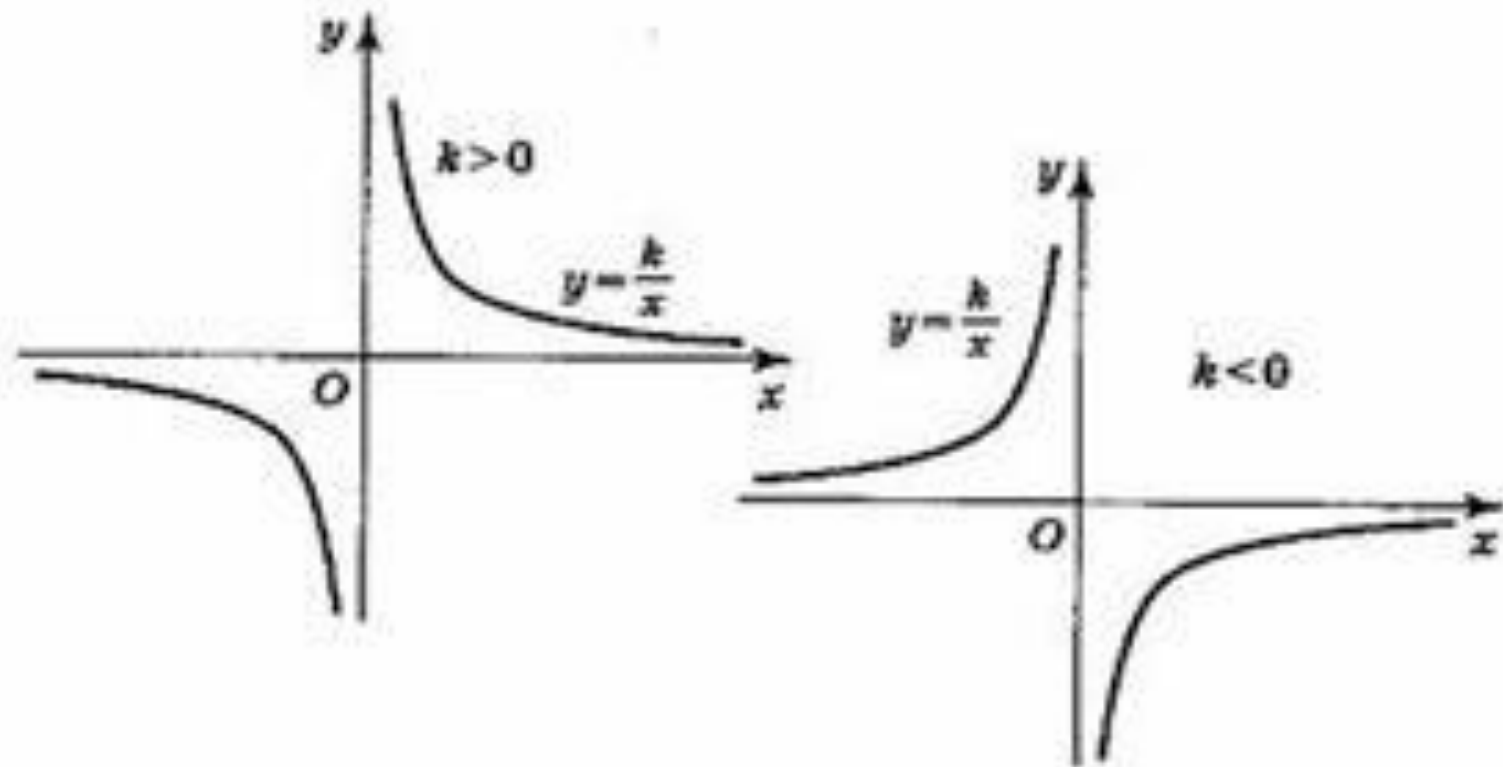
И

Свойства функции:

- 1. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. график пересекает оси координат в точке $(0; 0)$ - начале координат.
- 2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$, т.е. все точки графика функции $y = |x|$, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс.
- 3. Множеством значений функции $y = |x|$ является промежуток $[0; +\infty)$.
- 4. Если значения аргумента отличаются только знаком, то значения функции равны, т.е. график функции симметричен относительно ординат (функция $y = |x|$ - четная).
- 5. На промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = |x|$ возрастает.
- 6. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = |x|$ убывает.
- 7. Наименьшее значение функция принимает в точке x , оно равно 0. Наибольшего значения не существует.

Функция $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

- Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- Область значений функции: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- График — гипербола.



Свойства функции:

- 1. Нули функции.
- $y \neq 0$, нулей нет.
- 2. Промежутки знакопостоянства,
- Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.
- Если $k < 0$, то $y < 0$ при $x > 0$; $y > 0$ при $x < 0$.
- 3. Промежутки возрастания и убывания.
- Если $k > 0$, то функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- Если $k < 0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- 4. Четность (нечетность) функции.
- Функция нечетная.

Спасибо за внимание



$\sin(x)$



$\cos(x)$



$\tan(x)$



$\cot(x)$



$|x|$



x



x^2



$x^2 + y^2$



\sqrt{x}



$\sqrt{-x}$



$\frac{1}{x}$



crash.