

Лекция 5

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Бесконечно малые функции

Определение:

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой функцией**, или **б.м.ф.**, при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

То есть,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой функцией**, или **б.м.ф.**, при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x| > \delta : |f(x)| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма конечного числа б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$ является б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.
2. Произведение конечного числа б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$ является б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.
3. Произведение б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$ на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функцию является б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.
4. *Связь функции, её предела и б.м.ф.*

Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

Бесконечно малые функции

Пример 1:

Функция $f(x) = x + 1$ является бесконечно малой при $x \rightarrow -1$, но не является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0 \neq -1$.

Пример 2:

Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \pm\infty$.

Бесконечно большие функции

Определение:

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой функцией**, или **б.б.ф.**, при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует проколота окрестность $U_{\delta}^{\times}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U_{\delta}^{\times}(x_0)$ выполнено условие

$$|f(x)| > M.$$

Бесконечно большие функции

При этом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists U_\delta(x_0), \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) > M.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists U_\delta(x_0), \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) < -M.$$

Свойства бесконечно больших функций

1. Произведение двух б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$ является б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$.
2. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 для функции $f(x)$ выполнено условие $|f_1(x)| > c > 0$, где c – константа, а $f_2(x)$ – б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$, то функция $f_1(x) \cdot f_2(x)$ является б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$.
3. Если $f(x)$ – б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ является б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.
Если $f(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ является б.б.ф. при $x \rightarrow x_0$.

Бесконечно большие функции

Пример 1:

Функция $f(x) = x^2 - 3$ является бесконечно большой при $x \rightarrow \pm\infty$, но не является бесконечно большой при любом другом значении x .

Пример 2:

Функция $f(x) = \frac{1}{x^3 + 8}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow -2$.

Лекция 5

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Нахождение пределов функций

Для нахождения предела функции используют:

- понятие предела функции в точке;
- свойства функций, имеющих предел в точке;
- свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Начинать нахождение предела следует с подстановки x_0 в качестве аргумента функции. Если при этом получается константа, то она и является пределом функции.

Нахождение пределов функций

Определённости:

$$\frac{\text{const}}{+0} = +\infty$$

$$\frac{\text{const}}{-0} = -\infty$$

$$\frac{\text{const}}{+\infty} = 0$$

$$\frac{\text{const}}{-\infty} = 0$$

где константу считаем большей нуля.

Неопределённости:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Нахождение пределов функций

Пример 1:

Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x}{x^4 + 5x^3 - x^2 + 1}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty$$

Нахождение пределов функций

Пример 2:

Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + 1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{3x+2} + 1) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}) \cdot \left(\sqrt[3]{(3x+2)^2} - \sqrt[3]{3x+2} + 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -1} & \frac{(\sqrt[3]{3x+2} + 1) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}) \cdot \left(\sqrt[3]{(3x+2)^2} - \sqrt[3]{3x+2} + 1 \right)}{(\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}) \cdot (\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}) \cdot \left(\sqrt[3]{(3x+2)^2} - \sqrt[3]{3x+2} + 1 \right)} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} & \frac{(3x+3)(\sqrt{x+5} + \sqrt{3-x})}{2(x+1) \left(\sqrt[3]{(3x+2)^2} - \sqrt[3]{3x+2} + 1 \right)} = 2 \end{aligned}$$

Лекция 5

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел

Замечательными пределами называются известные пределы от известных функций.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

К первому замечательному пределу сводятся следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Второй замечательный предел

Замечательными пределами называются известные пределы от известных функций.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствие: $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$.

К второму замечательному пределу сводятся следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

Другие замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x} = \alpha;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha \ln a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \beta x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \beta;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha.$$

Таблица замечательных пределов: Общий случай

Пусть $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + \alpha(x))^\beta - 1}{\alpha(x)} = \beta;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = \ln a;$$

Замечательные пределы

Пример 1:

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{e^x - e^{-3x}}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - x^2)}{(e^x - 1) - (e^{-3x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-3x} - 1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{1 - (-3)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Замечательные пределы

Пример 2:

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x^3-1}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(1-x))}{-(1-x)(x^2+x+1)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{3}$$

math.mmts-it.org