Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 5

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Бесконечно малые функции

Определение:

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой функцией**, или **б.м.ф.**, при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0.$

То есть,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta : \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой функцией**, или **б.м.ф.**, при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall |x| > \delta : \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма конечного числа б.м.ф. при $x \to x_0$ является б.м.ф. при $x \to x_0$.

2. Произведение конечного числа б.м.ф. при $x \to x_0$ является б.м.ф. при $x \to x_0$.

3. Произведение б.м.ф. при $x \to x_0$ на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки x_0 функцию является б.м.ф. при $x \to x_0$.

4. *Связь функции, её предела и б.м.ф.*

Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Бесконечно малые функции

Пример 1:

Функция $f(x) = x + 1$ является бесконечно малой при $x \to -1,$ но не является бесконечно малой при $x \to x_0 \neq -1.$

Пример 2:

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ является бесконечно малой при $x \to \pm\infty.$

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Бесконечно большие функции

Определение:

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой функцией**, или **б.б.ф.**, при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнено условие

$$\left|f(x)\right| > M.$$

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Бесконечно большие функции

При этом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall M > 0, \quad \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0), \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): \quad f(x) > M.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall M > 0, \quad \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0), \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): \quad f(x) < -M.$$

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Свойства бесконечно больших функций

1. Произведение двух б.б.ф. при $x \to x_0$ является б.б.ф. при $x \to x_0$.

2. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 для функции $f(x)$ выполнено условие $|f_1(x)| > c > 0$, где c – константа, а $f_2(x)$ – б.б.ф. при $x \to x_0$, то функция $f_1(x) \cdot f_2(x)$ является б.б.ф. при $x \to x_0$.

3. Если $f(x)$ – б.б.ф. при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ является б.м.ф. при $x \to x_0$.

Если $f(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ является б.б.ф. при $x \to x_0$.

Автор: И.В.Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Бесконечно большие функции

Пример 1:

Функция $f(x) = x^2 - 3$ является бесконечно большой при $x \to \pm\infty$, но не является бесконечно большой при при любом другом значении x.

Пример 2:

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 8}$ является бесконечно большой при $x \to -2$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 5

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Нахождение пределов функций

Для нахождения предела функции используют:

- понятие предела функции в точке;
- свойства функций, имеющих предел в точке;
- свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Начинать нахождение предела следует с подстановки x_0 в качестве аргумента функции. Если при этом получается константа, то она и является пределом функции.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Нахождение пределов функций

Определённости:

$$\frac{\text{const}}{+0} = +\infty \qquad \frac{\text{const}}{-0} = -\infty$$

$$\frac{\text{const}}{+\infty} = 0 \qquad \frac{\text{const}}{-\infty} = 0$$

где константу считаем большей нуля.

Неопределённости:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad 1^{\infty}; \quad \infty^{0}; \quad 0^{0}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Нахождение пределов функций

Пример 1:

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x}{x^4+5x^3-x^2+1}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-{}^{1}\!/\!{}_{x^4}}{{}^{1}\!/\!{}_{x}+{}^{5}\!/\!{}_{x^2}-{}^{1}\!/\!{}_{x^3}+{}^{1}\!/\!{}_{x^5}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Нахождение пределов функций

Пример 2:

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}-\sqrt[3]{3x+2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}-\sqrt[3]{3x+2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(3x+3)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x+1)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}-\sqrt[3]{3x+2}+1\right)}=2$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Лекция 5

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Первый замечательный предел

Замечательными пределами называются известные пределы от известных функций.

Первый замечательный предел: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

К первому замечательному пределу сводятся следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Второй замечательный предел

Замечательными пределами называются известные пределы от известных функций.

Второй замечательный предел: $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствие: $$\lim_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)} = e$$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to x_0$.

К второму замечательному пределу сводятся следующие пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \quad \lim_{x\to 0}(1+k\,x)^{1/x} = e^k.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Другие замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{\alpha x}-1}{x}=\alpha\ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\beta x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\beta;\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^{\alpha}-1}{x-1}=\alpha.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Таблица замечательных пределов: Общий случай

Пусть $\alpha(x) -$ б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1; \qquad \lim_{x\to x_0} (1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e;$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1; \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+\alpha(x))^{\beta}-1}{\alpha(x)} = \beta; \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = \ln a;$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

Замечательные пределы

Пример 1:

Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x^3}{e^x - e^{-3x}}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - x^2)}{(e^x - 1) - (e^{-3x} - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2}{\dfrac{(e^x - 1)}{x} - \dfrac{(e^{-3x} - 1)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2}{1 - (-3)} = {}^1\!/_4$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент кафедры высшей математики БГУИР

Замечательные пределы

Пример 2:

Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x^3-1}$

Решение:

Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\big(1+(1-x)\big)}{-(1-x)(x^2+x+1)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}=-\tfrac{1}{3}$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
кафедры высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org