МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Основная литература

1. *Молчанов, В. А.* Логика высказываний. – Саратов, 2014.
2. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. Математическая логика. – М., 2011.
3. *Игошин, В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. – М., 2010.
4. *Игошин, В. И.* Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов. – М., 2008.

Предмет математической логики

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики – древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

Л О Г И К А (Ф О Р М А Л Ь Н А Я)

изучает **формы,** в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

Научные законы

Утверждения	Физика	География	Физиология
P_1	Каждый металл — проводник	В каждом южном городе летом тепло	Все люди смертны
P_2	Ртуть — металл	Сочи — южный город.	Сократ — человек
Заключение	Ртуть — проводник	В Сочи летом тепло	Сократ смертен

Общая форма всех этих законов - закон формальной логики

P_1. Каждый предмет, обладающий свойством R, обладает свойством Q.

P_2: Предмет a обладает свойством R.

Заключение: Предмет a обладает свойством Q.

Закон формальной логики в символьном виде

$$P_1:\quad (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)).$$

$$P_2:\quad R(a)$$

$$Q(a).$$

Одна из основных задач логики - изучение правильных способов рассуждений.

В общем случае рассуждение - это последовательность умозаключений.

Умозаключение - способ получения новых суждений Ф из ранее известных суждений $Ф_1,\dots,Ф_n$. Схематически это изображается диаграммой:

$$\frac{Ф_1,\dots,Ф_n}{Ф}$$, где $Ф_1,\dots,Ф_n$ – посылки и Ф – заключение умозаключения.

Математическая логика занимается задачами формализации правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата.**

Главная цель – изучение математических рассуждений с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

Первый исследователь этого направления - немецкий математик Г.Лейбниц (1646—1716).

Этапы развития математической логики:

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Итальянский математик Дж.Пеано (1858—1932) изложил арифметику на языке математической логики.

В XIX веке математическая логика стала основой всех наук:

- открытие неевклидовой геометрии,
- поиски обоснования математического анализа,
- открытие парадоксов, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям.

Анализ парадоксов привел к созданию программы Д.Гильберта (1862—1943) обоснования математики на основе аксиоматического подхода.

Систематический подход к математике на основе математической логики впервые изложили английские математики Б.Рассел (1872—1970) и А.Уайтхед (1861—1947) в работе «Основания математики» (1910—1913).

К.Гедель (1906-1978) показал ограниченность аксиоматического подхода к обоснованию математики.

Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов в наше время обусловлено:

– распространением информационно-коммуникационных технологий,

– необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования разнообразных задач и процессов.

Знания — это представление информации в виде формальных высказываний.

Законы формальной логики преобразуют одни высказывания в другие, т.е. преобразуют информацию из одной формы представления в другую.

Законы формальной логики — это инструмент преобразования информации!

Основная задача формальной логики.

База знаний: $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Предложение: ψ.

Задача (формальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Г.

Приложение 1.

Базы знаний

(экспертные системы, Big Data и др.)

База знаний Γ — база знаний системы.

Предложение ψ — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа данных.

Приложение 2.

Семантический Web

База знаний Γ — ресурсы Интернет.

Предложение ψ — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа ресурсов.

Приложение 3.

Автоматизация научных исследований (логическое программирование)

База знаний Γ — система аксиом.

Предложение ψ — утверждение.

Аппарат логического вывода — ядро автоматической системы доказательства теорем.

Для реализации приложений необходимо:

- Создать формальный язык для представления знаний.
- Выделить необходимую систему законов формальной логики.
- Проверить корректность логических законов.
- Проверить полноту построенной системы логических законов.
- Разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным логическим законам.

Логика высказываний

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания $A, B, C, \ldots$

Истинностное значение высказывания A обозначается символом $\lambda(A)$ и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$, если высказывание A истинно, и

$\lambda(A)=0$, если A ложно.

Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний P с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний P описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами*

Символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, которые называются *пропозициональными связками.*

Переменные символы $X, Y, Z, \ldots$, которые используются для обозначения высказываний и которые называются *пропозициональными переменными.*

Определение. *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой,
2) если Φ, Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \Rightarrow \Psi), (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$.

Если в формулу Φ входят переменные $X_1,\ldots,X_n$, то записывают $\Phi=\Phi(X_1,\ldots,X_n)$.

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу Φ вместо переменных $X_1,\ldots,X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1,\ldots,A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1,\ldots,A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1),\ldots,\lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$.

Формула Ф определяет функцию n переменных F_{Φ}, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1),\ldots,\lambda(X_n))$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ этого же множества.

Функция F_{Φ} называется *истинностной функцией формулы* Ф и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет одно из 2^{2^n} возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример. **Формула** $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ имеет следующую истинностную таблицу:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Определение. Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается |=Ф, если ее истинностная функция тождественно равна 1;

– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;

– *выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0;

– *опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$ – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$ – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ – закон контрапозиции.

Новые тавтологии можно получить с помощью следующих правил.

<u>Правило отделения:</u>

если $\models \Phi$, $\models \Phi \Rightarrow \Psi$, то $\models \Psi$.

<u>Правило подстановки:</u>

если $\models \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, то для любых формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ тавтологией является формула $\Phi(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$.