



Анализ систем управления движением

канд. техн. наук,
доцент кафедры АПП
Кудряшев Сергей
Борисович

Анализ сводится к исследованию зависимости между сигналом, поданным на вход системы (входным сигналом), и сигналом, полученным на ее выходе (выходным сигналом).

При подаче сигнала на вход системы в ней развиваются во времени различные процессы, которые обозначим общим термином **«движение системы»**. Происходит изменение состояния, т. е. переход из одного состояния в другое, именуемый как «движение».

Анализ систем управления состоит в изучении их свойств, условий выполнения ими своих функций и достижения заданной цели. В результате анализа оцениваются особенности поведения систем, степень выполнения требований к процессам управления и формулируется вывод о возможности создания (синтеза) работоспособной системы управления.

Анализ систем управления

процесс исследования системы управления, основанный на ее декомпозиции с последующим определением статических и динамических характеристик составляющих элементов, рассматриваемых во взаимосвязи с другими элементами системы и окружающей средой.

Цели анализа:

- изучение системы управления для эффективного использования и принятия решения по ее совершенствованию или замене;
- исследование альтернативных вариантов вновь создаваемой системы управления с целью выбора наилучшего варианта.

Задачи анализа системы управления:

- определение объекта анализа;
- структурирование системы;
- определение функциональных особенностей системы управления;
- исследование информационных характеристик системы;
- определение количественных и качественных показателей системы управления;
- оценка эффективности системы управления;
- обобщение и оформление результатов анализа.

При решении этой задачи
определение объекта анали
за нужно выполнить
следующие действия:

- выделить анализируемую систему управления;
- определить цели и задачи управления;
- произвести первичную декомпозицию системы с выделением управляющей подсистемы (органов управления), объектов управления (исполнителей) и окружающей среды.

Структурирование системы

Целью структурирования является детальное изучение системы управления, установление связей и отношений между ее элементами.

Различные варианты структур анализируемой системы позволяют определить характеристики и отдельные частные недостатки выделенных элементов и связей между ними и наметить пути их устранения.

Задача анализа структуры - определение основных характеристик системы при некоторой выбранной (фиксированной) структуре.

Определение функциональных особенностей системы

Задача определения функциональных особенностей системы строго связана с задачей структурирования. С учетом структурирования определяются перечень частных задач и функции каждого элемента системы, порядок их взаимодействия, необходимые входные и выходные данные.

Исследование информационных характеристик системы

Информационные связи между подсистемами различных уровней принято называть вертикальными, а между подсистемами одного уровня — горизонтальными.

В процессе исследования определяются:

- сущность и качество информации, используемые для выработки управляющих воздействий;
- достаточность информации для выработки управляющих воздействий;
- суммарные объемы поступающей и исходящей информации в единицу времени в целом по системе и отдельно по основным элементам;
- объем информации, постоянно хранящейся в системе;
- единичные объемы передаваемой информации;
- способы передачи или доставки информации;
- основные направления информационных потоков и др.

Определение количественных и качественных показателей системы

Предварительный выбор перечня показателей каждого уровня;

Разработка моделей и методов определения показателей различных уровней;

Уточнение условий определения показателей, включающих предполагаемые воздействия надсистемы, возможность интегрирования с другими системами управления и наличие дублирующих систем.

В результате решения данной задачи: систематизируются частные качественные и количественные показатели структур, процессов функционирования и информации; определяются обобщенные показатели, характеризующие внешние свойства анализируемой системы и ее отдельных элементов.

Оценка эффективности

Цель: определение достигнутых в процессе функционирования системы управления результатов и затраченных на достижение этих результатов материальных и временных ресурсов.

Оценивание проводится

1. по результатам реального (или имитационного) функционирования системы.
2. теоретические оценки возможных значений экспериментально определяемых показателей — теоретические показатели функционирования.

Значения теоретических и экспериментальных показателей функционирования могут не совпадать. Несовпадение может быть обусловлено несовершенством ("грубостью") метода построения теоретических оценок, недостаточной информированностью лица, дающего соответствующие теоретические оценки, возможностью нескольких вариантов течения процесса функционирования и др. Точность теоретических оценок представляет собой "меру соответствия" теоретически построенных оценок их экспериментальным значениям.

Обобщение и оформление результатов анализа

Задача документального обобщения и оформления результатов анализа включает:

краткое описание структуры, процессов функционирования и информационных потоков системы;

обобщенное значение показателей и результатов оценки эффективности системы (приводятся значения показателей);

обобщенные выявленные недостатки и предварительные рекомендации по дальнейшему использованию системы, совершенствованию или ее замене.

Принципы анализа систем управления

физичности

моделируемости

целенаправленности

Принцип физичности: всякой системе (независимо от ее природы) присущи законы (закономерности), возможно, уникальные, определяющие внутренние причинно-следственные связи ее существования и функционирования

Постулат целостности. Сложная система управления должна рассматриваться как единое целое.

Постулат декомпозиции систем. Анализ сложной системы управления осуществляется путем расчленения ее на подсистемы, располагаемые по уровням. Принцип позволяет снизить уровень сложности исследуемой системы.

Постулат автономности. С точки зрения постулата целостности, разнообразие декомпозиции помогает выявлению системных свойств. С точки зрения постулата автономности, большинство декомпозиций, а может быть все, кроме одной, отпадут.

Принцип моделируемости: сложная система может быть представлена конечным множеством моделей, каждая из которых отражает определенную грань ее сущности.

принцип позволяет исследовать определенное свойство сложной системы при помощи одной или нескольких упрощенных (узкоориентированных) моделей.

Постулат действий. Для изменения поведения системы требуется прирост воздействия, превосходящего некоторое пороговое значение.

Постулат неопределенности. Существует область неопределенности, в пределах которой свойства системы могут быть описаны только вероятностными характеристиками.

Постулат дополненности. Сложные системы, находясь в различных средах (ситуациях), могут проявлять различные системные свойства, в том числе альтернативные (т.е. несовместимые ни в одной из ситуаций по отдельности).

Постулат многообразия моделей. Определение характеристик системы на всех уровнях производится с помощью множества моделей, которые в общем случае различаются используемыми математическими зависимостями и физическими закономерностями. Выбор моделей зависит от цели анализа и особенностей исследуемой системы.

Постулат согласования уровней. Требования к системе, формируемые на любом уровне, выступают как условия (или ограничения) выбора частных моделей и предельных возможностей системы на нижележащих уровнях. В случае невозможности выполнения требований осуществляется корректировка условий.

Постулат внешнего дополнения. Проверка истинности результатов, получаемых на каждом уровне, производится с использованием исходных данных, моделей и методов вышележащих уровней.

Постулат достаточности. Последовательность уровней (этапов) определения требуемых характеристик в процессе совершенствования сложной системы выбирается по возрастанию затрат на улучшение системы, с проверкой достаточности принимаемых решений по заданным критериям эффективности.

Постулат проверенного методического обеспечения. Для анализа СУ необходимо использовать хорошо отработанные и экспериментально проверенные модели и методики, обеспечивающие отдельные характеристики системы в заданные сроки и с требуемой точностью.

Целенаправленность системы - функциональная тенденция, направленная на достижение системой некоторого состояния либо на усиление (или сохранение) некоторого процесса.

При этом система способна противостоять внешнему воздействию, а также использовать среду и случайные события.

Постулат выбора. Сложная система обладает способностью к выбору поведения, и, следовательно, однозначно предсказать и экстраполировать ее состояние невозможно ни при каком априорном знании свойств системы и ситуаций.

Сложная система строит свое поведение в существенной (хотя и неоднозначной) связи с *ситуацией*. Следовательно, на это поведение можно влиять.

Познание и практическое использование этого постулата имеет **два** аспекта.

Первый - стимулирование или подавление "свободы" выбора. В исследовательских, поисковых, творческих системах возможность выбора должна быть максимальной — она расширяет диапазон деятельности. Исполнительные системы должны иметь возможность выбора в пределах поставленной задачи либо не иметь ее вовсе.

Второй связан с количеством описаний выбора, его формальным представлением, качественной или количественной оценкой и использованием этой оценки при решении задач более общего характера.

Виды анализа систем управления

структурный

функциональный

информационный

параметрический

Структурный анализ систем управления

Структура - это внутренняя организация системы, которая способствует связи составляющих систему элементов.

Структура - это относительно устойчивый, упорядоченный способ связи элементов, придающий их взаимодействию в рамках внутренне расчлененного объекта целостный характер.

Сущностью структурного анализа является определение статических характеристик системы по ее структуре.

Структурный анализ проводится путем выделения в системе подсистем и элементов различного уровня и связей между ними.

Объектами исследования структурного анализа являются различные варианты структур системы управления, которые формируются в процессе ее декомпозиции.

В качестве показателей исследуемых структур целесообразно использовать:

множество выделенных элементов, отношений и связей;

характеристики элементов и связей;

обобщенные показатели структур, характеризующие их влияние на эффективность системы управления (число уровней управления, структурная устойчивость, экономические затраты на поддержание требуемых структурных характеристик и др.).

Процедура определения показателей структуры включает следующие этапы:

определение исходных данных для оценки структуры;

вычисление значений характеристик элементов структуры и связей между ними;

вычисление значений характеристик (показателей эффективности) структуры.

На основании оценки структуры производится выбор варианта структуры или же предложения по ее совершенствованию.

Функциональный анализ систем управления

Сущностью функционального анализа является определение динамических характеристик системы на основании принятых алгоритмов ее функционирования.

Объектами функционального анализа являются реализуемые системой методы и алгоритмы управления, включая общий алгоритм функционирования, содержащий все основные этапы (фазы, функции) управления, и частные методы и алгоритмы, направленные на выполнение отдельных этапов управления.

Основные этапы функционального анализа:

определение и описание общего процесса управления, реализуемого исследуемой системой;

декомпозиция общего процесса управления на ряд частных функций (задач, операций), выполняемых элементами системы управления;

определение качественных и количественных характеристик исследуемых процессов и функций управления;

формирование критериев и оценка эффективности функционирования системы управления;

принятие решения о необходимости совершенствования функциональных характеристик системы управления.

Информационный анализ систем управления

Объектом информационного анализа являются информационные процессы, протекающие в системе управления.

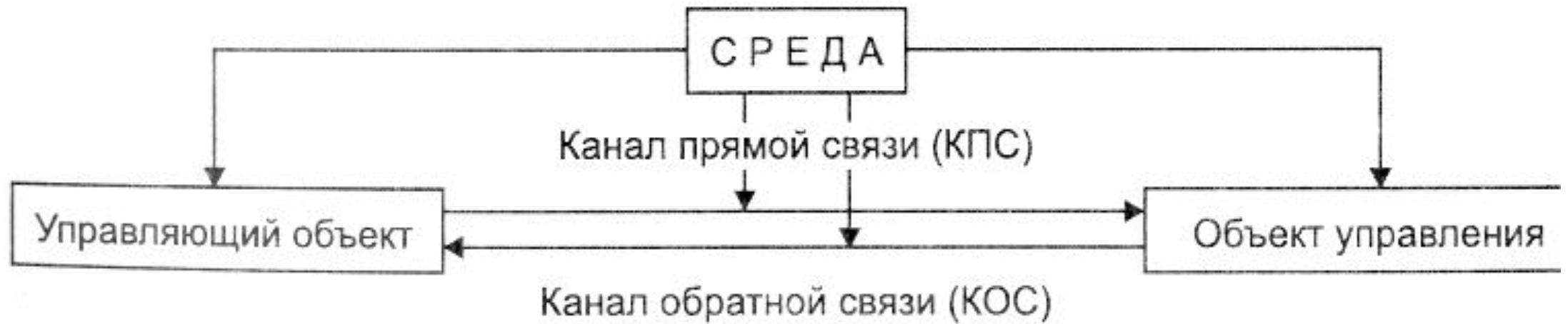
Рассмотрим:

коммуникационную (информационную) схему передачи информации в системе управления;

классификацию и характеристику информационных процессов;

структуру информационного процесса.

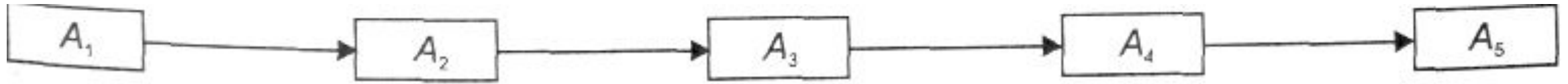
Коммуникационная (информационная) схема передачи информации в системе управления



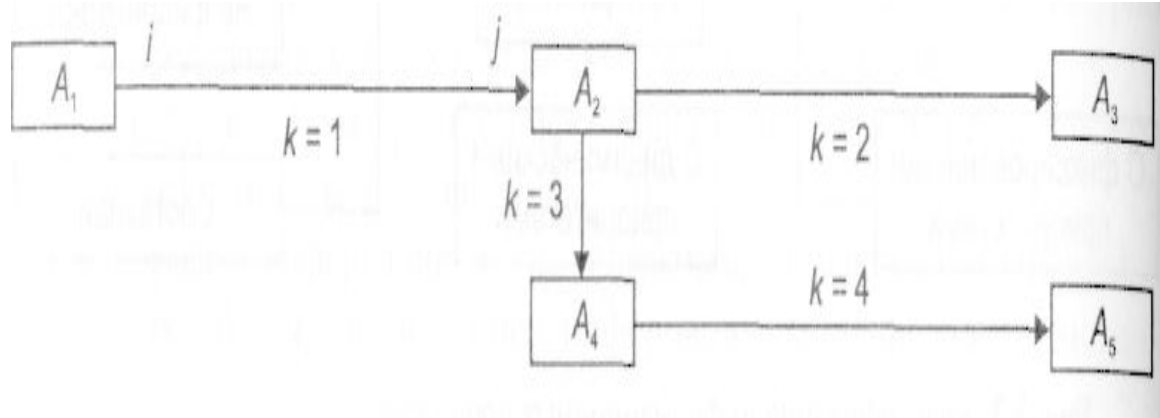
Классификация и характеристика информационных процессов



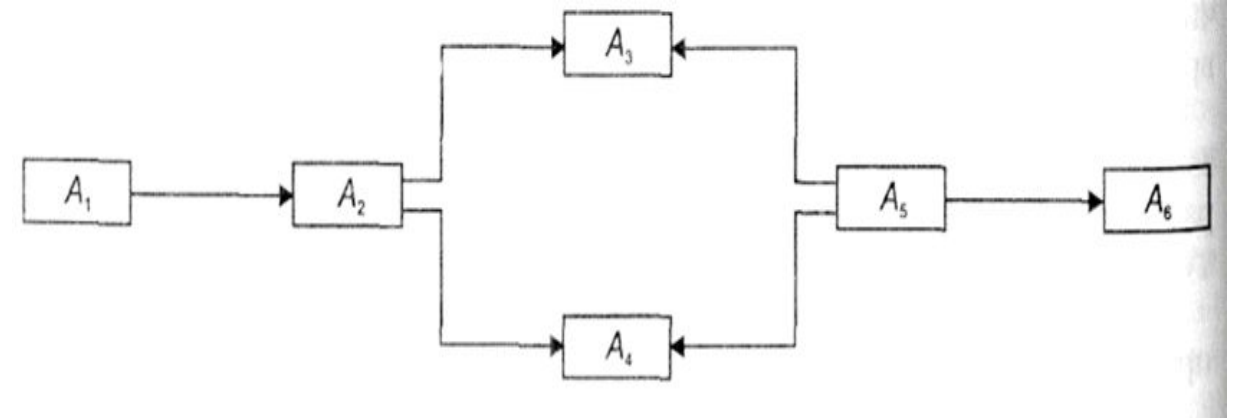
Простой ИП



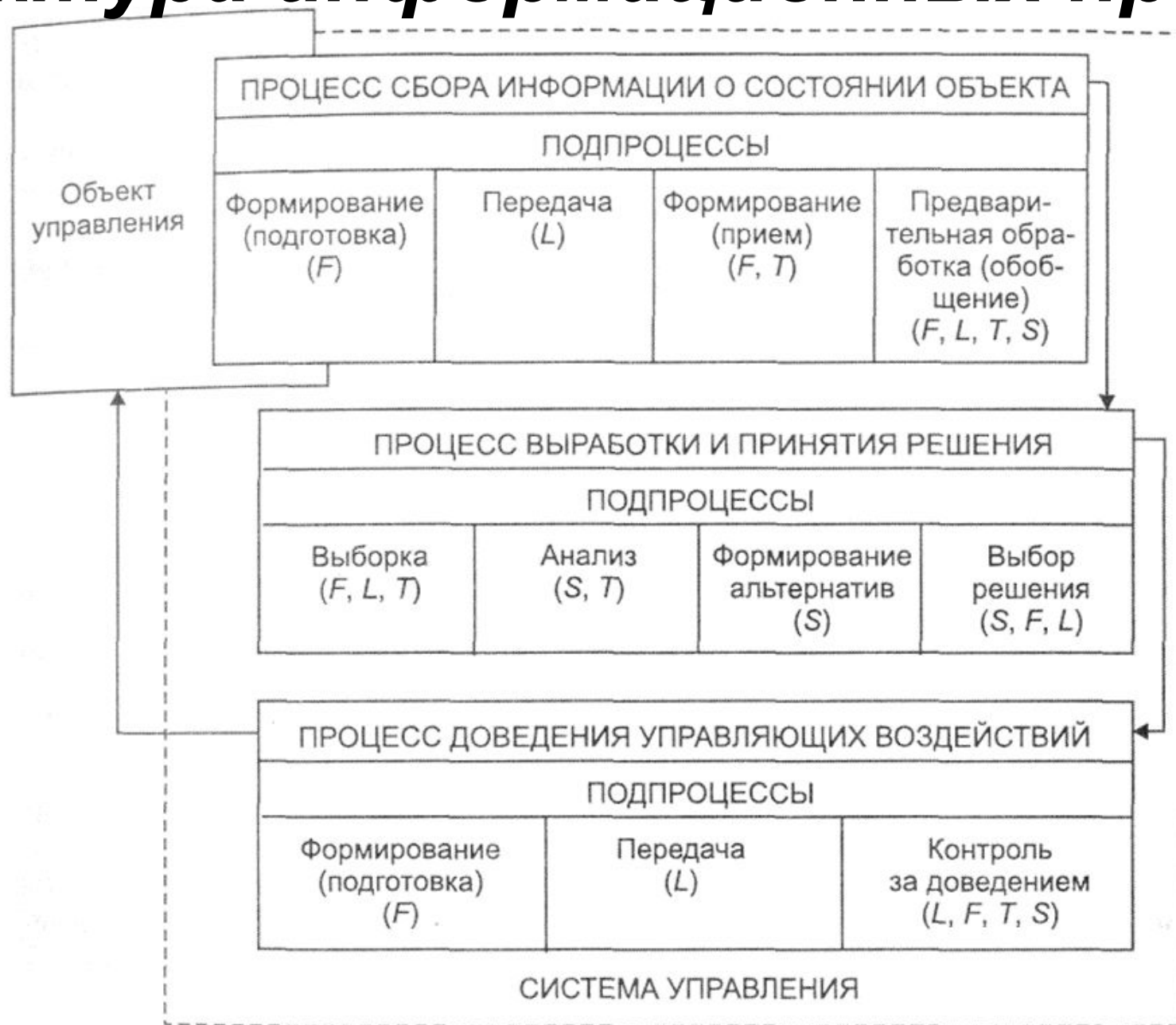
Сложный ветвящийся ИП



Сложный ИП с размножением



Структура информационных процессов



Процедура информационного анализа:

определение потребности в информации на каждой стадии управления;

планирование потребностей в информации;

определение количественных и качественных характеристик коммуникационных процессов;

определение потребности в информации при оценке эффективности управленческих решений (воздействий).

К показателям информации относятся:

объем и скорость передачи информации;

достоверность передаваемых сообщений;

направление информационных потоков;

характеристики методов обработки информации и совершаемые при этом ошибки;

качественный состав информации;

количество обрабатываемых или передаваемых документов;

суммарное количество обрабатываемых или передаваемых документов.

Параметрический анализ систем управления

Сущностью анализа является определение необходимой и достаточной совокупности показателей, характеризующих все исследуемые свойства системы, и формирование зависимостей, характеризующих суммарный эффект от применения системы или ее элементов.

Цель — оценка эффективности системы управления на основе определения количественных значений ее показателей.

Объектами исследования параметрического анализа являются частные и обобщенные показатели системы, образующие иерархическую структуру.

Анализ линейных непрерывных систем

Система обладает свойством **аддитивности**, если сумма входов $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ порождает сумму выходов $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Система является **гомогенной**, если умножение входа на некоторый постоянный коэффициент соответствует умножению выхода на этот же коэффициент. Другими словами, вход αu_1 порождает выход αy_1 , где α — постоянный коэффициент.

Система является **линейной**, если она удовлетворяет свойствам **аддитивности и гомогенности**.

Система **инвариантна во времени**, если реакция на сдвинутый во времени вход является сдвинутой по времени исходной реакцией, т. е. если вход $u(t)$ вызывает реакцию $y(t)$, то вход $u'(t) = u(t + \tau)$ вызывает реакцию $y'(t) = y(t + \tau)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Динамические модели объектов и систем управления можно разбить на два основных типа:

ВХОД - ВЫХОД

В основе – передаточная функция $W(p)$

ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД - «Пространство состояний»

В основе – матрично-векторный способ описания.

Матрицы A, B, C, D .

Для описания динамики непрерывного линейного объекта, имеющего вход $u(t)$ и выход $y(t)$, довольно часто используется дифференциальное уравнение первого,

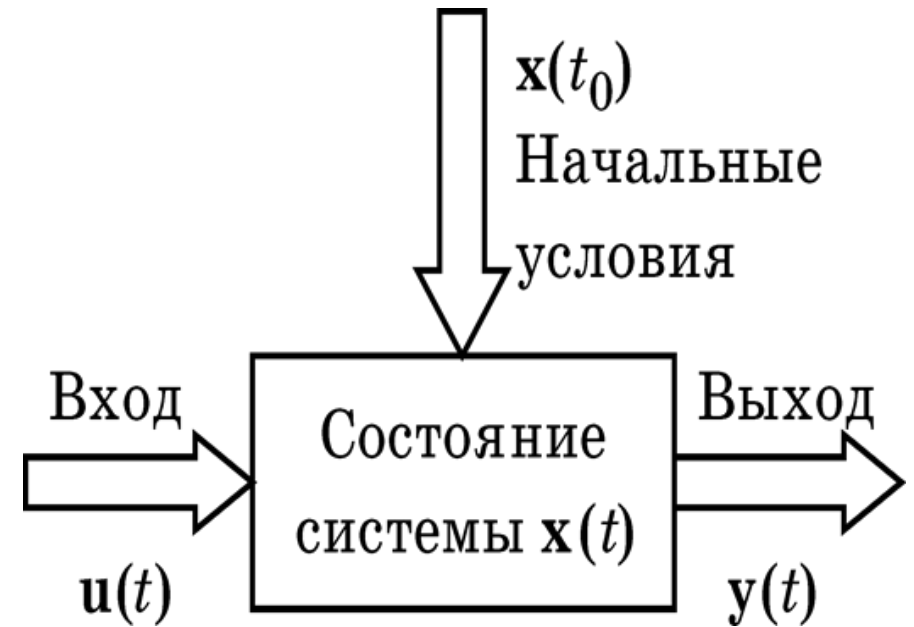
$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y(t) = b_0 u(t),$$

второго

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y(t) = b_0 u(t)$$

или более высокого порядка. В дифференциальных уравнениях a_0, a_1, a_2, b_0 — постоянные коэффициенты.

Представление моделей объектов и систем управления в **пространстве состояний** широко используется в теории управления, начиная с работ Калмана, опубликованных в 1960 г. Метод пространства состояний может быть использован для описания как линейных, так и нелинейных систем.



Состояние системы — это совокупность таких переменных, знание которых совместно со знанием входных переменных, функций и уравнений, описывающих динамику системы, позволяет определить ее будущее состояние и выходную переменную.

Устойчивость линейных систем

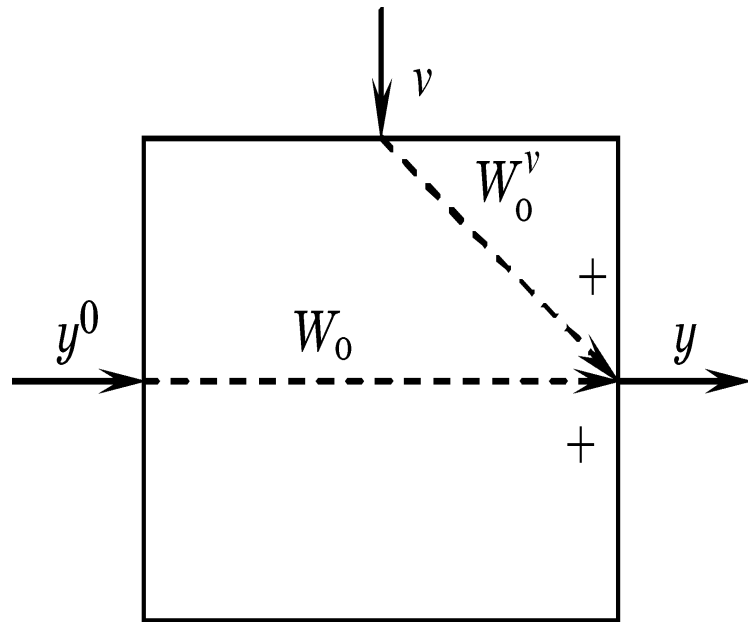
Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы состоит в том, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения имели отрицательную действительную часть.

Критерии устойчивости:

А. Гурвица, Э.Д. Рауса, А.В. Михайлова, Г. Найквиста,

ИНВАРИАНТНОСТЬ, КОВАРИАНТНОСТЬ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Одна из важнейших задач системы управления состоит в значительном снижении влияния возмущения на управляемую переменную или достижения независимости (инвариантности) управляемой переменной от возмущения

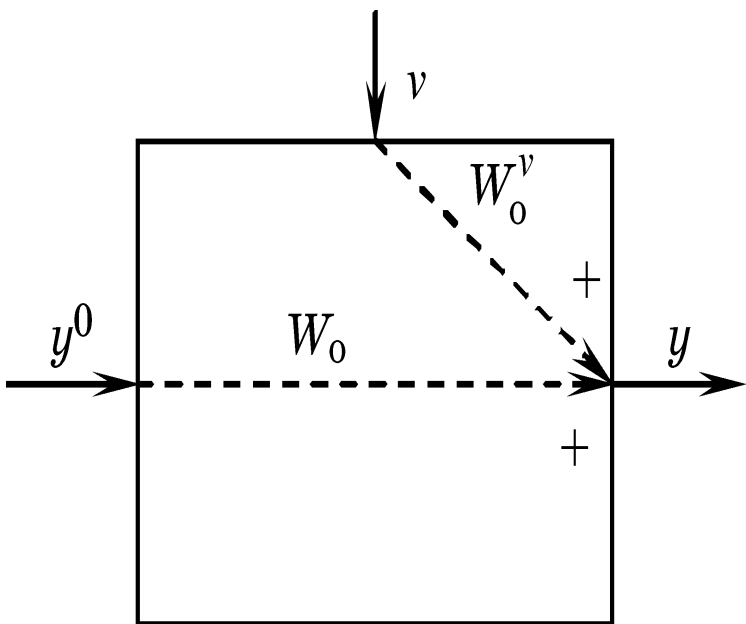


Под **инвариантностью** системы управления понимается независимость ее выхода $y(t)$ от возмущения $v(t)$

Под **ковариантностью** системы управления понимается зависимость выхода $y(t)$ от задания $y^0(t)$.

Чувствительностью называется количественная оценка влияния малых изменений свойств элементов на свойства системы.

Формы инвариантности и ковариантности



$$Y(s) = W_0(s)Y^0(s) + W_0^v(s)V(s).$$

Абсолютная инвариантность

предполагает равенство нулю передаточной функции по каналу

возмущения для всех значений s

$$\forall s: W_0^v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = 0.$$

Абсолютная ковариантность управляемой переменной y с задающим воздействием y^0 предполагает равенство единице передаточной функции по каналу управления для всех значений s

$$\forall s: W_0(s) = \frac{Y(s)}{Y^0(s)} = 1.$$

Реализация абсолютной инвариантности сложно, поэтому добавляются условия инвариантности до ε , ограничивая степень и порядок полинома числителя передаточной функции. Имеет место **селективная инвариантность** системы на некоторые типы воздействий.

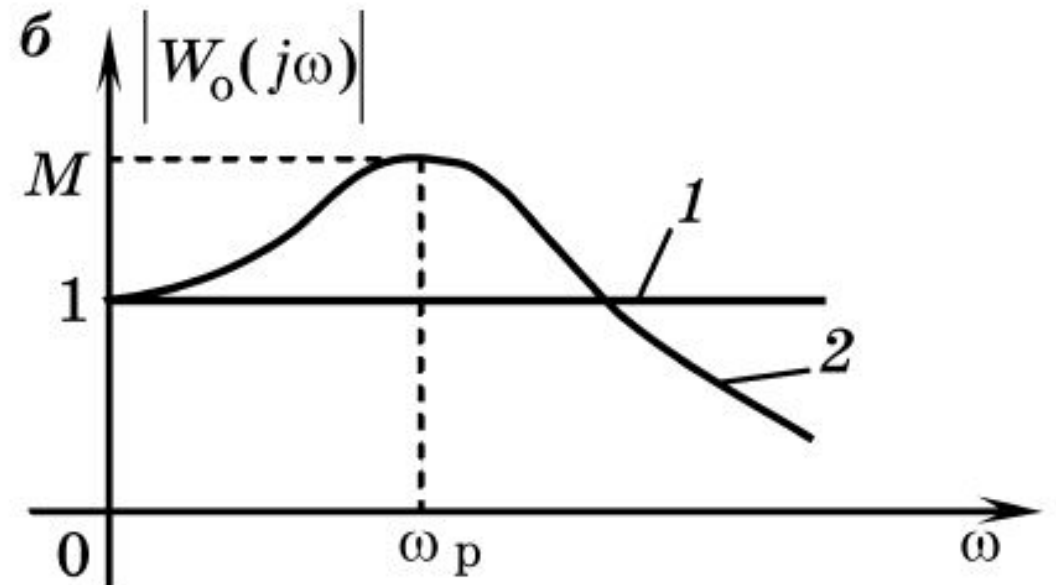
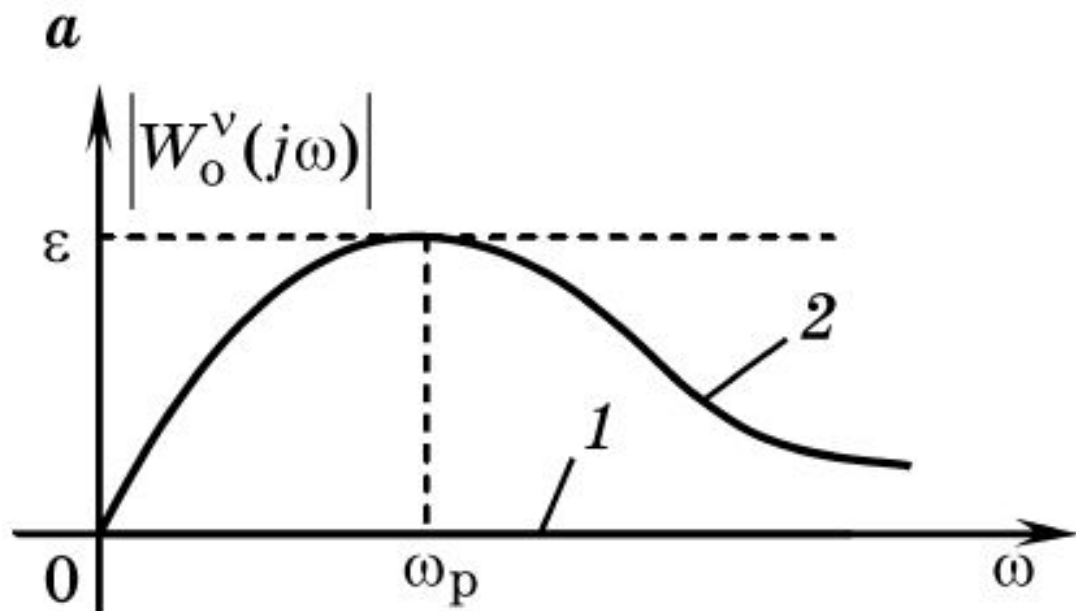
$$\forall s: |W_o^v(s)| < \varepsilon.$$

Селективная абсолютная инвариантность записывается как условие равенства нулю передаточной функции системы на полюсах p_k изображения возмущения

$$\forall p_k: W_o^v(p_k) = 0.$$

Селективная инвариантность до ε предполагает ограниченную установившуюся реакцию системы на воздействие определенного типа

$$\forall p_k: |W_o^v(p_k)| < \varepsilon.$$

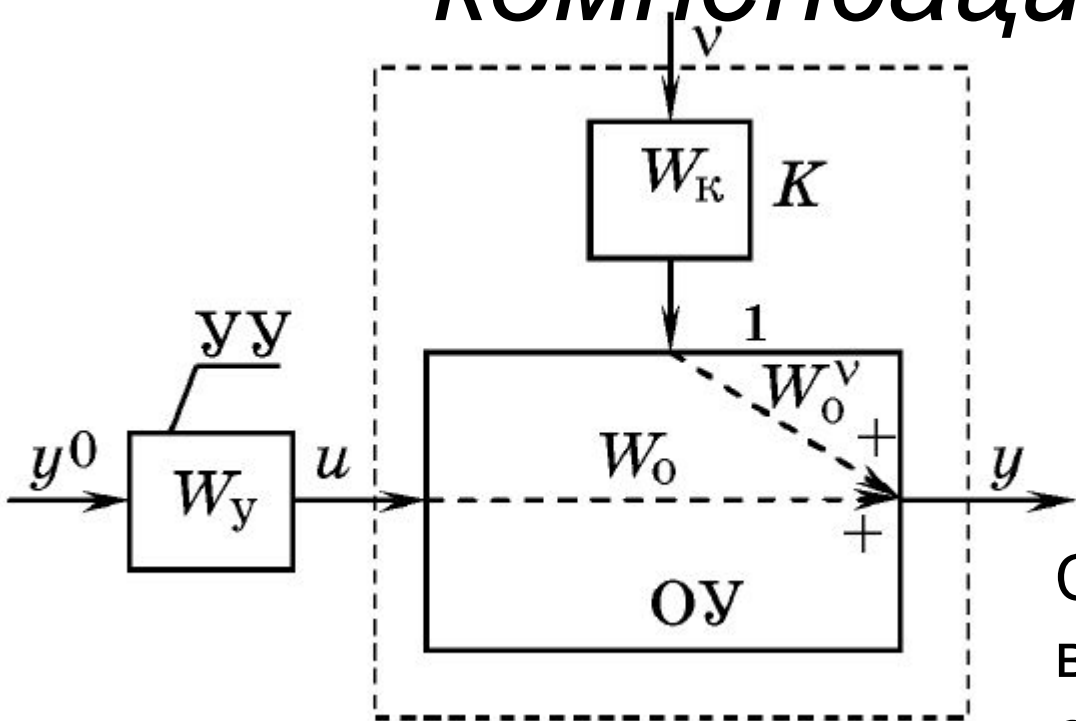


На рисунке а изображены графики **абсолютно инвариантной** (1) и **инвариантной до ϵ** (2) систем. АЧХ **абсолютно ковариантной** (1) и **ковариантной до ϵ** (2) приведены на рисунке б. Здесь ω_p — резонансная частота; M — показатель колебательности.

Инвариантность систем с типовой структурой

Различают три основных вида инвариантности:
последовательную и параллельную компенсацию возмущений, и
компенсацию возмущений в системах с обратной связью.

Последовательную компенсацию



Абсолютная инвариантность выходной переменной справедлива, при выполнении условия

$$W_0^v(s)W_K(s) = 0,$$

Инвариантность до ε достигается, если

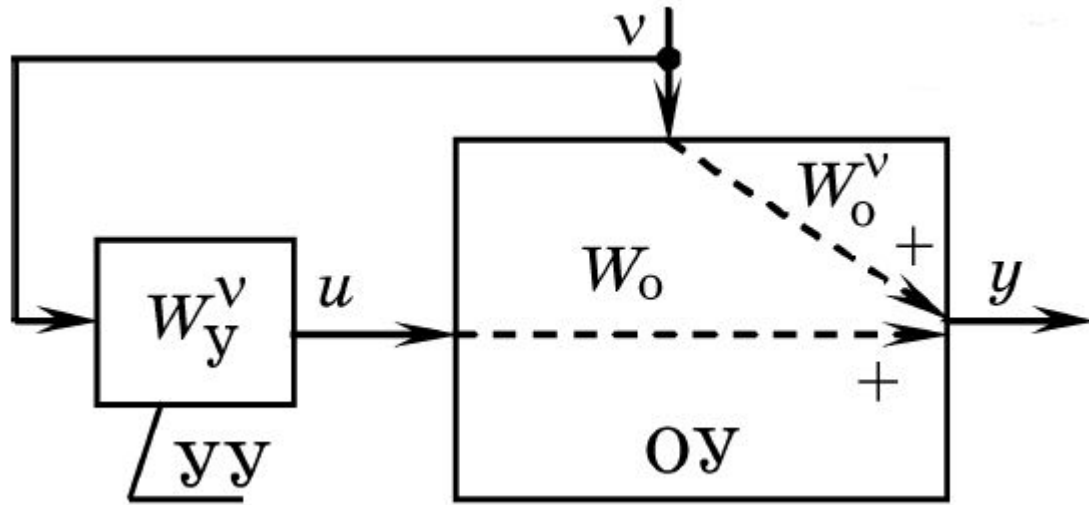
$$\forall s: |W_0^v(s)W_K(s)| < \varepsilon$$

Селективная абсолютная инвариантность к воздействию

с полюсами p_K имеет место, когда

$$\forall p_K: W_0(p_K)W_K(p_K) = 0$$

Параллельная компенсация



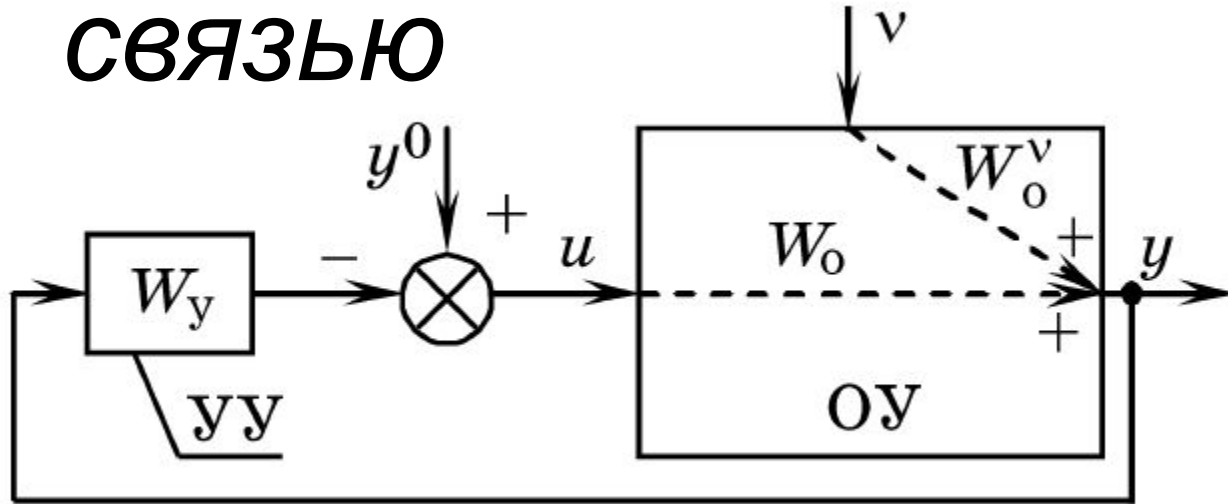
Абсолютная инвариантность выхода объекта y к возмущению v достигается при выполнении условия

$$W_o^v(s) + W_y^v(s) \cdot W_o(s) = 0$$

$$W_y^v(s) = -\frac{W_o^v(s)}{W_o(s)}$$

Компенсацию в системе с обратной

связью



Абсолютная инвариантность управляемой переменной достигается при тождественном равенстве нулю передаточной функции

$$W^v(s) = \frac{W_o^v(s)}{1 + W_o(s)W_y(s)}$$

Условие абсолютной инвариантности только за счет обратной связи не может быть реализовано.

$$|W_o(s)W_y(s)| \rightarrow \infty.$$

Чувствительность систем управления

Помимо воздействия среды, на систему оказывает влияние изменение параметров операторов преобразования, составляющих эту систему.

Если такие операторы во времени меняются заметно, то систему называют **нестационарной** и описывается она дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Если изменения операторов во времени протекают намного медленнее собственных вынужденных процессов звеньев (звеньев) **нестационарности**, то это приводит к большим изменениям свойств систем в целом и, в частности, к потере устойчивости. Система должна быть грубой или малочувствительной к вариациям операторов звеньев.

Абсолютная чувствительность передаточной функции системы $\Phi(s)$ к вариации передаточной функции звена $W(s)$ определяется как частная производная

$$\mathfrak{J}_W^\Phi(s) = \frac{\partial \Phi(s)}{\partial W(s)},$$

Относительная чувствительность S_W^Φ отражает связь между относительными вариациями передаточных функций или частотных характеристик

$$\frac{\delta \Phi}{\Phi} = S_W^\Phi \frac{\delta W}{W}.$$

Выражение связи между относительной и абсолютной функциями чувствительности

$$S_W^\Phi(s) = \mathfrak{J}_W^\Phi(s) \frac{W(s)}{\Phi(s)}.$$

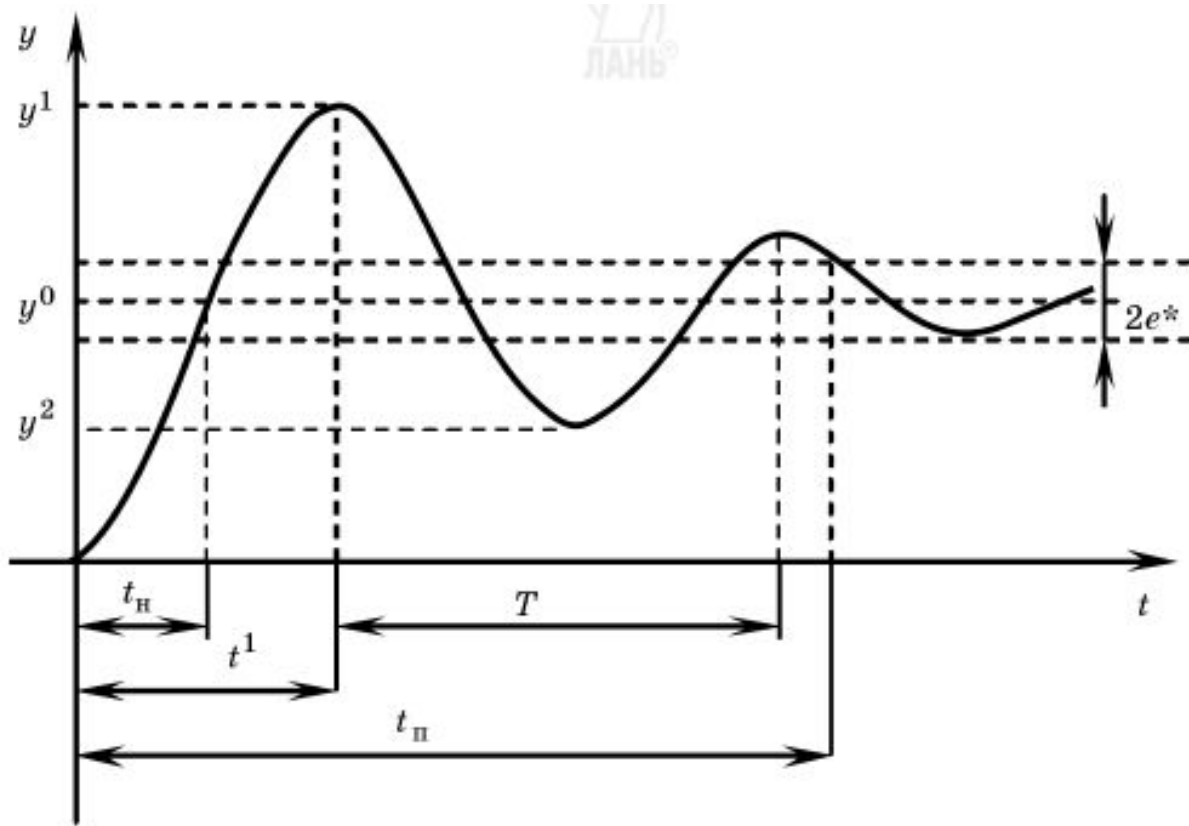
АНАЛИЗ КАЧЕСТВА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Прямые показатели качества определяются непосредственно из переходного процесса системы. К ним относятся ошибка управления, быстродействие, перерегулирование и интегральные оценки качества.

Косвенные показатели качества процессов управления получают без использования переходных процессов. При этом различают корневые и частотные косвенные оценки качества.

Точность системы в установившемся режиме характеризуется статической ошибкой, которая может быть определена на основании передаточной функции системы и некоторых свойств преобразования Лапласа.

К **прямым показателям качества**, получаемым на основании графика переходного процесса, относятся: ошибка управления, быстродействие, перерегулирование и интегральные оценки



1) **время регулирования** или длительность переходного процесса t_n — минимальное время, за которое регулируемая величина y станет близкой к заданной y^0 с требуемой точностью e^* $|y(t) - y^0| \leq e^*$

2) **перерегулирование** σ — максимальное отклонение в процентах от y_0

$$\sigma = \frac{y^1 - y^0}{y^0} \cdot 100\%.$$

3) **время достижения первого максимума** t_1 ;

4) **время нарастания** переходного процесса t_n до первого пересечения с y_0 ;

5) **декремент затухания** $\chi = \frac{|y^1 - y^0|}{|y^2 - y^0|}$ характеризует величину падения амплитуды за

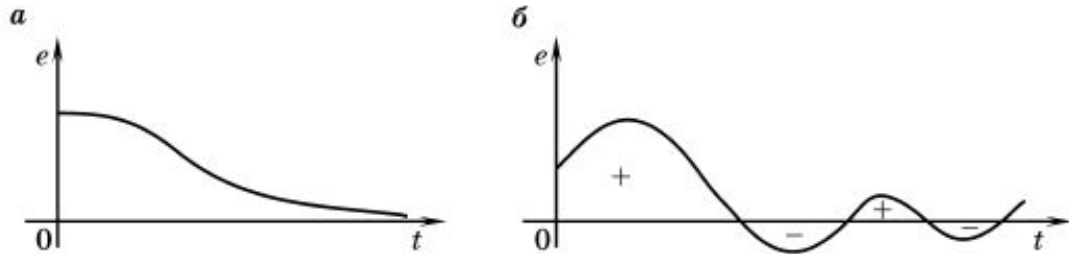
половину периода колебания;

6) **установившееся значение выхода** $y(\infty)$.

Интегральные показатели качества, как правило, оценивают переходный процесс по динамической ошибке $e(t) = y_0 - y(t)$ в наиболее сжатом виде — кривой $e(t)$ ставится в соответствие число. Чем меньше величина интегрального показателя, тем выше качество переходного процесса САУ.

Линейный интегральный показатель качества $I_1 = \int_0^t e(\tau) d\tau$,

Дает объективные результаты только для монотонного переходного процесса



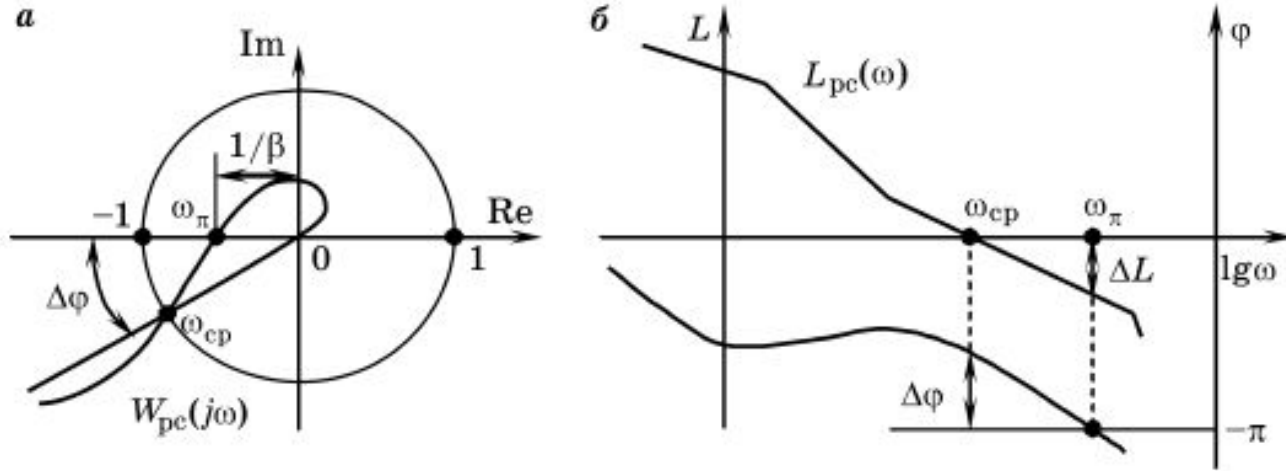
Интегральный квадратический показатель

$$I_2 = \int_0^t e^2(\tau) d\tau$$

Интегральный модульный
показатель

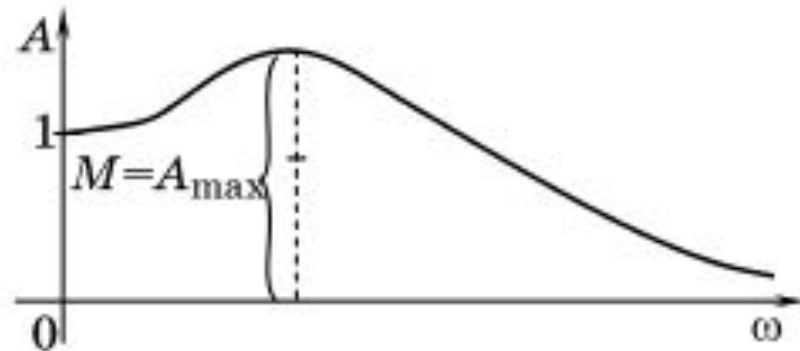
$$I_3 = \int_0^t |e(\tau)| d\tau.$$

Косвенные показатели качества



Запас устойчивости по модулю
Запас устойчивости по фазе

Показатель колебательности — максимальное значение A_{max} АЧХ замкнутой системы



Корневые оценки качества основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы.

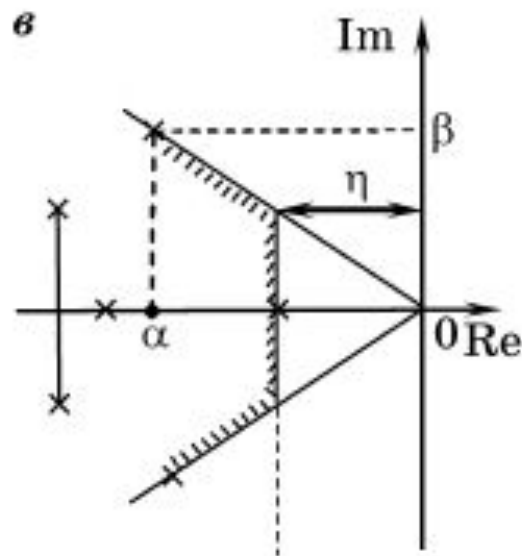
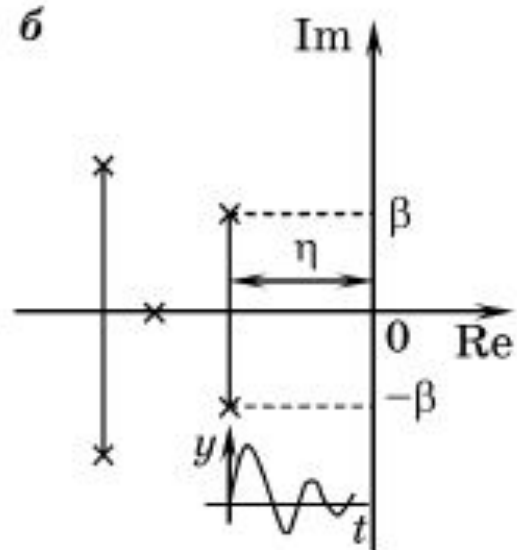
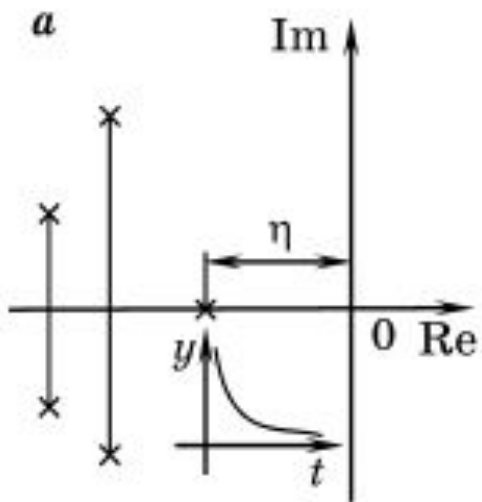
Степень устойчивости — это расстояние η от мнимой оси до ближайшего корня на плоскости корней

Время регулирования
Перерегулирование

$$t_{\text{п}} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}$$

$$\sigma = 100 \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\mu}\right) \%.$$

Колебательность $\mu = \max_i \frac{\beta_i}{\alpha_i},$



МЕТОД КОРНЕВОГО

ГОДОГРАФА

Качество переходного процесса системы управления зависит от положения корней ее характеристического уравнения на s -плоскости.

Положение корней зависит от значений одного или нескольких параметров системы. Меняя эти значения можно проанализировать, как

перемещаются корни характеристического уравнения или какова траектория корней на s -плоскости. Такой подход называется

Корневым годографом (КГ) называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы. **методом корневого годографа** и был предложен Эвансом в 1948

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Все реальные системы управления — нелинейные!

Линейные модели систем являются идеализациями реальных систем.

Свойства движений нелинейной системы в общем случае являются локальными и не распространяются на все пространство состояний, в этом смысле фазовый портрет нелинейной системы оказывается неоднородным. Поэтому устойчивость нелинейной системы зависит не только от параметров системы, но и от начальных условий и возмущений, тогда как устойчивость линейной системы зависит только от параметров системы.

Математической моделью движения управляемой нелинейной

(

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \quad \mathbf{x}(0);$$

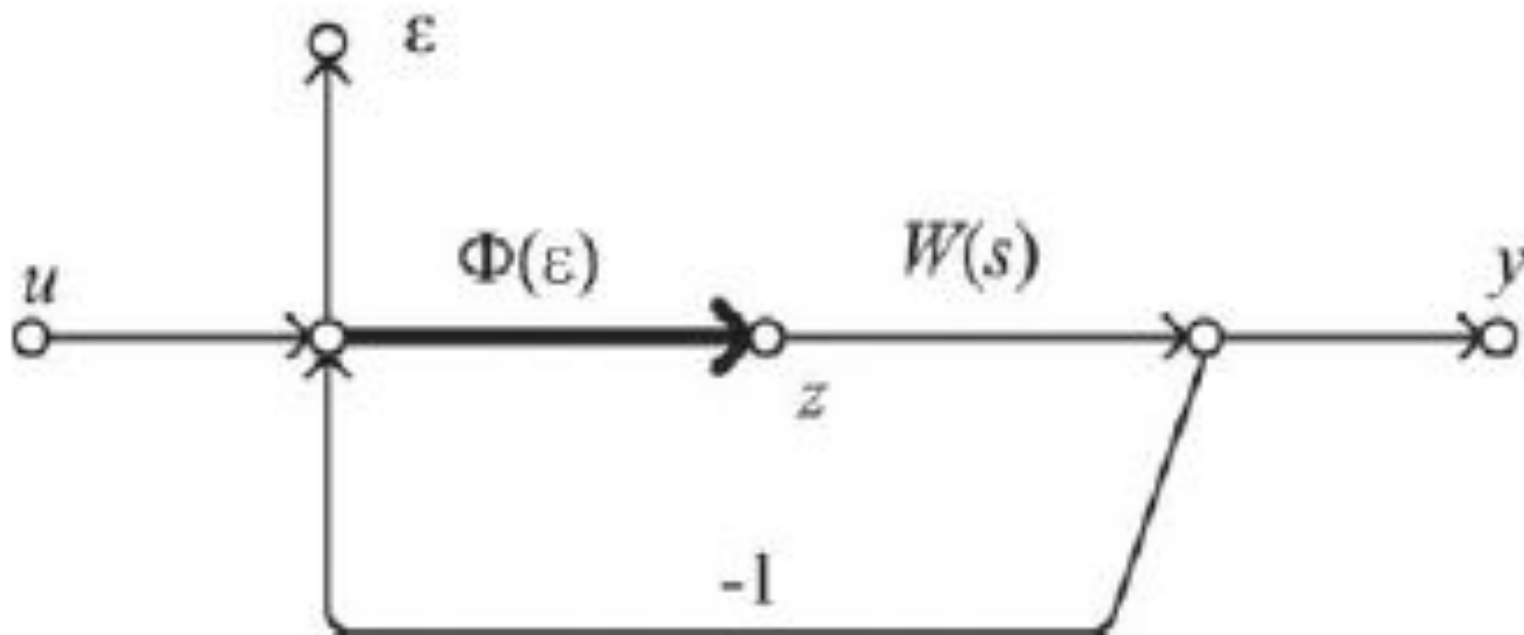
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

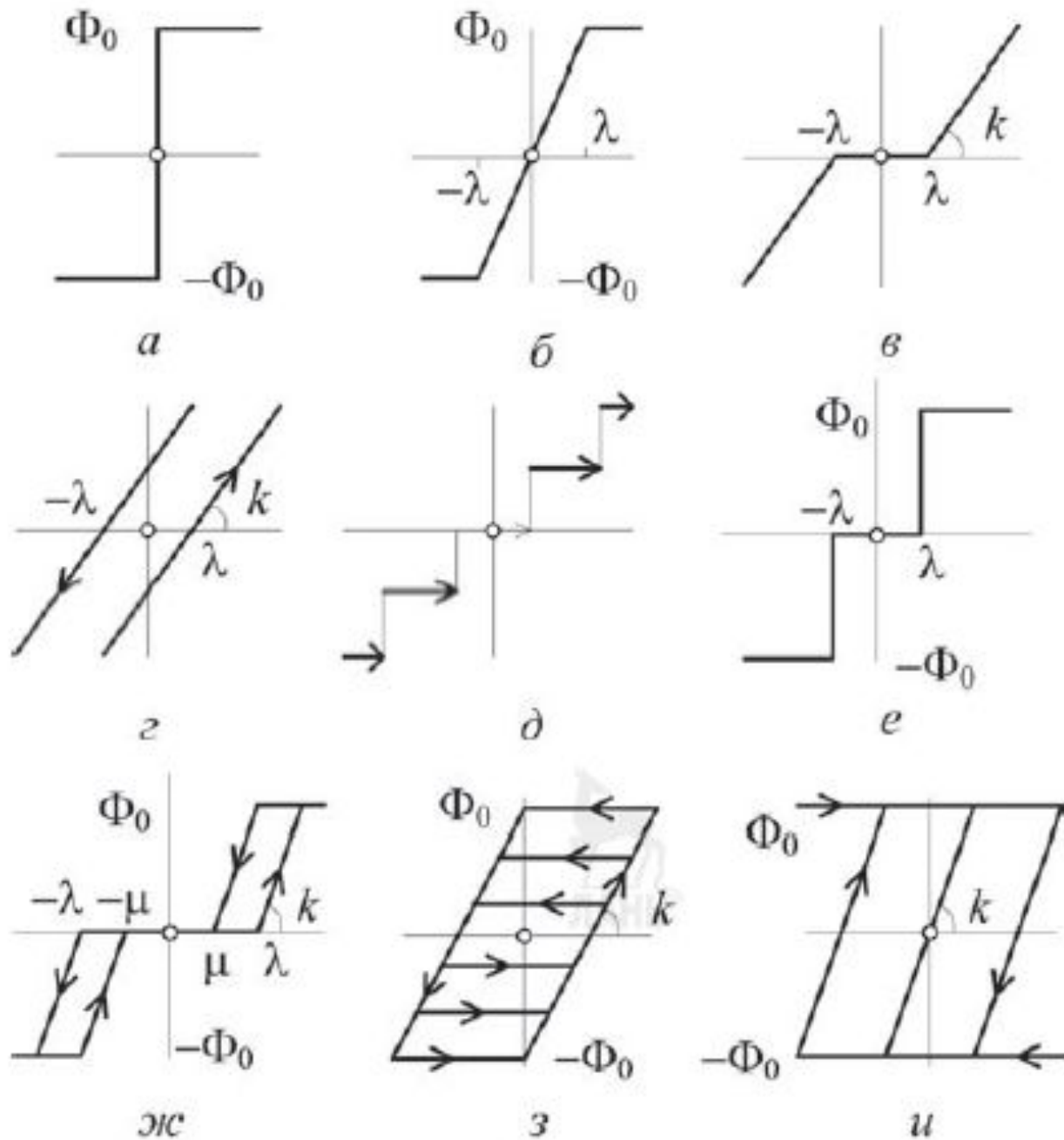
$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T$ —
вектор управления и вектор выхода
системы соответственно.

Решение нелинейного дифференциального уравнения — модели движения нелинейной системы определяет траекторию в пространстве состояния, называемую **фазовой траекторией**, или фазовым движением системы.

Совокупность всех фазовых траекторий образует **фазовый портрет системы**. Определенная таким образом модель носит название внутренней модели нелинейной системы.

Внешняя математическая модель или модель типа вход-выход нелинейной автоматической системы представляется канонической структурой и содержит описание нелинейного звена $z = \Phi(\varepsilon)$ и внешнюю модель $W(s)$ — передаточную функцию линейной части системы.





Характеристики «ВХОД-ВЫХОД»
основных нелинейных
элементов:

а — идеального реле;

б — насыщения;

в — нечувствительности;

г — гистерезиса;

д — аналого-цифрового
преобразователя;

е — идеального
трехпозиционного реле;

ж — насыщения с зоной
нечувствительности и
гистерезисом;

з — «люфт»;

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Топологические методы анализа являются не только качественными, но и количественными методами исследования нелинейных систем. Эти методы применимы к автономным управляемым и неуправляемым системам, при этом решение дифференциальных уравнений— модели движения системы ищется не как явная функция времени, а в виде интегральной кривой в пространстве координат состояния.

Интегральная кривая $x(t)$ — это график решения системы. В каждой точке пространства состояния системы определен вектор $F(x)$, который имеет кинематический смысл вектора мгновенной скорости движения изображающей точки по интегральной кривой. Пространство состояний системы, в котором решения интерпретируются как движение по интегральным кривым называется **фазовым пространством** системы, траектории движения — **фазовые траектории**, вектор $F(x)$ — вектор фазовой скорости, а его компоненты — фазовые скорости, $x(t)$ — изображающая, или фазовая точка. Совокупность всех фазовых кривых системы образует ее **фазовый портрет**. Точка x^* , в которой $F(x^*) = 0$, называется **особой**, или **сингулярной**. В особой точке вектор фазовой скорости равен нулю, поэтому особые точки есть **точки покоя**, или **точки равновесия**.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2).$$

$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$, уравнение **фазовых траекторий** на фазовой плоскости

Особые точки фазового портрета системы определяют систему уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Основным графическим методом построения траекторий фазового портрета системы является **метод изоклин**.

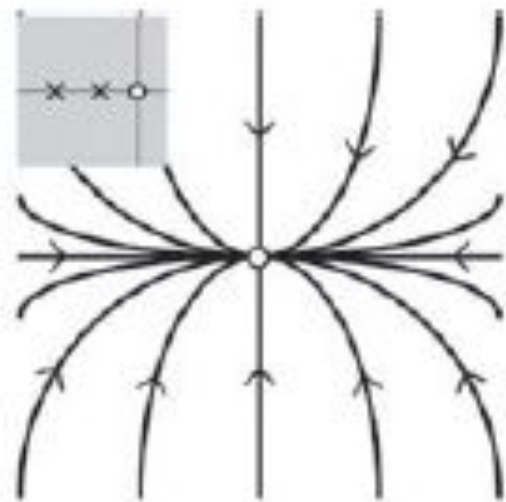
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = J(x_1, x_2) = C.$$

Уравнение J определяет изоклину наклона C

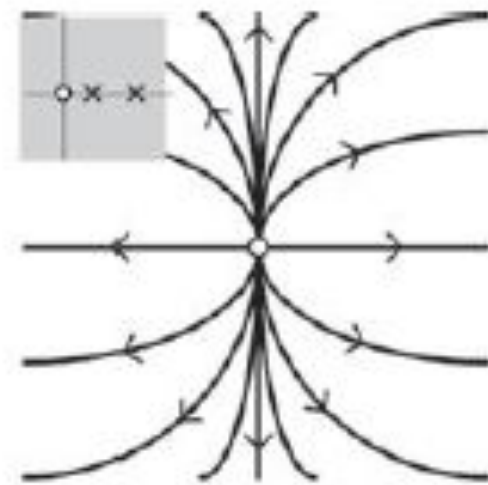
• Характеристические числа λ_1, λ_2 — **действительные**, одного знака и различные. Локальный портрет в особой точке назван **узлом**, причем **устойчивым узлом** (рис. а), если λ_1, λ_2 — отрицательные и

неустойчивым узлом (рис. б), если λ_1, λ_2 — положительные.

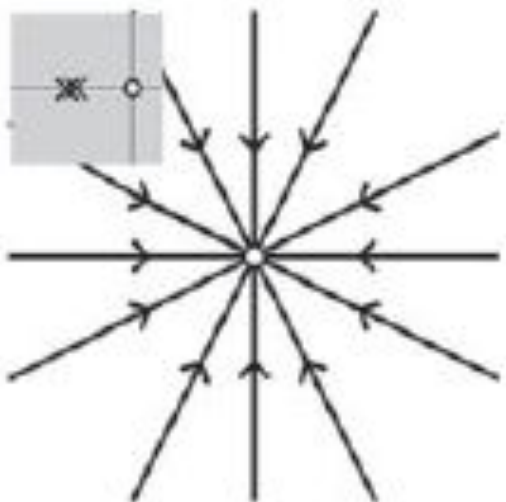
• Характеристические числа λ_1, λ_2 — действительные, одного знака, но равные. Локальный портрет в особой точке назван **вырожденным узлом** (рис. в, г).



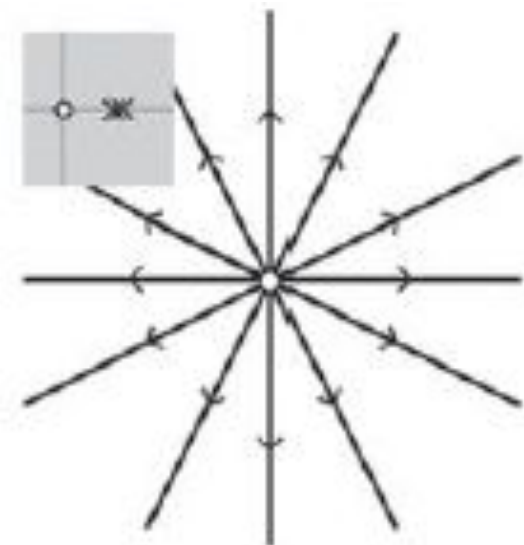
а



б



в



г

- Характеристические числа λ_1 , λ_2 - **действительные**, разных знаков.

Локальный портрет в особой точке назван **седлом** (рис. д).

- Характеристические числа λ_1 , λ_2 - **комплексные**. Локальный портрет в особой точке назван **фокусом** (рис. е, ж),

устойчивым,

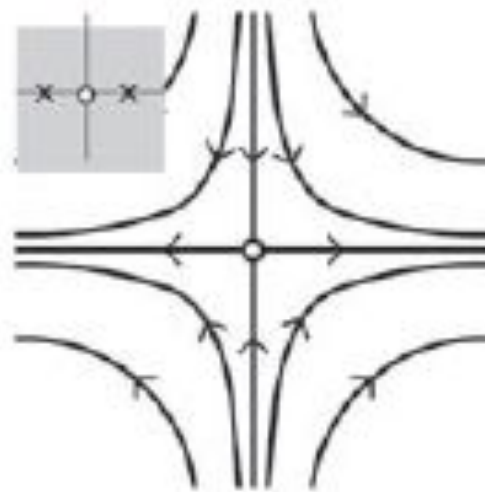
если корни — левые и

неустойчивым, если корни —

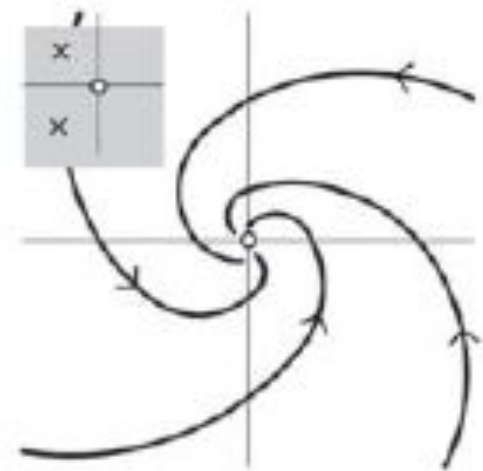
правые. Локальный портрет в Особой точке назван **центром**

(рис. з), когда

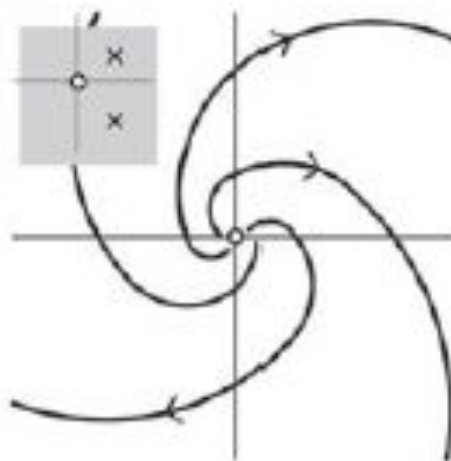
характеристические числа



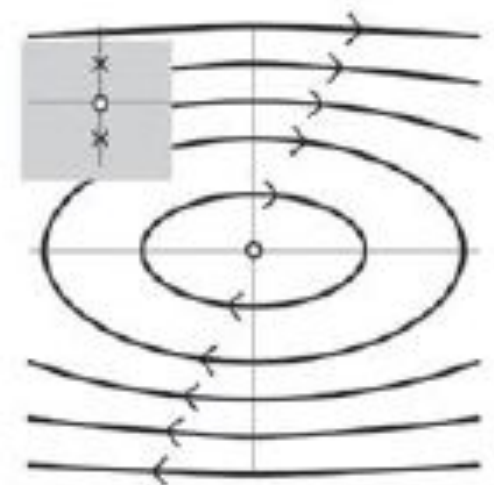
д



е

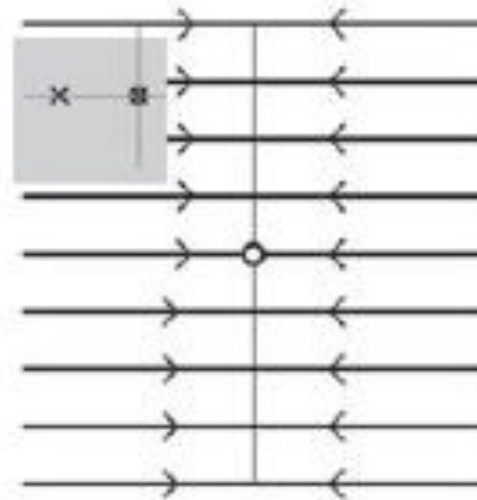


ж

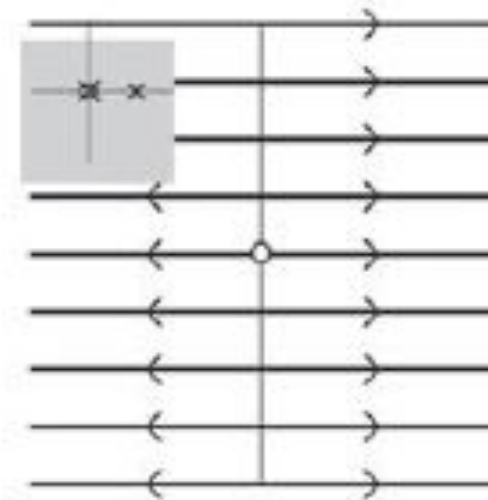


з

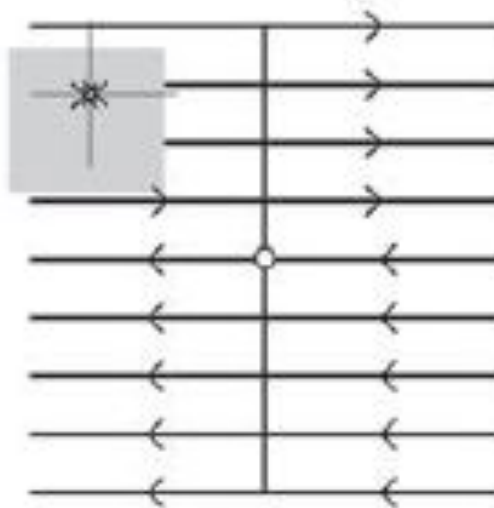
Среди характеристических чисел есть равные нулю.
 Локальный портрет в особой точке — параллельные прямые. Если лишь одно число равно нулю (рис. и, к), то множество особых точек — прямая $x_1 = 0$.
 Если оба характеристических числа равны нулю (рис. л), то множество особых точек либо прямая $x_2 = 0$, либо любая точка фазовой плоскости.



и



к



л

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Линеаризация как представление модели нелинейной системы в линейном виде является простейшим методом, который позволяет использовать аналитический аппарат теории линейных систем для анализа нелинейных систем.

Известны три основных метода линеаризации:

Касательная, Гармоническая, Стохастическая.

Касательная линеаризация осуществляется в предположении, что движение нелинейной системы происходит в достаточно малой окрестности рабочей точки пространства состояния системы.

Параметры линеаризованной системы находят из разложения нелинейной модели в ряд Тейлора по степеням малых отклонений от рабочей точки или методом наименьших квадратов Гаусса.

Гармоническая линеаризация

осуществляется не во временной области, а в частотной, для систем, работающих с гармоническими сигналами.

Суть метода состоит в том, что при наличии фильтрующих свойств у линейных элементов системы, в установившейся реакции на гармонический входной сигнал учитывается лишь основная гармоническая составляющая.

Стохастическая линеаризация

осуществляется во временной области для систем, испытывающих случайные возмущения.

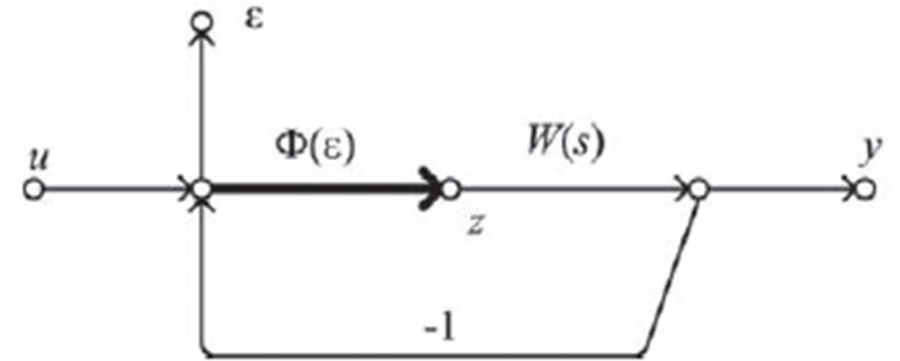
Метод состоит в аппроксимации нелинейной модели статистически эквивалентным линейным оператором.

Метод гармонической линеаризации

(Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, 1934), основывается на трех допущениях

1. выходной сигнал системы является периодическим и его частота совпадает с частотой входного гармонического сигнала;

2. структура системы содержит один нелинейный элемент, характеристика которого стационарна и кососимметрична



3. линейная часть системы обладает свойствами низкочастотного фильтра, что позволяет подавлять высшие гармоники в выходном сигнале.

Пусть входной сигнал нелинейного элемента системы является гармоническим $\varepsilon(t) = A \sin(\omega t)$, выходной сигнал нелинейного элемента с характеристикой $z = \Phi(\varepsilon)$ представляется сигналом $z(t) = \Phi(A \sin(\omega t))$. Разложим этот сигнал в ряд Фурье:

$$z(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\omega t + C_k \sin k\omega t).$$

В силу допущений метода $B_0 = 0$, $B_k = C_k = 0$, $k > 1$ поэтому $z(t) = B_1 \cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t)$, где

$$B_1 = (\Phi(A \sin \omega t), \cos \omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t;$$

$$C_1 = (\Phi(A \sin \omega t), \sin \omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t.$$

Обозначи $D^2 = B_1^2 + C_1^2$; $B_1 = D \sin \varphi$, $C_1 = D \cos \varphi$, получи
в

$$z(t) \simeq D \sin(t + \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{C_1}.$$

Выходной сигнал нелинейного элемента оказывается почти гармоническим. Нелинейный элемент ведет себя почти как линейное звено.

Найдем передаточную функцию этого псевдолинейного звена, для чего воспользуемся комплексной формой записи входного и выходного гармонических сигналов:

$$\varepsilon^*(t) = \operatorname{Im} A e^{j\omega t},$$

$$z^*(t) = \operatorname{Im} D e^{j(\omega t + \varphi)},$$

$$N(A; \omega) = \frac{z^*(t)}{\varepsilon^*(t)} = \frac{D}{A} e^{j\varphi}.$$

Выражение $N(A; \omega)$ называют **эквивалентной передаточной функцией**, или описывающей функцией, или комплексным передаточным коэффициентом нелинейного элемента системы.

$$N(A; \omega) = \frac{D}{A} \cos \varphi + j \frac{D}{A} \sin \varphi = k_1(A; \omega) + j k_2(A; \omega),$$

Где $k_1(A; \omega) = \frac{C_1}{A}$; $k_2(A; \omega) = \frac{B_1}{A}$ действительный и мнимый

коэффициенты гармонической линеаризации.

Описывающая функция $N(A; \omega)$ является комплексной функцией амплитуды гармонического входного воздействия, при этом частота входного сигнала оказывается параметром.

Описывающая функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента порождает семейство $\{N(A) : A \in [0, \infty), \omega = \text{const}\}$, который представляет собой эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного элемента.

Изменяя частоту входного гармонического сигнала как параметр, можно получить семейство $\{N(A) : A \in [0, \infty), \omega = \text{var}\}$.

Коэффициенты гармонической линеаризации находят из выражений:

$$k_1(A) = \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t;$$

$$k_2(A) = \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} \Phi(A \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t.$$

Заметим, что для однозначных характеристик нелинейных звеньев

$$N(A) = k_1(A), \quad k_2(A) = 0.$$

Стохастическая

линеаризация
Пусть $\varepsilon(t)$ — стационарный эргодический случайный процесс с нулевым средним, тогда и выходной сигнал стационарной нечетной не линейности $\Phi(\varepsilon)$ оказывается стационарным эргодическим случайным процессом. В этих условиях определим линейную модель нелинейного звена из условия наилучшего среднеквадратичного

$$\hat{z} = K_s \varepsilon(t);$$

$$M [(z(t) - \hat{z}(t))^2] \rightarrow \min_{K_s}.$$

Назовем K_s **коэффициентом стохастической линеаризации**.

Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если любая его вероятностная характеристика, полученная усреднением по множеству возможных реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равна временному среднему, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени из одной единственной реализации случайного процесса. Из этого определения следует, что, эргодический процесс представляет собой такой процесс когда среднее по времени равно среднему по множеству возможных реализаций.

Свойство, эргодичности сильно упрощает экспериментальное определение вероятностных характеристик случайных стационарных процессов, поскольку позволяет заменить эксперимент на большом числе объектов экспериментом на одном из них, правда, в течение достаточно длительного времени и, соответственно, статистической обработкой одной реализации случайного процесса.

Выражение для коэффициента стохастической линеаризации найдем, применив необходимые условия экстремума к функции

$$M [(z(t) - K_s \varepsilon(t))^2],$$

получим

соотношение

$$M[(z(t) - K_s \varepsilon(t))\varepsilon(t)] = 0.$$

Из этого соотношения находим,

что

$$K_s = \frac{M[z(t)\varepsilon(t)]}{M[z(t)z(t)]} = \frac{R_{z\varepsilon}(0)}{R_\varepsilon(0)},$$

где $R_{z\varepsilon}(0)$, $R_\varepsilon(0)$ — значения в нуле взаимной и автокорреляционной функций.

Пусть входной случайный процесс — шум с плотностью $f(\varepsilon)$, нулевым средним и дисперсией σ^2 , тогда коэффициент стохастической линеаризации можно найти из выражения:

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

В силу эргодичности случайных процессов входа и выхода коэффициент стохастической линеаризации может быть найден и по выражению

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \Phi(\varepsilon) \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

Если входной случайный процесс является *нормальным гауссовым процессом* и характеристика нелинейности непрерывно дифференцируемая, то выражение для коэффициента стохастической линеаризации оказывается более простым.

В самом деле, подставив в выражение для $K_s(\sigma)$ функцию одномерной нормальной плотности распределения вероятностей

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right),$$

получи

м

$$K_s(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varepsilon)\varepsilon \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon.$$

Теперь, выполнив преобразования под интегралом и учитывая нечетность характеристики нелинейности, получим

$$K_s(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \Phi(\varepsilon) d \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right).$$

После интегрирования по частям окончательно получим

$$K_s(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon.$$

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В МАЛОМ

Движения нелинейных систем гораздо более сложные и многообразные, чем движения линейных систем. Фазовые портреты нелинейных систем в общем случае неоднородны, могут иметь более чем одну точку покоя, изолированные замкнутые кривые и различные особенности.

Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову позволяют анализировать движения системы в окрестности положения покоя. Эти определения характеризуют свойство **устойчивости в малом** нелинейной системы, однако они не позволяют определять границы области устойчивости. Поэтому вводятся понятия **устойчивости в большом** и **устойчивости в целом**.

Для анализа устойчивости отдельных траекторий используют понятие **равномерной асимптотической устойчивости движения**, а для анализа замкнутых траекторий — понятие **орбитальной асимптотической устойчивости**.

Задачи об устойчивости замкнутых нелинейных систем управления движением при любых возмущениях и любых нелинейностях решают с использованием понятия **абсолютной устойчивости**.

Рассмотрим автономную нелинейную систему $F(x)$ и ее точку покоя x^* . Пусть $x(t) = x^* + \delta x(t)$, где $\delta x(t)$ — возмущение x^* . Найдем уравнение для возмущенного движения.

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(x^* + \delta x(t)) = F(x^* + \delta x(t)).$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $F(x^* + \delta x)$ в окрестности точки покоя

$$F(x^* + \delta x) = F(x^*) + J(x^*)\delta x + o(\delta x),$$

где $J(x^*)$ — матрица Якоби функции $F(x)$ в точке

x^* . Таким образом, уравнение возмущенного движения — первое приближение нелинейного уравнения можно представить в виде линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = J(x^*)\delta x(t).$$

Теорема (А. М. Ляпунов, 1892). Если вещественные части всех собственных чисел матрицы $J(x^*)$ первого приближения системы $\dot{B}(x)$ отрицательны, то положение равновесия x^* является асимптотически устойчивым.

Если среди собственных чисел матрицы $J(x^*)$ первого приближения системы $\dot{x} = F(x)$ найдется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то положение равновесия x^* — неустойчиво. Если среди собственных чисел матрицы $J(x^*)$ первого приближения системы $\dot{x} = F(x)$ найдется хотя бы одно с нулевой вещественной частью, а остальные с отрицательной, то устойчивость положения равновесия x^* по первому приближению даже в малом установить нельзя.

Пример

Исследовать устойчивость в малом особых точек системы первого порядка $\dot{x} = \sin(x)$

Система имеет счетное множество точек покоя $\{\pi k, k = 0, 1, \dots\}$.

В точках $\{\pi(2k + 1)\}$ имеет место локальная асимптотическая устойчивость, поскольку в этих точках собственное число системы отрицательное, равное -1 . В точках $\{2\pi k\}$ собственное число системы равно 1 , поэтому в этих точках имеет место неустойчивость в малом.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В БОЛЬШОМ И В ЦЕЛОМ

Положение равновесия x^* системы *асимптотически устойчиво в большом* по отношению к области G , если x^* устойчиво и всякая траектория, которая начинается в G стремится к x^* с ростом времени.

Если при этом G совпадает со всем фазовым пространством, то имеет место *асимптотическая устойчивость в целом*.

Фундаментальным методом исследования устойчивости движения является второй метод Ляпунова, основное достоинство которого состоит в том, что он позволяет судить об устойчивости не отыскивая при этом точного движения нелинейной системы.

В основе метода Ляпунова лежит аналитическое обобщение физического факта: при движении к положению равновесия полная энергия устойчивой автономной системы уменьшается, достигая минимума в точке покоя.

Скалярную функцию векторного аргумента $V(x)$ непрерывную вместе со своими первыми частными производными в некоторой области G , содержащей начало координат, называют функцией Ляпунова системы $\dot{x} = F(x)$, если $V(x)$ в области G является **положительно определенной** и ее полная производная по времени в силу этой системы $\dot{V}(x)$ является в области G **отрицательно полуопределенной**.

Теоремы (А. М. Ляпунов, 1892)

1. **Об устойчивости в большом.** Если в некоторой ограниченной области G ,

$$\dot{x} = F(x)$$

включающей начало координат $F(0) = 0$, для системы существует

ограниченная функция Ляпунова этой системы, то начало координат **устойчиво в большом** относительно области G .

2. **Об асимптотической устойчивости в большом.** Если в условиях первой теоремы кроме того отрицательно определена в G , то начало координат **асимптотически устойчиво в большом** относительно области G .

3. **О неустойчивости.** Если для системы существует в области G

непрерывная со своими частными производными функция $V_1(x)$ такая, что $V_1(0) = 0$, а ее производная по времени — положительно определенная функция вдоль любых траекторий системы, но при этом

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим класс нелинейных систем управления канонической структуры, у которых $u(t) \equiv 0$ линейная часть имеет передаточную функцию $W(s)$, а нелинейное звено имеет характеристику $\Phi(\varepsilon)$, которая нечетна и заключена в угле между прямыми k_1 , k_2 . Последнее условие означает, что

$$\Phi(0) = 0, \quad 0 \leq k_1 \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2.$$

Задача анализа нелинейной системы, состоящая в том, чтобы найти необходимые

и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом положения равновесия системы независимо от вида нелинейной характеристики $\Phi(\varepsilon)$, была сформулирована А. И. Лурье и В. И. Постниковым (1944).

Эту задачу, названную задачей Лурье абсолютной устойчивости, решали на основе прямого метода Ляпунова М.А. Айзерман, А.М. Летов, Ж. Ла-Салль, С.

Другой путь решения проблемы абсолютной устойчивости был предложен румынским математиком В. М. Поповым (1959). Им на основе частотных методов были сформулированы критерии абсолютной устойчивости для большого класса систем.

Развитие метода В. М. Попова для дискретных систем управления осуществили

Я. З. Цыпкин, Б. Н. Наумов, Э. Джури.

Частотные методы анализа нелинейных систем управления, предложенные и раз-

витые В. М. Поповым, оказались эффективным средством исследования абсолютной

устойчивости для широкого класса нелинейных систем любого порядка непрерывных и дискретных, с запаздыванием и без него, с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Рассмотрим нелинейную систему канонической структуры, у которой отсутствует входное воздействие, известна передаточная функция линейной части $W(s)$ и характеристика нелинейности $\Phi(\varepsilon)$.

Система называется **абсолютно устойчивой в секторе** $[k_1, k_2]$, если ее положение равновесия асимптотически устойчиво в целом при любых начальных условиях и при любом выборе функции $\Phi(\varepsilon)$, удовлетворяющей условиям:

$$\Phi(0) = 0, \quad 0 \leq k_1 \leq \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2.$$

Теорема(V. M. Попов, 1959). Для того чтобы система была абсолютно устойчивой в секторе $[0, k]$ достаточно, чтобы существовало такое действительное число q , при котором для всех значений $\omega > 0$ выполнялось условие:

$$\operatorname{Re}((1 + jq\omega)W(j\omega)) + \frac{1}{k} > 0.$$

Частотный критерий абсолютной устойчивости является геометрической интерпретацией основной теоремы.

Введем в рассмотрение, следуя Попову, помимо основной частотной характеристики $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, модифицированную частотную характеристику линейной части:

$$\tilde{W}(j\omega) = \tilde{U}(\omega) + j\tilde{V}(\omega),$$

где $\tilde{U} = U$, $\tilde{V} =$
 ωV .

Уравнени

$$\tilde{U} - q\tilde{V} + \frac{1}{k} = 0$$

е

определяет на комплексной плоскости $(\tilde{U}, j\tilde{V})$ критериальную прямую, проходящую через точку $-1/k$ на действительной оси с угловым наклоном $1/q$. Эту прямую называют **прямой Попова**.

Критерий Попова (линейный). *Состояние равновесия нелинейной системы с асимптотически устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в секторе $[0, k]$, если модифицированный годограф ее линейной части не пересекает прямую Попова.*

Критерий Попова (параболический). *Состояние равновесия нелинейной системы с нейтральной и неустойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым в секторе $[r, k]$, если модифицированный годограф линейной части не пересекает параболу Попова.*

Данный критерий справедлив при числе нулевых полюсов не более двух и правых полюсов не более одного.

Предложенный В. М. Поповым более мощный **круговой критерий**, свободен от этих ограничений и, кроме того, он формулируется в терминах основной частотной характеристики $W(j\omega)$ линейной части системы. Круговой критерий является геометрической интерпретацией обобщенной теоремы об абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Теорема (В. М. Попов, 1962). Для того чтобы система канонической структуры была абсолютно устойчивой в секторе $[r, k]$ достаточно существования такого значения отрицательной обратной связи с коэффициентом q , устойчива действительного числа q , что для всех значений $\omega \geq 0$ выполнялось условие:

$$\left| W(j\omega) + \frac{k + r - jq\omega(k - r)}{2kr} \right|^2 - \left(\frac{k - r}{2kr} \right)^2 (1 + q^2\omega^2) > 0.$$

Геометрически обобщенное условие Попова делит для каждого значения комплексную плоскость на две области: внутренность и внешность

критериального круга $\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k} \right), \quad j \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k} \right) q\omega \right),$

который пересекает действительную ось в $\left(-\frac{1}{r}, -\frac{1}{k} \right).$
точках

Границу этого круга называют **окружностью**

Попова.
Критерий (обобщенный). *Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым в $[r, k]$, если для каждой частоты $\omega \geq 0$ вектор $W(j\omega)$*

частотного годографа линейной части находится вне соответствующей окружности Попова.

Заметим, что если нелинейность $\Phi(\varepsilon)$ линеаризована, то максимальное значение

коэффициента усиления такой *квазилинейной* системы определяет так называемый

закрепленный узел. Для нелинейной системы с функцией нелинейности

