

**ОБЩИЕ
СВЕДЕНИЯ О
КРИВЫХ
ЛИНИЯХ И
ПОВЕРХНОСТЯ
Х**

Кривая линия – совокупность последовательных положений точки, определяемых в процессе ее непрерывного движения в пространстве при условии бесконечно малого промежутка времени перехода в соседние положения.

Кривую линию можно рассматривать как траекторию движения точки на плоскости или в пространстве, а также как совокупность точек, удовлетворяющих определенному уравнению.

Кривая линия может являться результатом пересечения между собой поверхностей или поверхности и плоскости.

Кривая линия определяется положением составляющих ее точек. Точки кривой определяются их координатами.

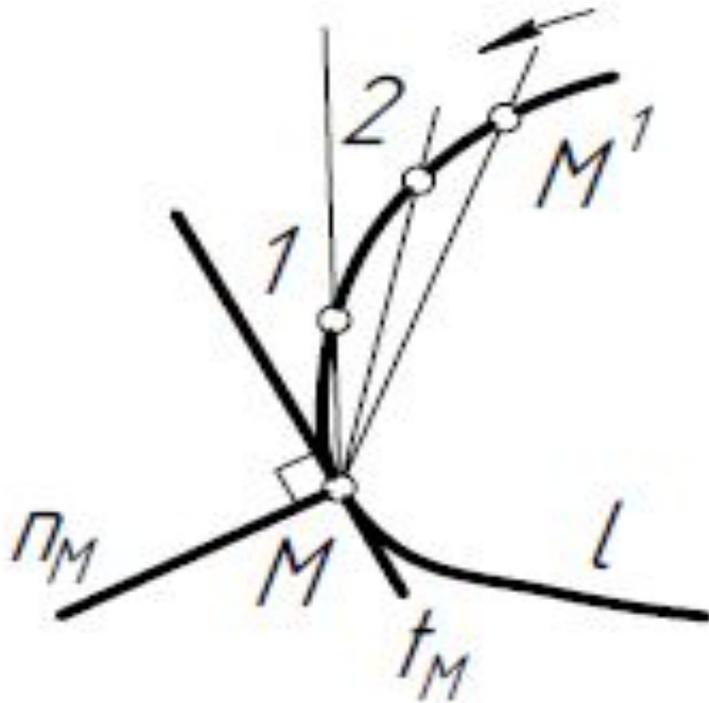
Закономерная кривая – если при своем образовании она подчинена какому-либо геометрическому закону.

Если этот закон можно описать алгебраическим уравнением, то кривая называется ***алгебраической***, в противном случае – ***трансцендентной***.

Алгебраические кривые определяются своим порядком – количеством пересечений с прямой.

Предельное положение секущей в точке M называется **касательной** к кривой l в точке M .

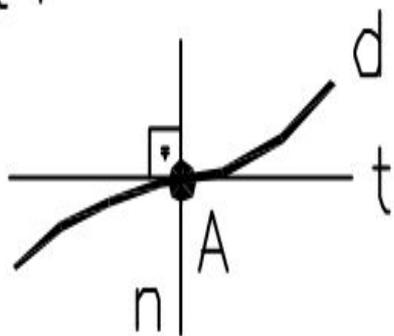
Прямая Π_M , перпендикулярная к касательной t_M в данной точке M , называется **нормалью** кривой l в данной точке M .



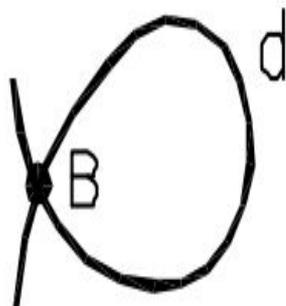
Точку кривой, в которой можно провести только одну касательную и в которой направления движения точки и вращения касательной не изменяются называют обыкновенной, а кривую, состоящую из обыкновенных точек — гладкой.

Точки, в которых можно провести не одну, а две и более касательных или в которых изменяется направление движения точки или вращения касательной, относят к **особым точкам кривой** (точка перегиба, излома).

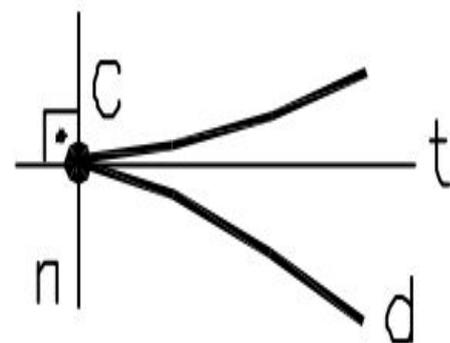
Точка перегиба A , в которой кривая переходит на другую сторону касательной t .



Узел или двойная точка B , в которой кривая пересекает сама себя.



Точка возврата C , в которой обе ветви кривой имеют общую касательную.



Кривую линию называют плоской, если все точки линии лежат в одной плоскости, и пространственной, если точки не принадлежат одной плоскости.

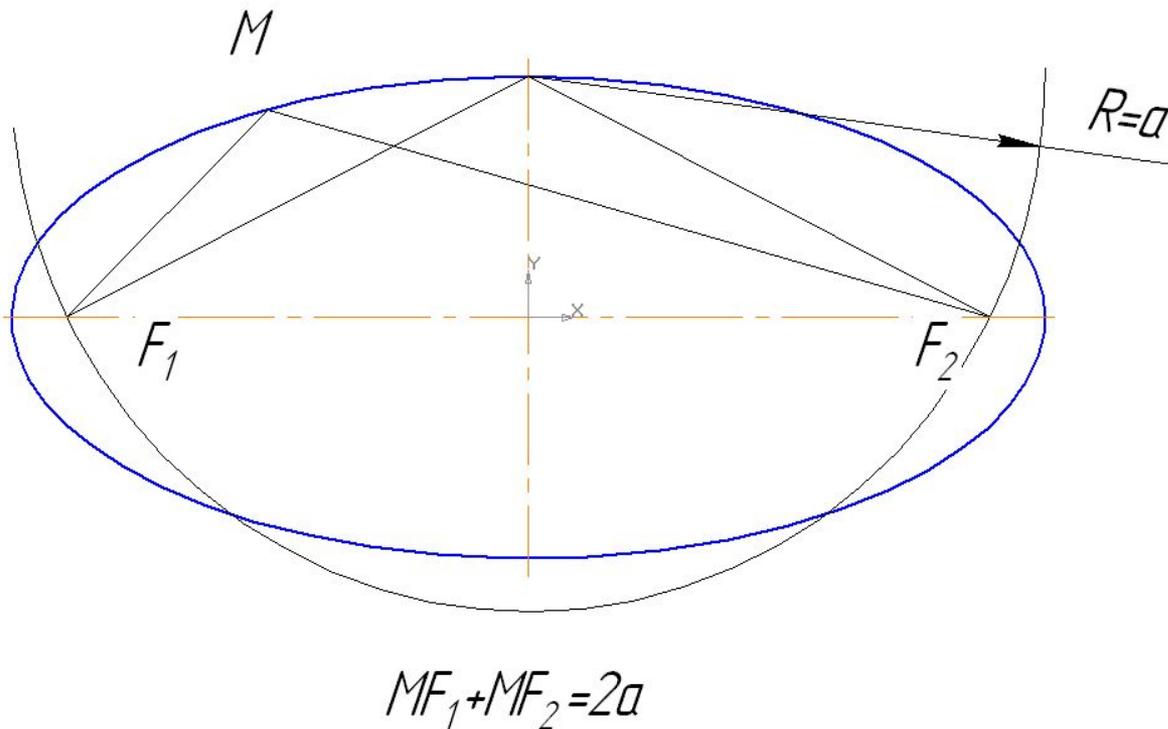
Примеры плоских кривых линий — окружность, эллипс, парабола, гипербола.

Примеры пространственных кривых — винтовая линия, линия пересечения боковых поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса, оси которых не пересекаются.

Для построения проекций кривых линий строят проекции ряда принадлежащих ей точек

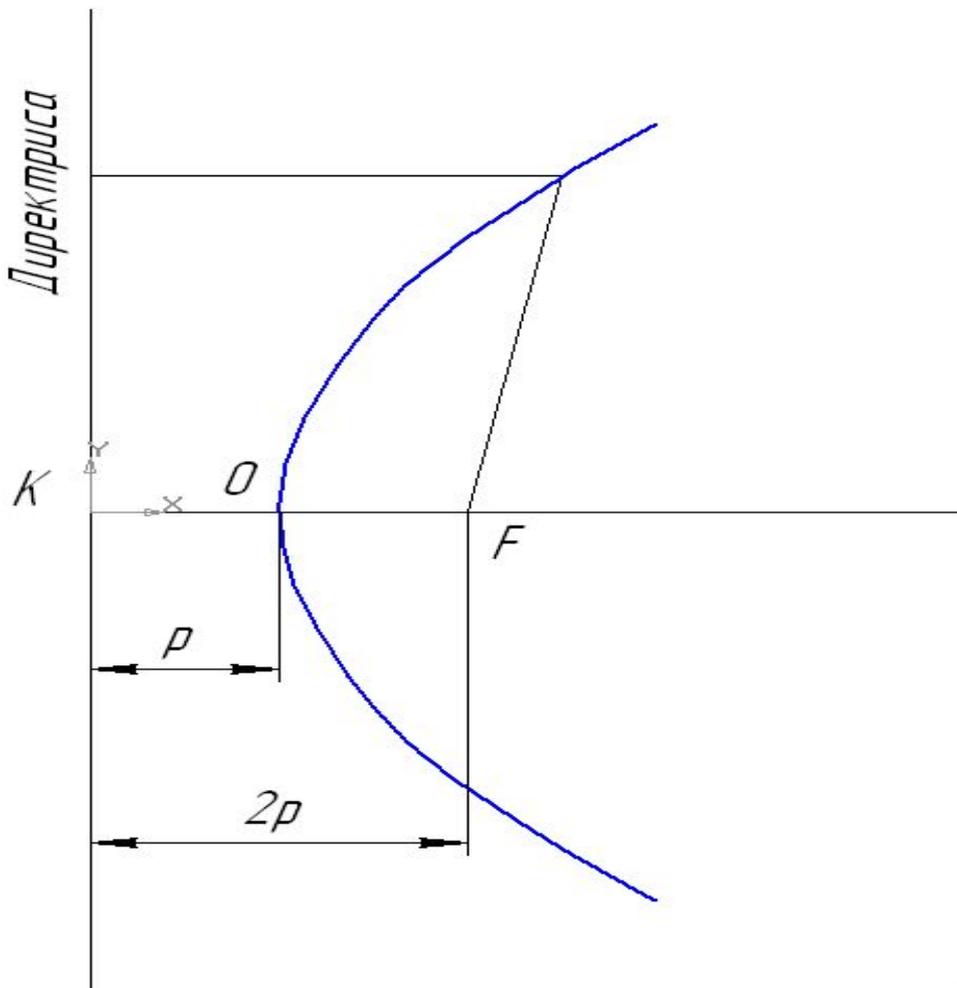
Плоские кривые второго порядка

- 1. Эллипс** – плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от точек эллипса до двух заданных точек - фокусов, есть величина постоянная и равная длине большой оси эллипса ($2a$). $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$ ($2c$ – расстояние между фокусами).



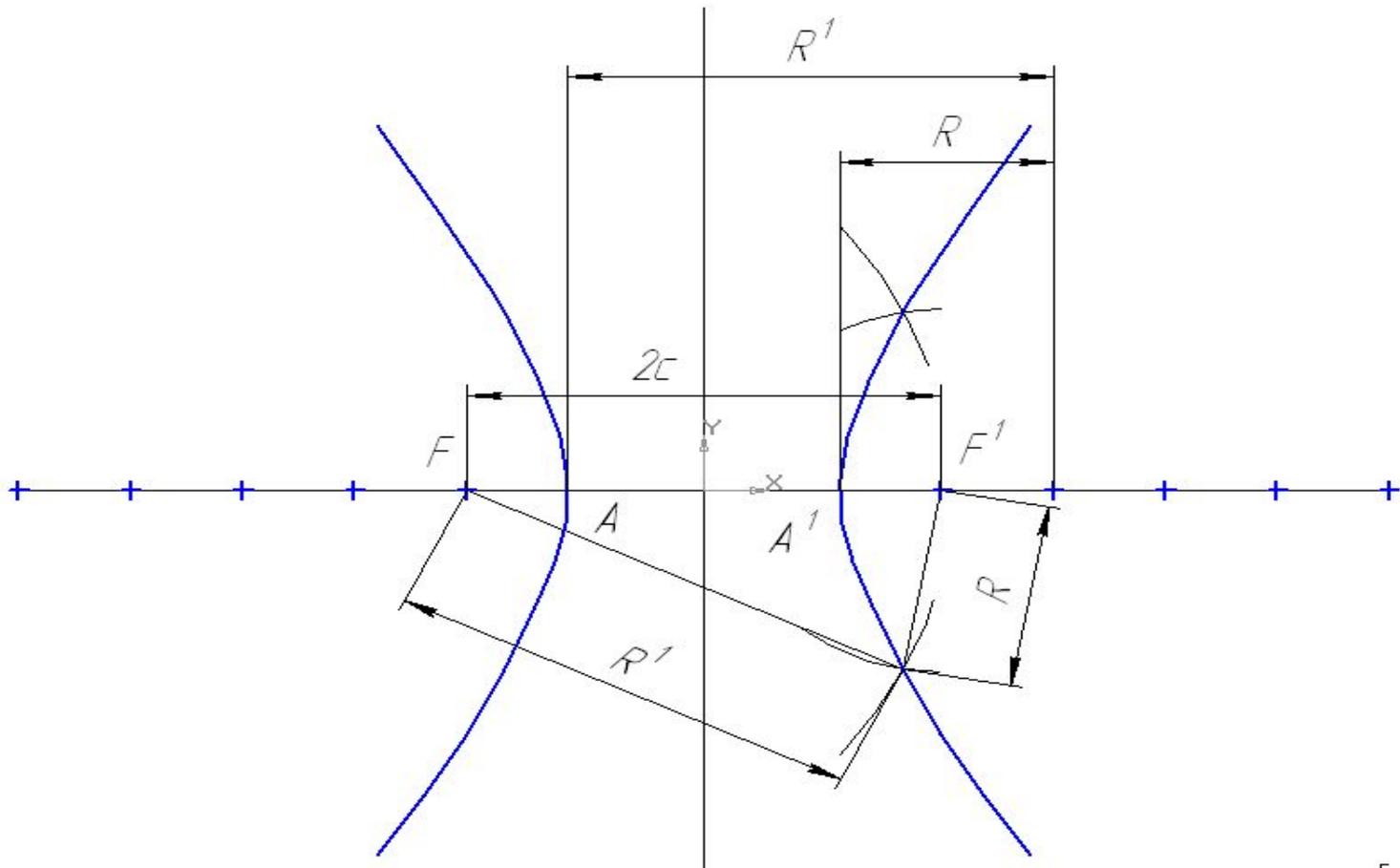
Частный случай эллипса ($a=b=R$) – окружность $x^2+y^2=R^2$

2. Парабола – плоская незамкнутая кривая, каждая точка которой равноудалена от прямой, называемой директрисой (направляющей) и от точки F – фокуса, расположенного на оси ее симметрии. Точку O пересечения оси симметрии с параболой называют вершиной, расстояние KF – параметром – p параболы, где $2p$ – расстояние между фокусом и



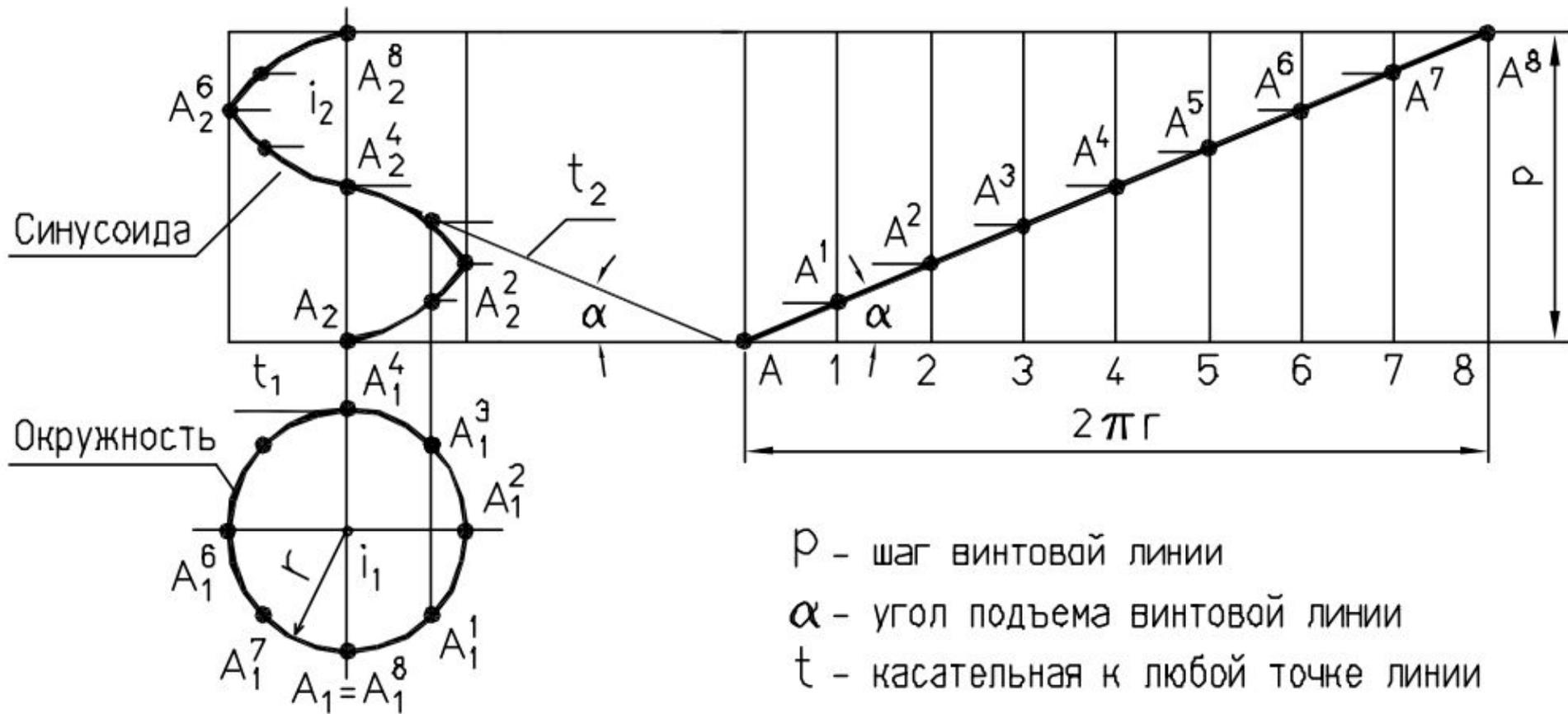
3. Гипербола – плоская незамкнутая кривая, для каждой точки которой разность расстояний от двух заданных точек – фокусов, есть величина постоянная и равная расстоянию между ее вершинами($2a$).

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$ ($2c$ – расстояние между фокусами)



Пространственные кривые

Гелиса (винтовая линия), образуется наложением равномерно поступательного и равномерно вращательного движения точки. Высота, на которую точка поднимается на полный оборот, называется *шагом* винтовой линии. Гелиса есть кратчайшее расстояние между двумя точками кругового цилиндра. Разверткой винтовой линии будет прямая.



Пространственная кривая проецируется в виде плоской, плоская кривая — также в виде плоской или в виде прямой линии, если кривая находится в проецирующей плоскости.

Кривая, представляющая собой прямоугольную проекцию кривой некоторого порядка, сохраняет тот же порядок или оказывается кривой более низкого порядка

Свойства проецирования кривых

- *Проекция кривой n -го порядка является кривой порядка не выше n .*
- *Касательная к кривой в общем случае проецируется в виде касательной к проекции кривой.*
- *Особые точки плоской кривой в общем случае проецируются в особые точки ее проекции.*

ПОВЕРХНОСТЬ

ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений l_1, l_2, \dots линии l , перемещающейся в пространстве по определенному закону. В процессе образования поверхности линия l может оставаться неизменной или менять свою форму – изгибаться или деформироваться.

Существуют три способа задания кривых поверхностей:

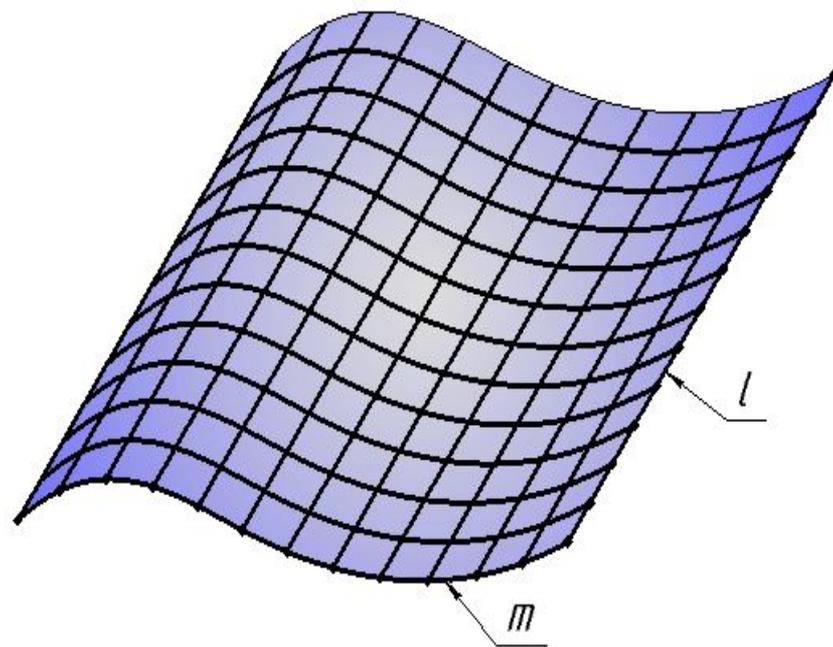
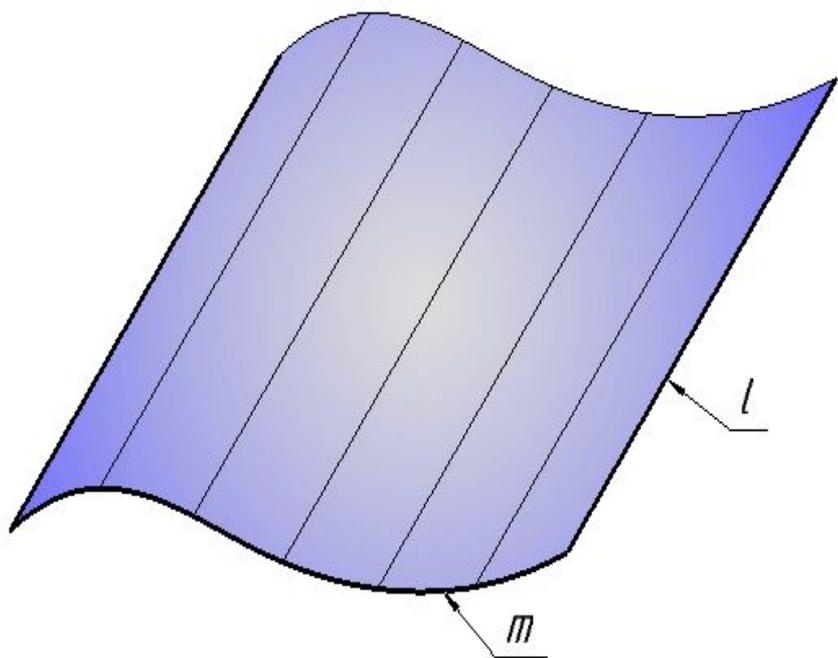
- 1. Аналитический* - при помощи уравнений;
- 2. При помощи каркаса;*
- 3. Кинематический*, т. е. перемещением линий в пространстве

При каркасном способе задания кривая поверхность задается совокупностью некоторого количества линий, принадлежащих поверхности.

Каркас поверхности - это упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы называют **точечными или линейными.**

Линейным каркасом называется множество таких линий, которые имеют единый закон образования и связаны между собой определенной зависимостью



Кинематический способ образования поверхности можно представить как множество положений движущейся линии - **образующей** по другой линии – **направляющей**.

Этот способ дает возможность сформулировать понятие **определителя поверхности**. Под этим понятием обычно подразумевают **необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и кинематических связей между ними, которые однозначно определяют поверхность**.

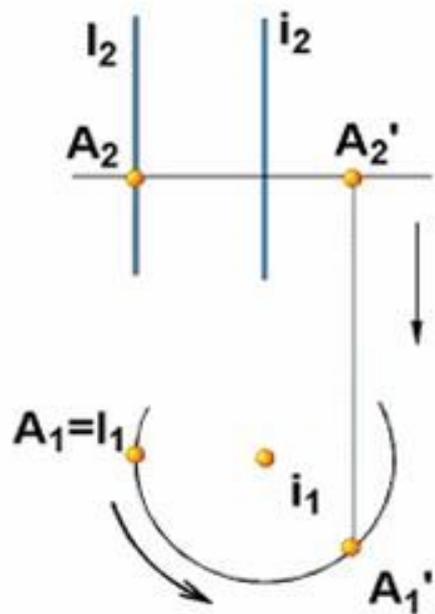
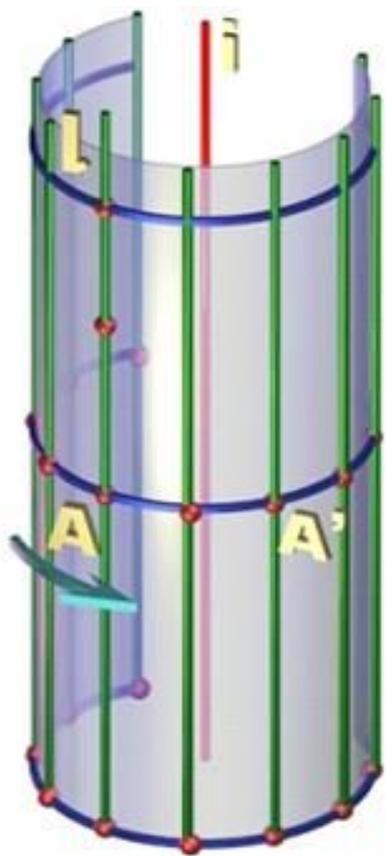
Определитель поверхности состоит из двух частей:

Геометрической части - совокупности геометрических фигур, с помощью которых можно образовать поверхность (образующая и направляющая линии).

Алгоритмической части - алгоритма формирования поверхности при помощи фигур, входящих в геометрическую часть определителя.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если относительно любой точки пространства, заданной на чертеже, можно однозначно решить вопрос о принадлежности ее данной поверхности.

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности



Цилиндрическая поверхность вращения может быть образована вращением прямой l i вокруг оси i

Геометрическая часть определителя поверхности состоит из образующей l и оси i .

Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей линии l вокруг оси i .

Определитель цилиндрической поверхности вращения имеет вид $\Phi(l \ i, i) [A]$. На чертеже цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя

Определитель цилиндрической поверхности: а – поверхность образована вращением прямой l i вокруг оси i ; б - цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя

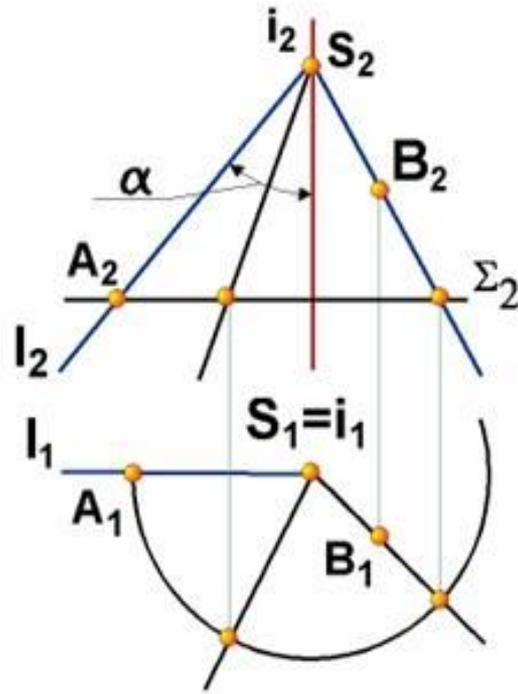
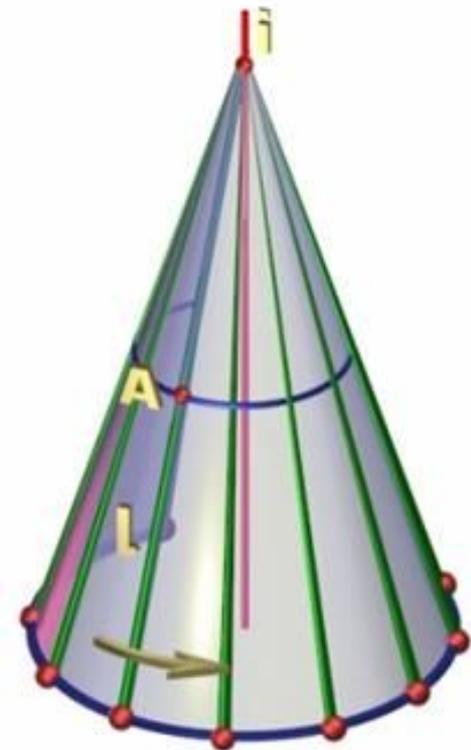
Коническая поверхность

вращения может быть образована вращением прямой l , пересекающей ось вращения i под некоторым углом. Алгоритмическая часть определителя состоит из словесного указания о том, что поверхность образуется вращением образующей l вокруг оси i .

Определитель конической поверхности вращения имеет вид $\Phi(l\ i)[A]$.

На чертеже конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя: $l(l1l2)\ i(i1i2)$

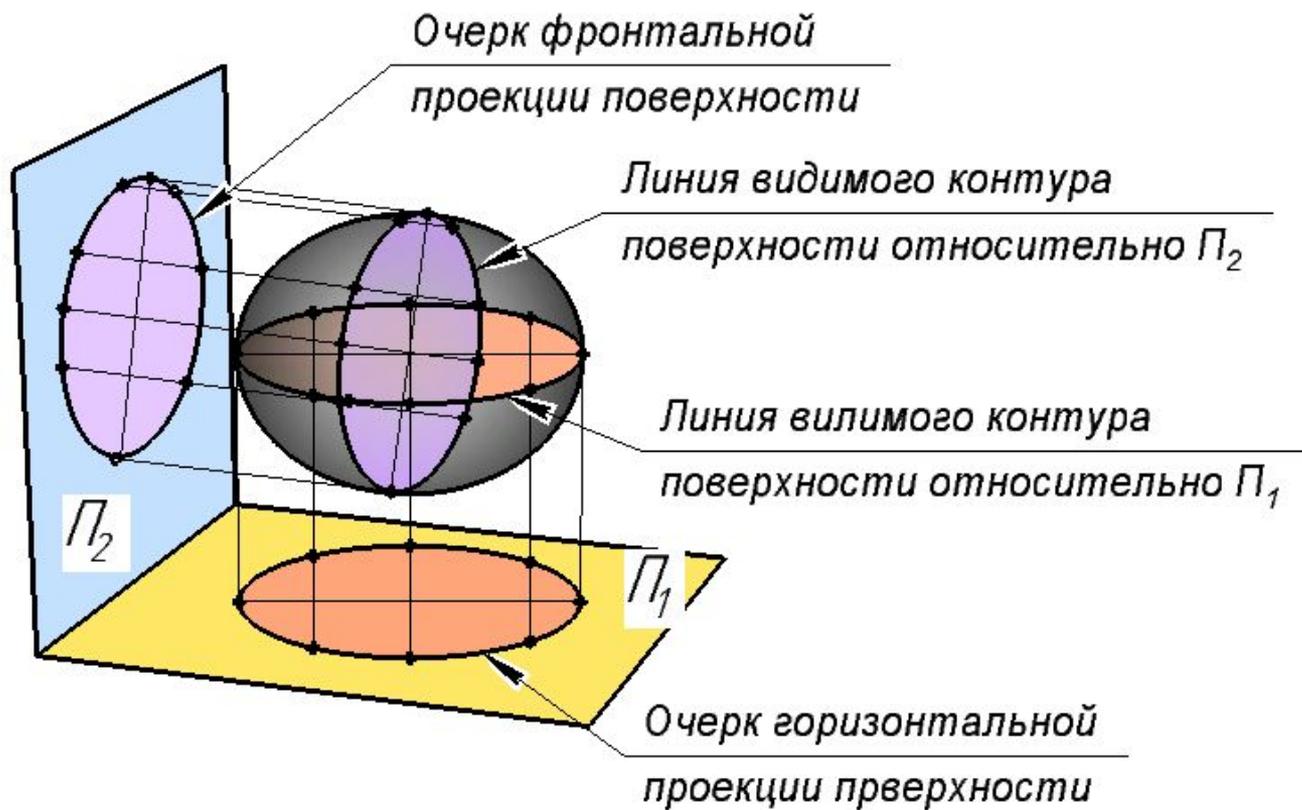
Изображение определителя конической поверхности: а - алгоритмическая часть; б - геометрическая часть



Для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению **очерков** ее проекций

Очерк проекции поверхности является проекцией соответствующей **линии видимого контура**

Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части – видимую, обращенную к наблюдателю, и невидимую. **Никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка**



Классификация поверхностей

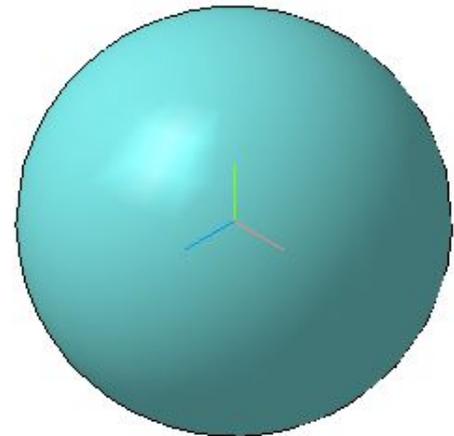
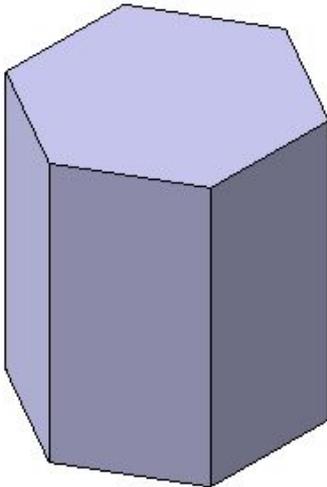
Поверхности можно разделить на несколько классов в зависимости от формы образующей, от формы, числа и расположения направляющих, а также других факторов:

1. *Поверхности закономерные и не закономерные.*

Если образующая поверхности движется по определенному закону, то поверхность называется закономерной или правильной, в противном случае поверхность называется не закономерной.

2. *Поверхности линейчатые и нелinearчатые.*

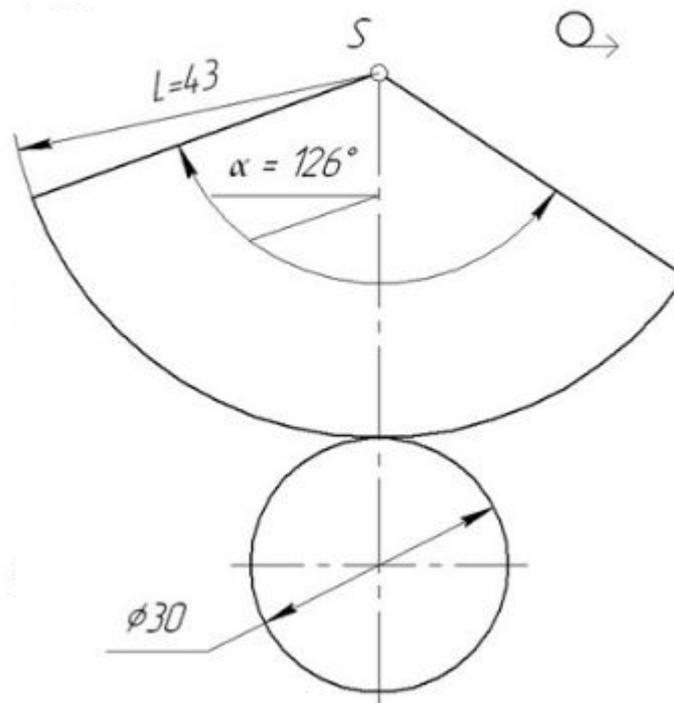
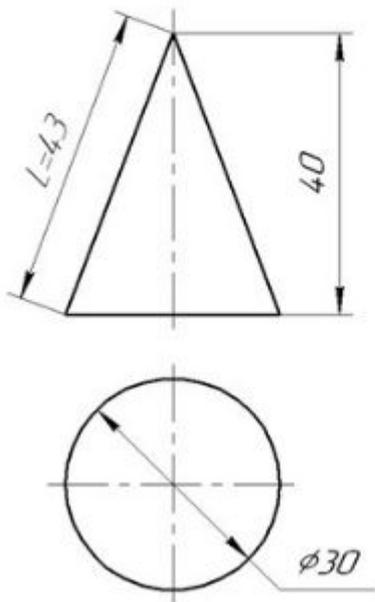
Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии.



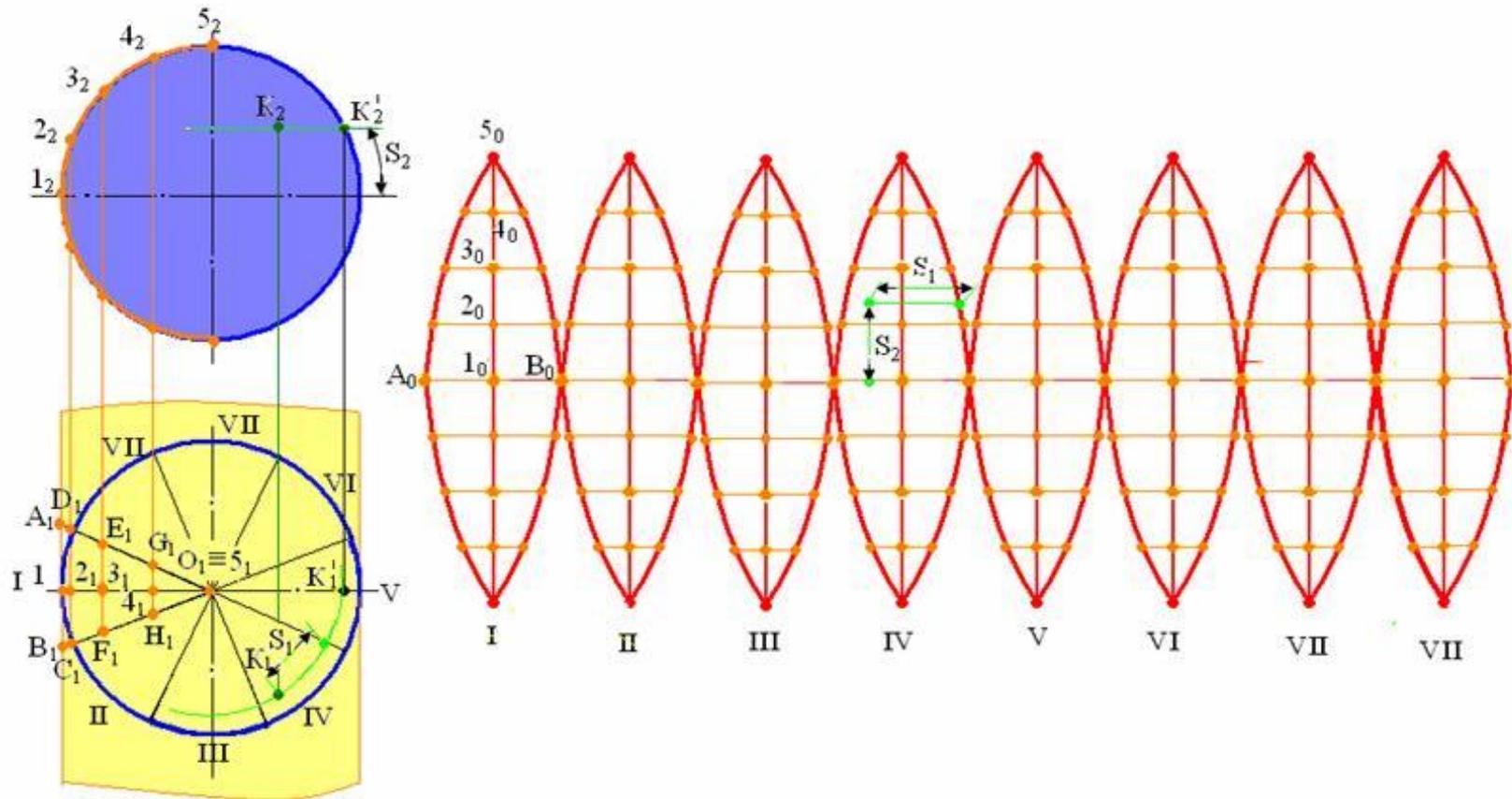
3. Поверхности развертывающиеся и неразвертывающиеся.

Развертывающиеся поверхности – поверхности, которые после разреза их по образующей могут быть односторонне совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

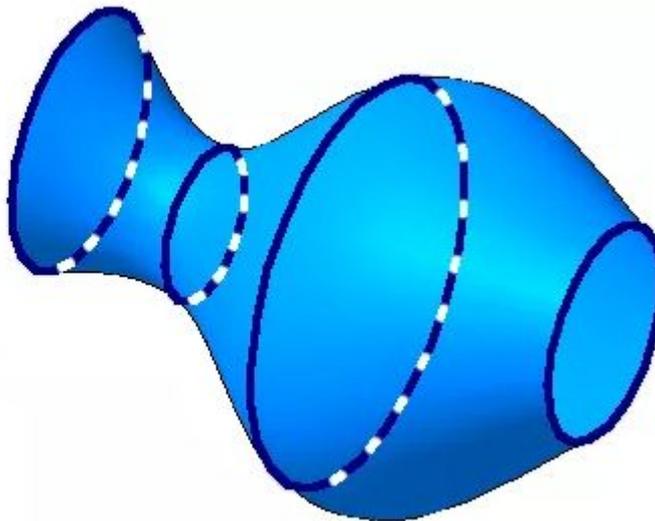
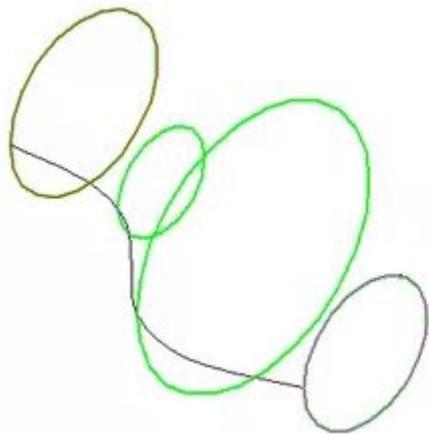
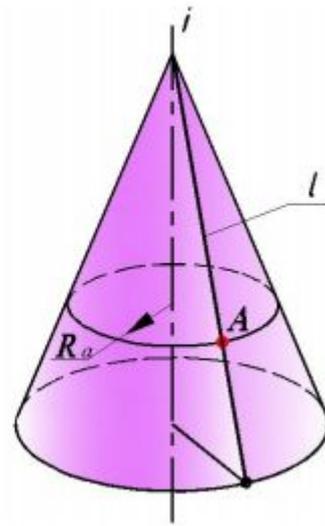
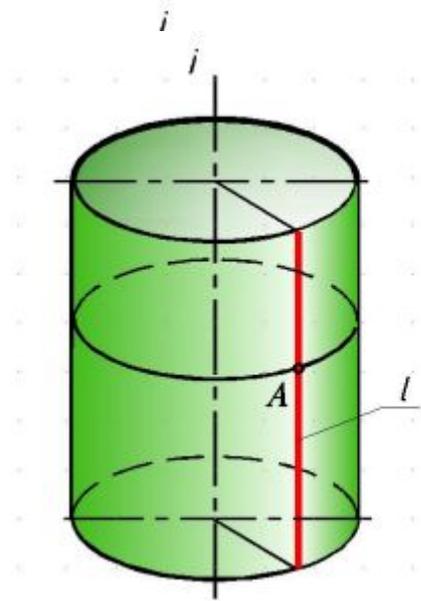
$$\alpha = \frac{360^\circ \times d}{2L} = \frac{360 \times 30}{2 \times 43} = \frac{10800}{86} = 125.6^\circ \approx 126^\circ$$



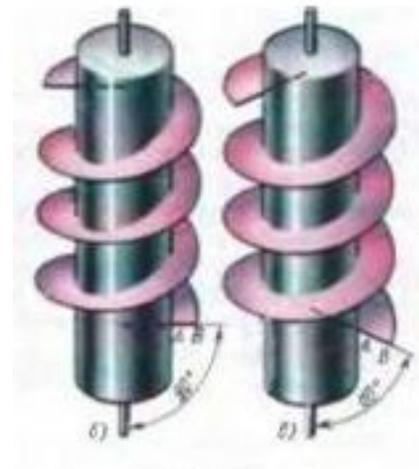
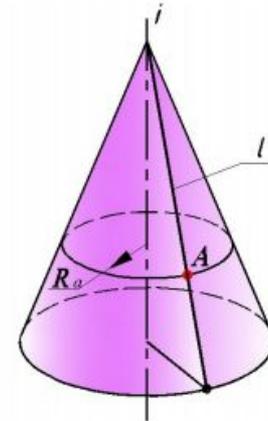
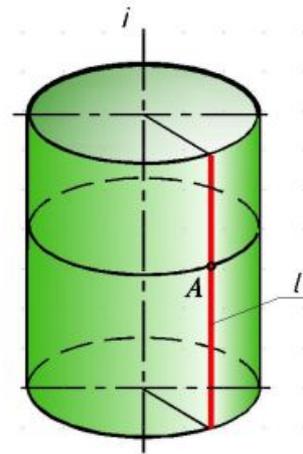
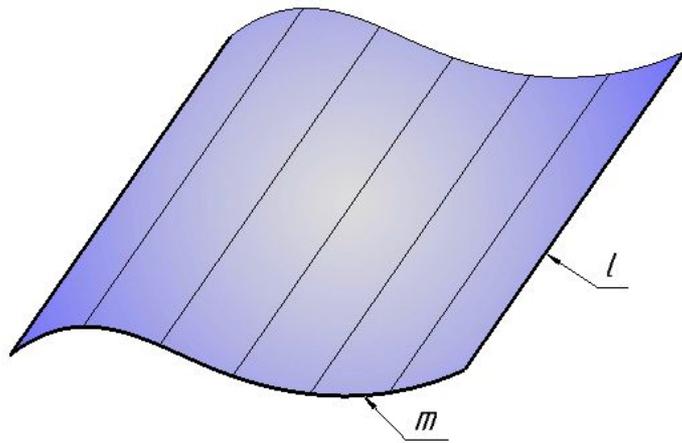
Неразвертывающиеся поверхности – поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.



4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.



5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.



Рассмотрим основные виды **линейчатых** поверхностей:

Гранные – поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломанной линии.

Их элементами являются грани, ребра и вершины.

Отсеки плоскостей, образующие многогранную поверхность, называются **гранями**, линии пересечения смежных граней - **ребрами**, точки пересечения не менее чем трех граней - **вершинами**.

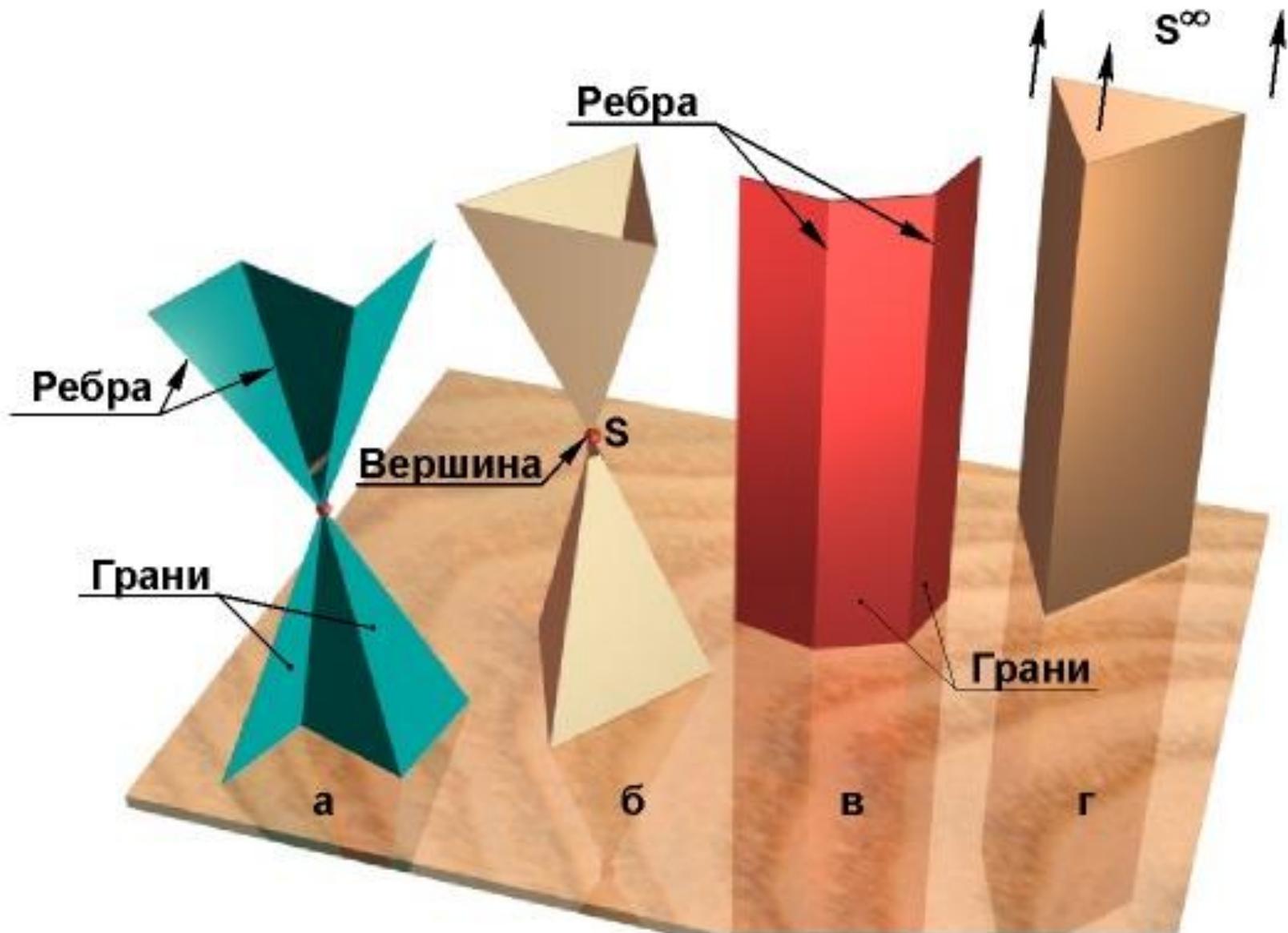
Если каждое ребро многогранной поверхности принадлежит одновременно двум ее граням, ее называют замкнутой (рис. б, г), в противном случае - незамкнутой (рис. а, в).

Многогранная поверхность называется *пирамидальной*, если все ее ребра пересекаются в одной точке - вершине (рис. а).

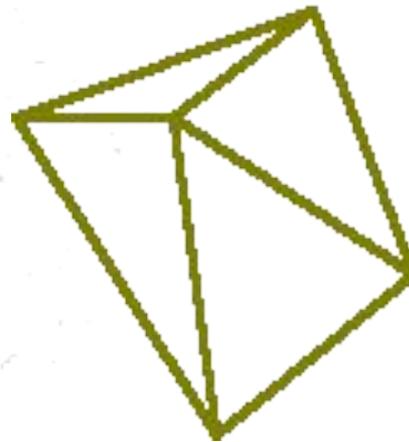
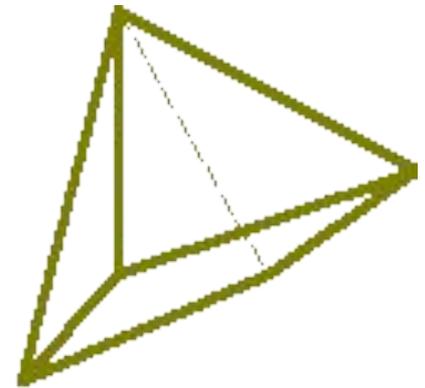
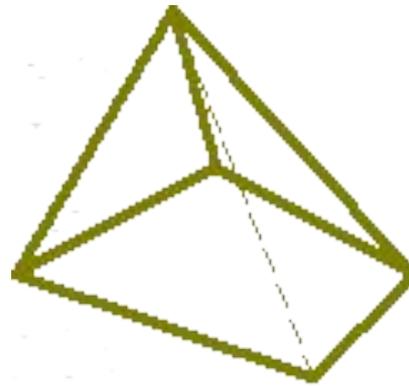
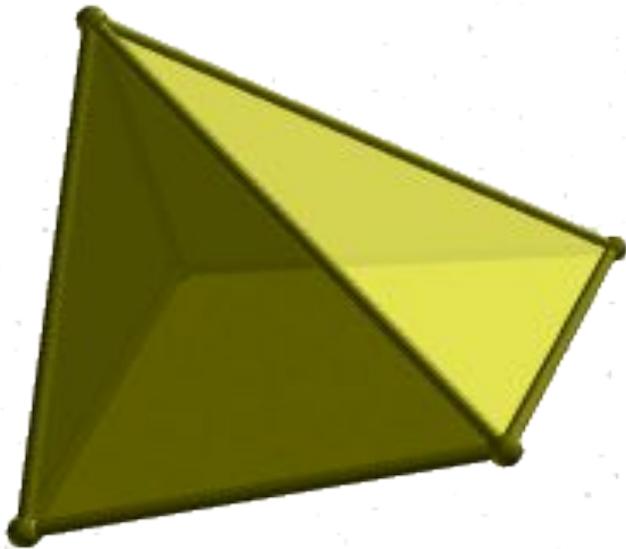
Многогранная поверхность называется *призматической*, если все ее ребра параллельны между собой (рис. г).

Геометрическое тело, со всех сторон ограниченное плоскими многоугольниками, называется **многогранником**.

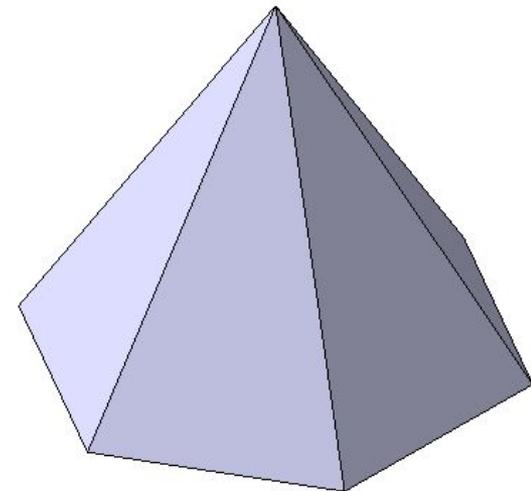
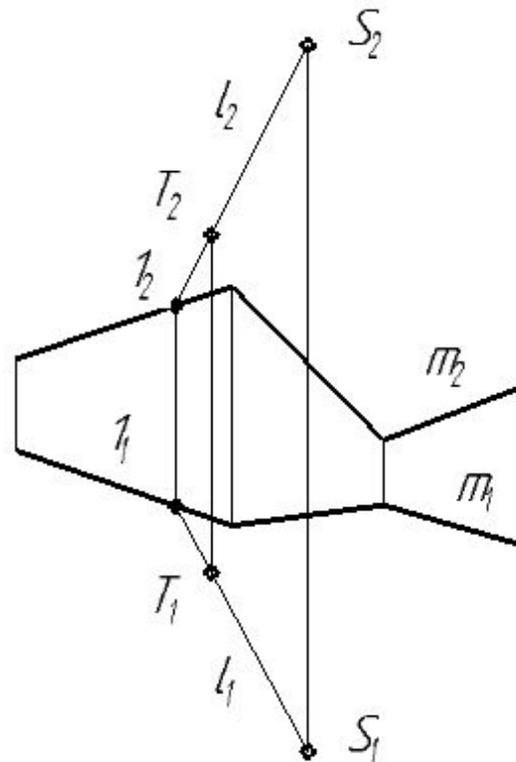
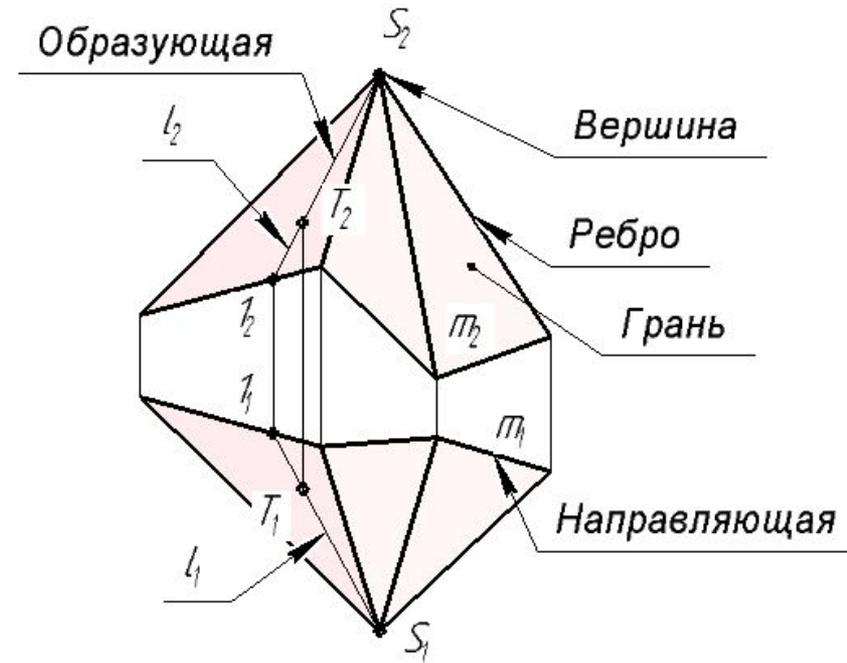
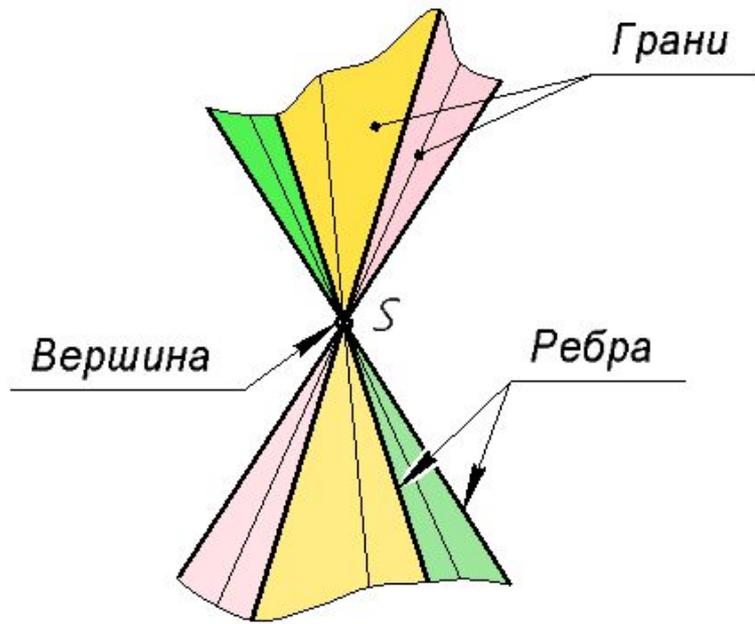
Простейшими многогранниками являются *пирамиды и призмы*



Пирамида - это многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные грани - треугольники с общей вершиной. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр многоугольника. Пирамида называется усеченной, если вершина её отсекается плоскостью

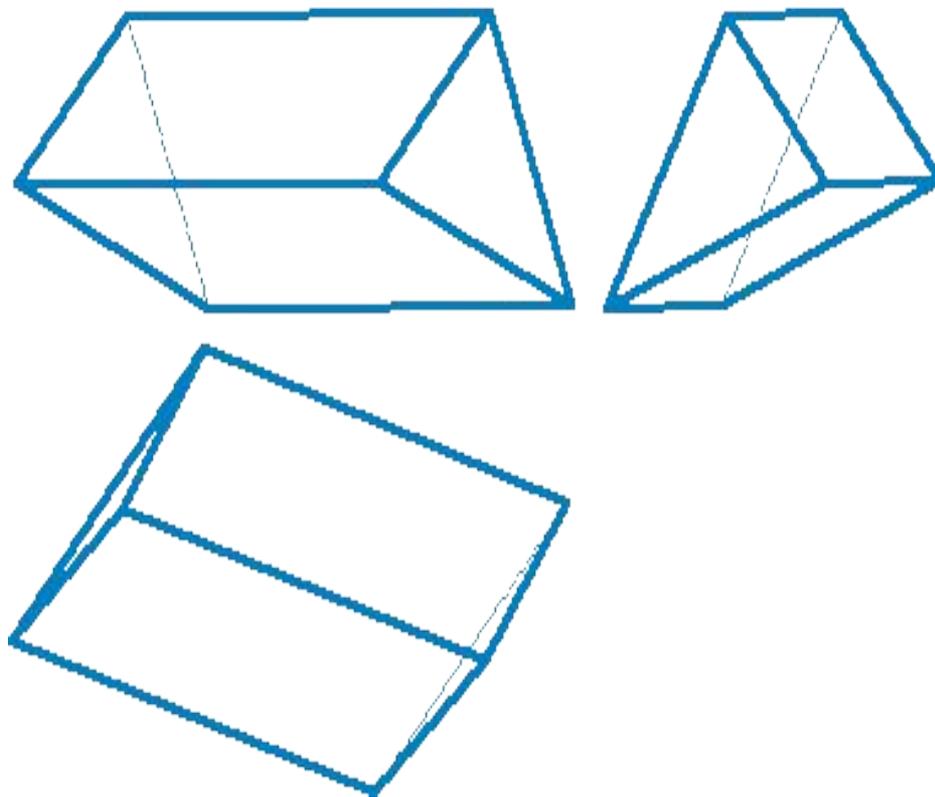


Пирамидальная поверхность

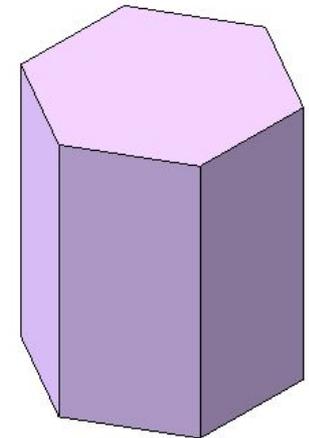
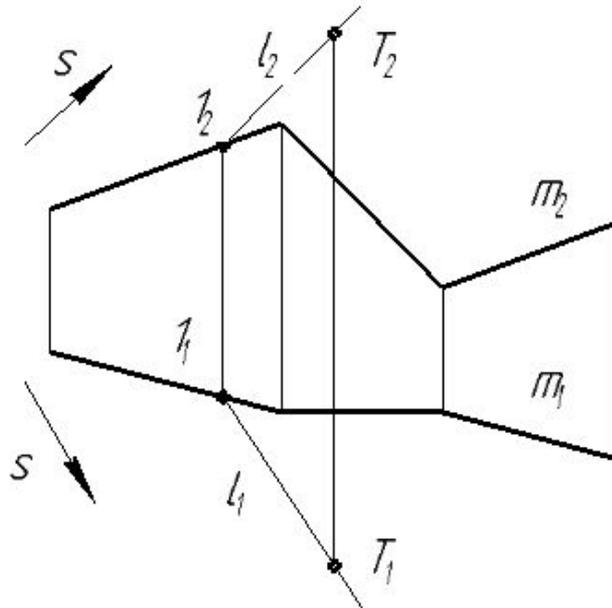
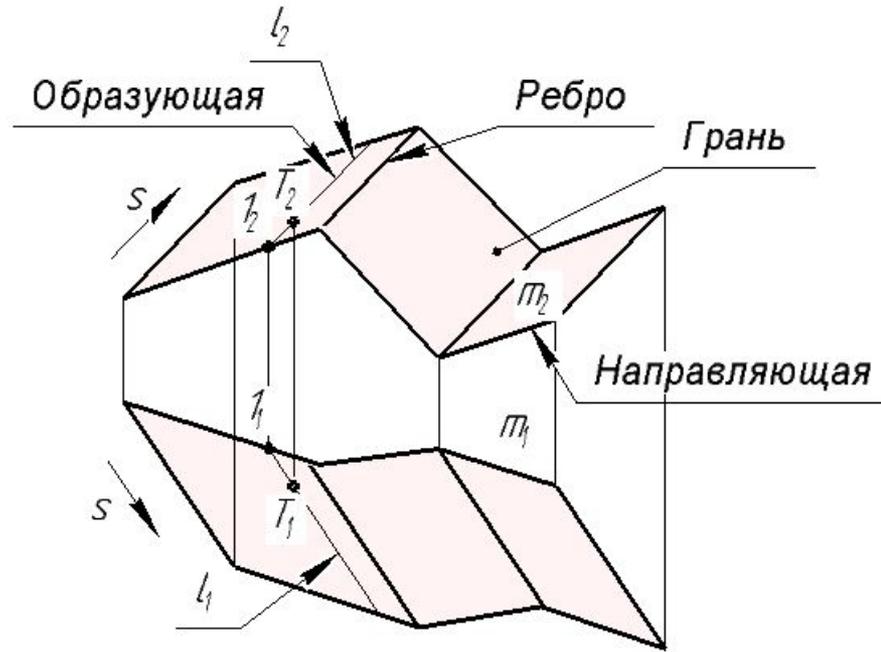
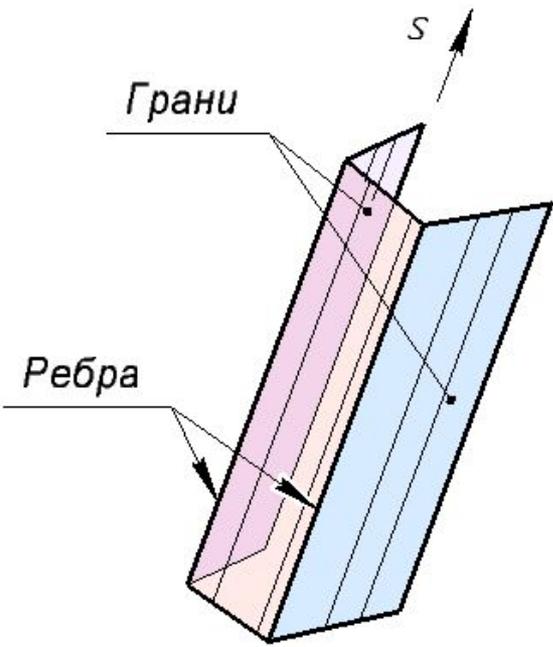


IDS
Inm
TCI

Призма - многоугольник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани параллелограммы. Призма называется прямой, если её ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом



Призматическая поверхность

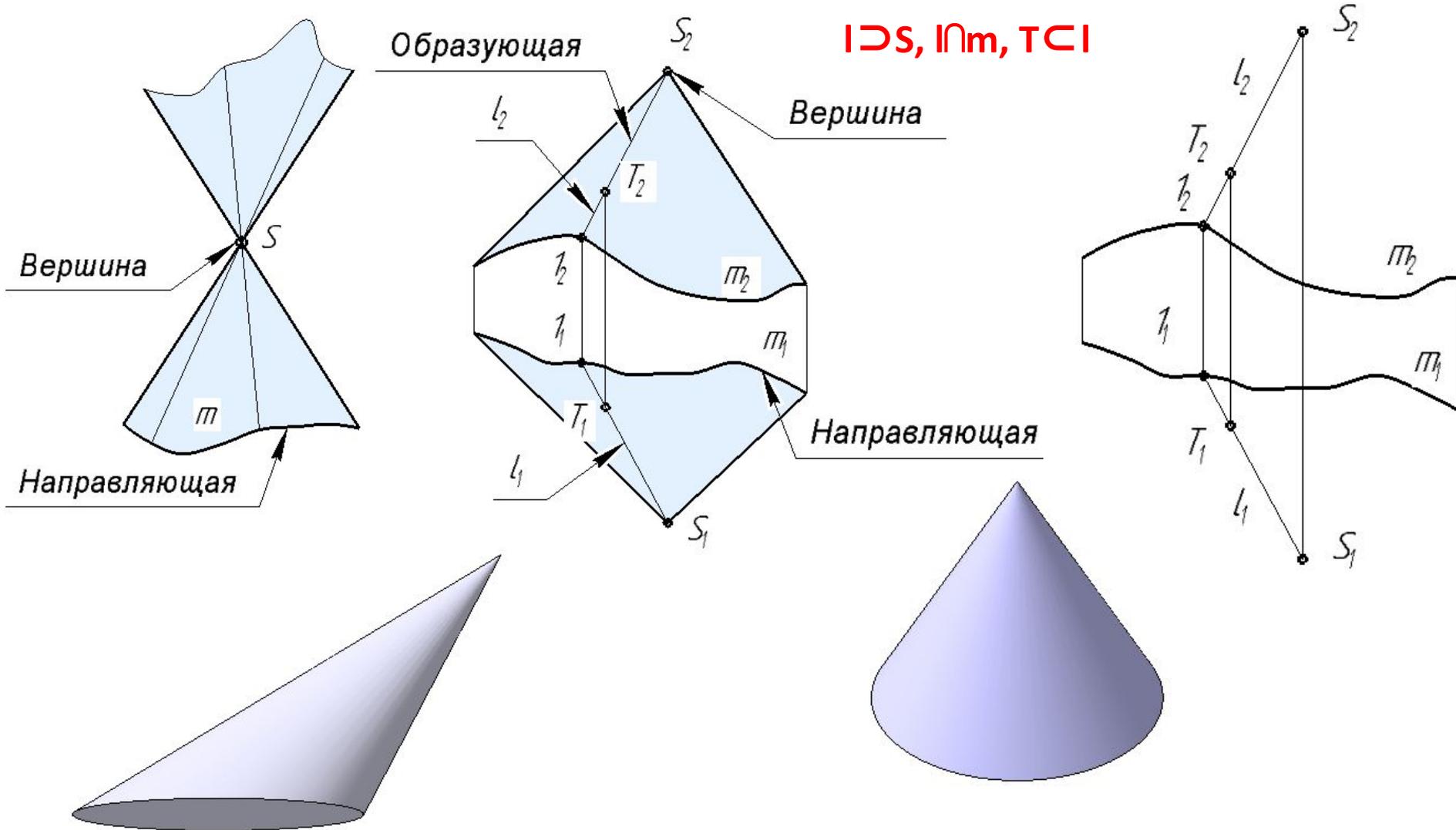


Ис
Юм
ТСИ

Коническая

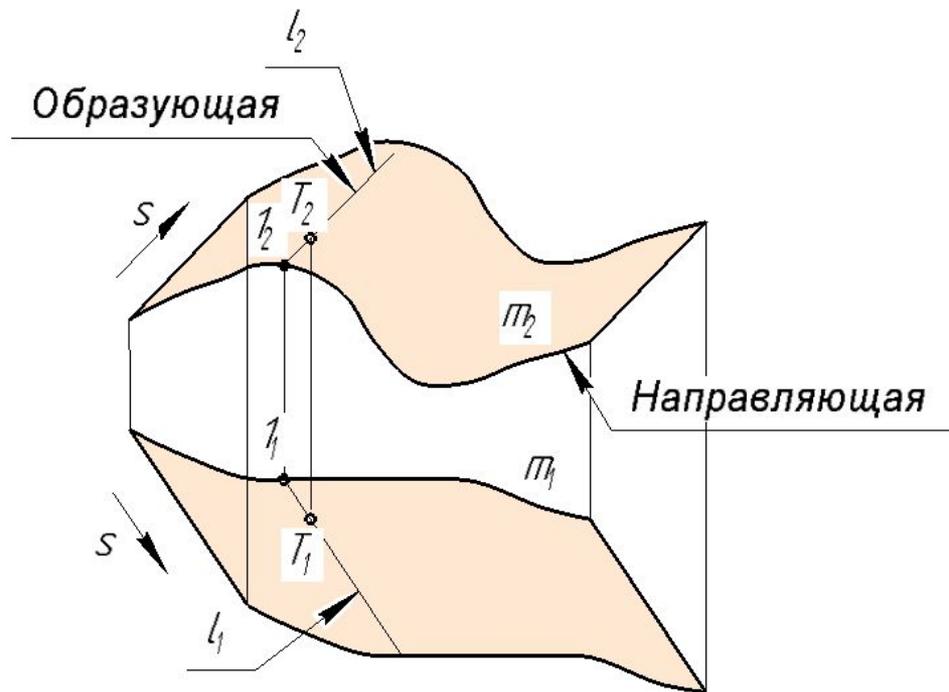
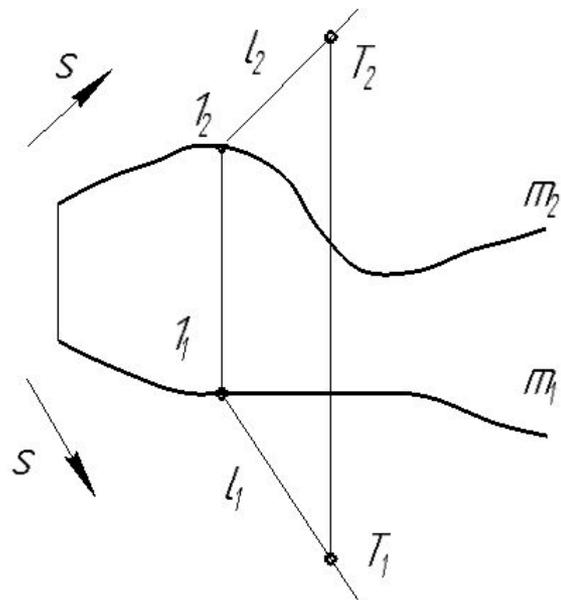
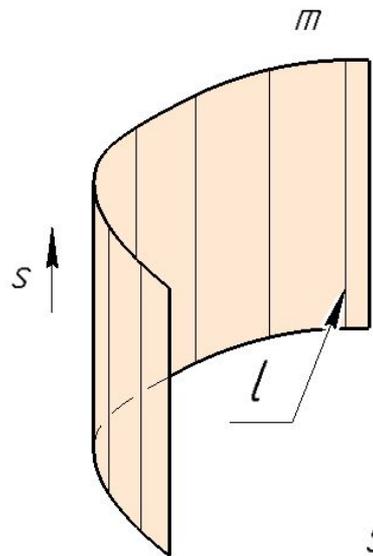
поверхность

Коническая поверхность – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по кривой направляющей m , при этом одна точка – S образующей l неподвижна.



Цилиндрическая поверхность

Цилиндрическая поверхность — поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по кривой направляющей m , при этом образующая l во всех положениях параллельна некоторому заданному направлению.

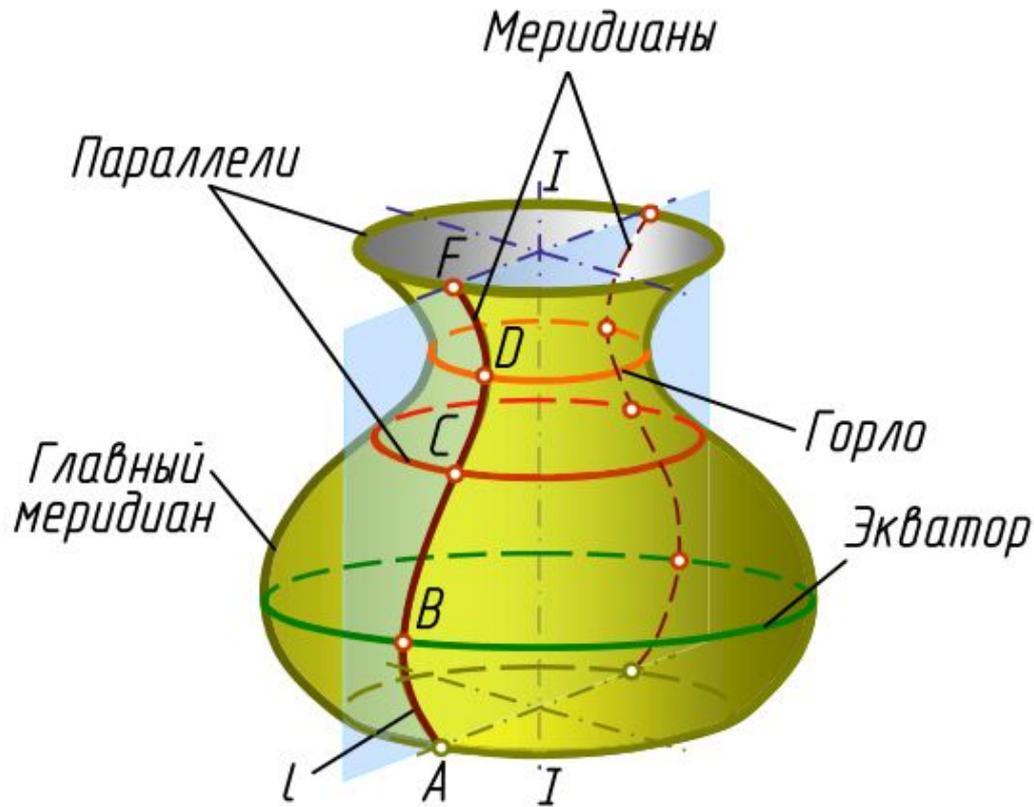


$l \parallel s$
 $l \perp m$
 $T \in l$

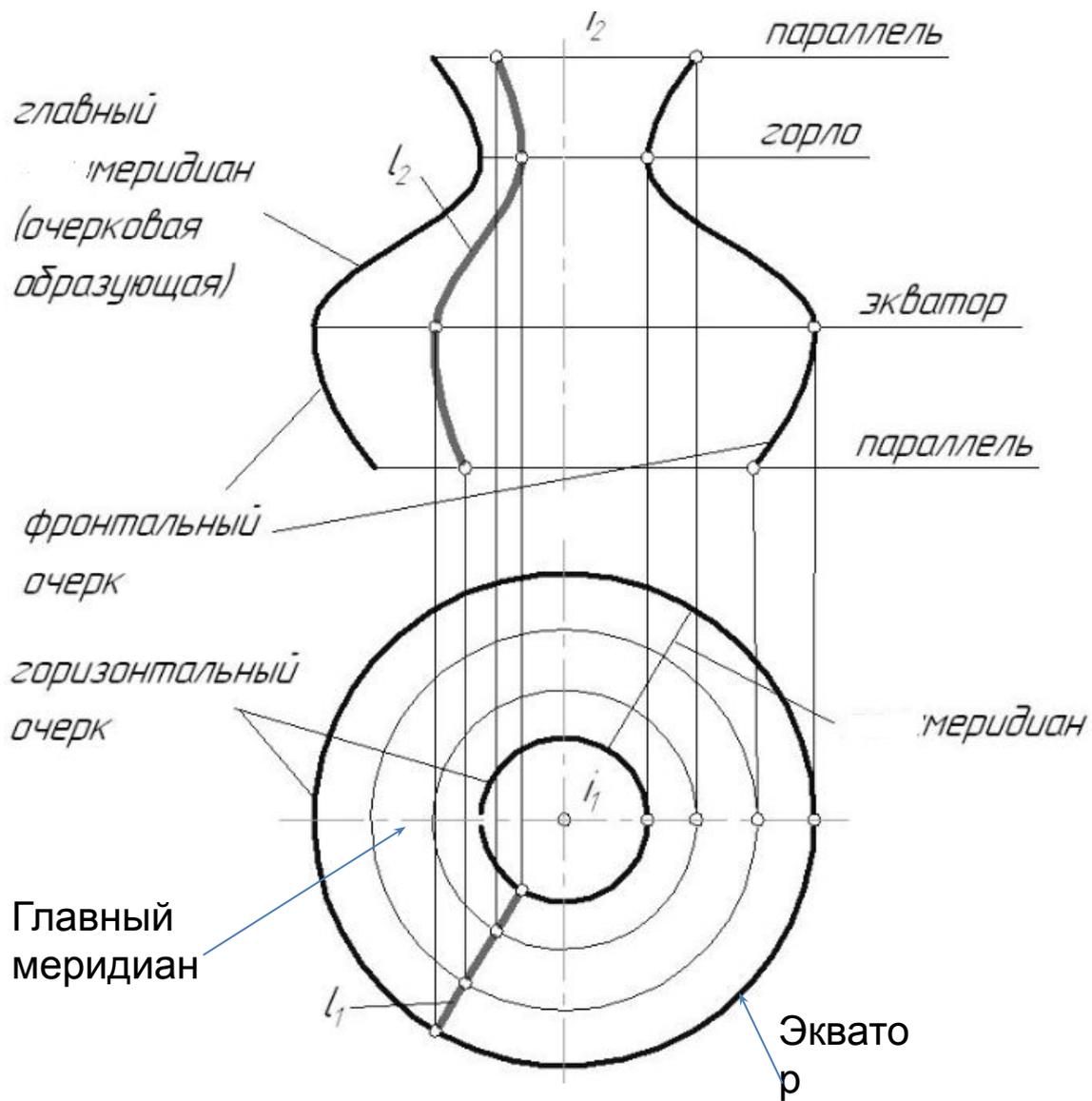
Поверхности вращения

Поверхности вращения – поверхности, образованные вращением линии (образующей) вокруг прямой – оси вращения.

Поверхности вращения могут быть линейчатыми и нелinearчатыми.



При образовании поверхностей вращения любая точка образующей описывает в пространстве окружность. Эти окружности называются параллелями. Плоскости параллелей всегда перпендикулярны к оси вращения. Параллель наименьшего диаметра – *горло*, а наибольшего – *экватор*.

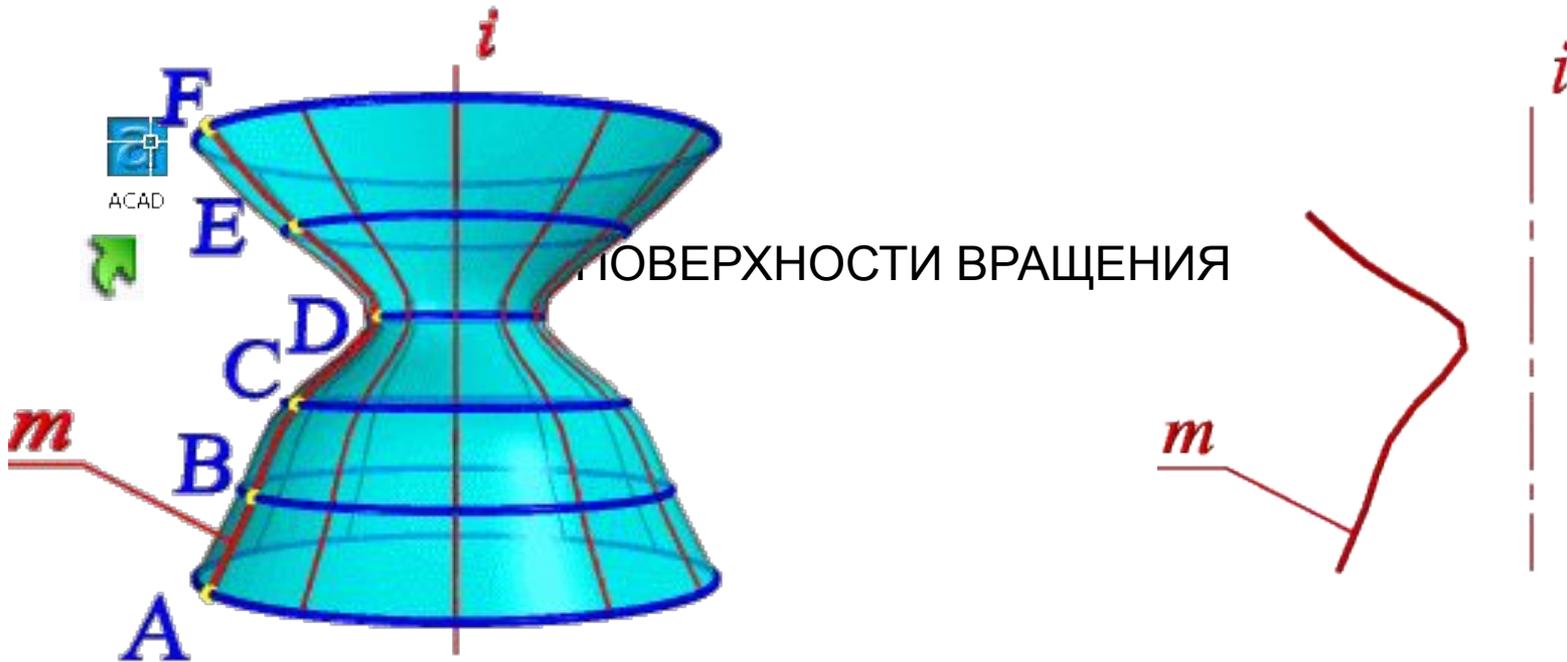


Линия пересечения поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ось вращения – **меридиан**. Если плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций, то такой меридиан называется **главным**.

Геометрическая часть определителя состоит из двух линий:
образующей m и оси i

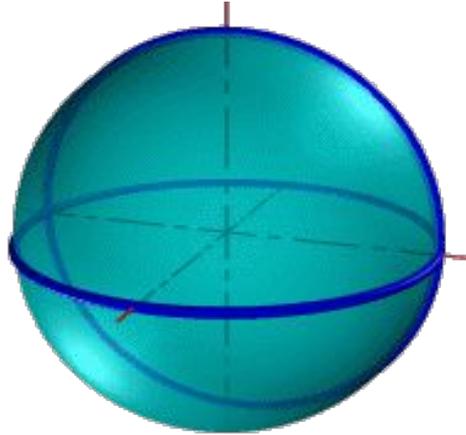
Алгоритмическая часть включает две операции:

1. на образующей m выделяют ряд точек $A, B, C, \dots, F,$
2. каждую точку вращают вокруг оси i .



Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:

Сфера – образуется вращением окружности вокруг её диаметра



Тор – образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности

