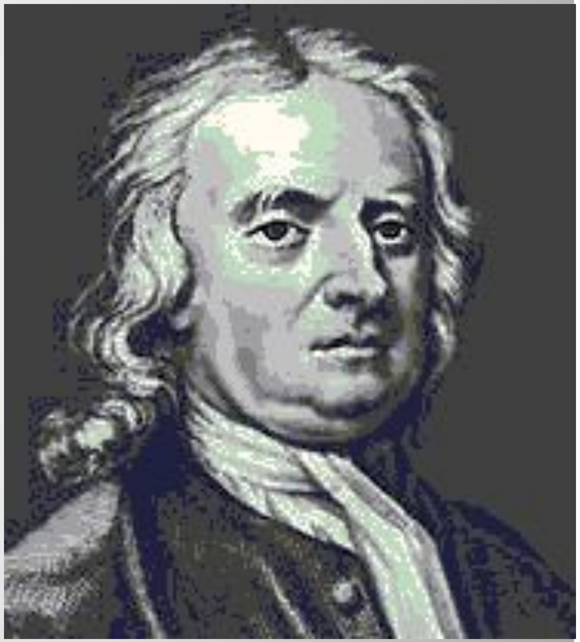
Формула бинома Ньютона. Треугольник Паскаля

Контрольные вопросы

1. Что в теории многочленов называют биномами?
2. Запишите биноминальную формулу Ньютона.
3. Для чего предназначен треугольник Паскаля?
4. Что представляет собой треугольник Паскаля? Опишите схему его составления.
5. Перечислите основные свойства бинома Ньютона.
6. Рассмотрите и запишите решения примеров 1,2, 3.
7. Запишите формулу для вычисления общего члена бинома Ньютона.
8. Рассмотрите и запишите решение примера 4.

Исаак Ньютон

НЬЮТОН - английский математик, механик, астроном и физик, создатель классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления. Открыл дисперсию света, исследовал интерференцию и дифракцию, развивал корпускулярную теорию света. Построил зеркальный телескоп. Сформулировал основные законы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения, создал теорию движения небесных тел, создав основы небесной механики.



1643-1727 г.г.

В теории многочленов двучлены часто называют ***<u>биномами</u>***

- $(a+b)^0=1$
- $(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b$
- $(a+b)^2=1\cdot a^2+2ab+1\cdot b^2$
- $(a+b)^3=1\cdot a^3+3a^2\mathrm{b}+3ab^2+1\cdot b^3$
- $(a+b)^4=(a+b)^3\,(a+b)=$

$=1\cdot a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1\cdot b^4$

- $(a+b)^5=(a+b)^4\,(a+b)=$

$=1\cdot a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1\cdot b^5$

Биномиальная формула Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$+ C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

C_n^k -биномиальные коэффициенты

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$
- $(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$
- $(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2\mathrm{b} + 3ab^2 + 1\cdot b^3$
- $(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b) =$

$= 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$

- $(a+b)^5 = (a+b)^4\,(a+b) =$

$= 1\cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\cdot b^5$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью треугольника Паскаля.

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. Биноминальные коэффициенты можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется треугольником Паскаля:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Блез Паскаль

ПАСКАЛЬ– французский математик, физик, религиозный философ и писатель. Работы по арифметике, теории чисел, алгебре, геометрии, теории вероятностей. В 1641г. сконструировал суммирующую машину.

1623-1662 г.г.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Свойства бинома Ньютона

1.Число слагаемых на 1 больше степени бинома.

2. Коэффициенты находятся по треугольнику Паскаля.

3.Коэффициенты симметричны.

4.Если в скобке знак минус, то знаки + и – чередуются. Все **четные** члены разложения имеют **знак "минус"**

5.Сумма степеней каждого слагаемого равна степени бинома.

Данные свойства часто используют для проверки результата разложения бинома.

<u>Пример 1.</u> Представить в виде многочлена $(a+1)^4$

Согласно треугольнику Паскаля, в случае четвертой степени биноминальные коэффициенты многочлена будут равны 1, 4, 6, 4, 1.

И, действительно

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

$(a+b)^{10}$

<u>Пример 2.</u> Найдите коэффициент бинома Ньютона для шестого члена разложения выражения $(a+b)^{10}$**.**

В нашем примере *n=10*, *k=6-1=5*. Таким образом, мы можем вычислить требуемый биномиальный коэффициент:

$$C_n^k = C_{10}^5 = \frac{(10)!}{(5)!\cdot(10-5)!} = \frac{(10)!}{(5)!\cdot(5)!} =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{(5)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить: $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right)^3$

Воспользуемся свойством 4 бинома Ньютона

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right)^3=\frac{1}{8}a^3-3\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{3}{4}b+3\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{3}{4}b\right)^2-\left(\frac{3}{4}b\right)^3=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{16}a^2\cdot b+\cdot\frac{1}{32}ab^2\cdot-\frac{27}{64}b^3$$

Формула общего члена бинома Ньютона

$$T_{n+1} = C_m^n a^{m-n} b^n$$

Полагая n=0; 1; 2; 3;… m, мы получим первый, второй и другие члены разложения

<u>Пример 4.</u> Найдите пятый член разложения $(a-2b)^6$

Воспользуемся формулой:

$$T_{n+1}=C_m^n a^{m-n} b^n$$

Получаем:

$$T_{4+1}=C_6^4 a^{6-4} b^4$$

$$T_5=\frac{6!}{4!2!}a^2b^4=\frac{5\cdot 6}{2}a^2b^4=15a^2b^4$$