Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс

вопросы

Затухающие колебания – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

δ= const – коэффициент затухания,
в отсутствие потерь энергии δ = 0

$$x = e^{-\delta t}u(t)$$

Свободные колебания реальной системы всегда затухают

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Затухания для маятника

$$F_{mp} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt}$$

r- коэффициент сопротивления.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Уравнение колебаний пружинного маятника

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Уравнение **затухающих** колебаний пружинного маятника

$$\boxed{x = A_0 \cdot e^{-\frac{r}{2m}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Решение уравнения

Коэффициент затухания, амплитуда

$$\boxed{\frac{r}{2m} = \delta}$$

Коэффициент затухания

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - r^2/4m^2}$$

циклическая частота **затухающих** колебаний.

$$\boxed{A = A_0 e^{-\delta t}}$$

Амплитуда затухающих колебаний

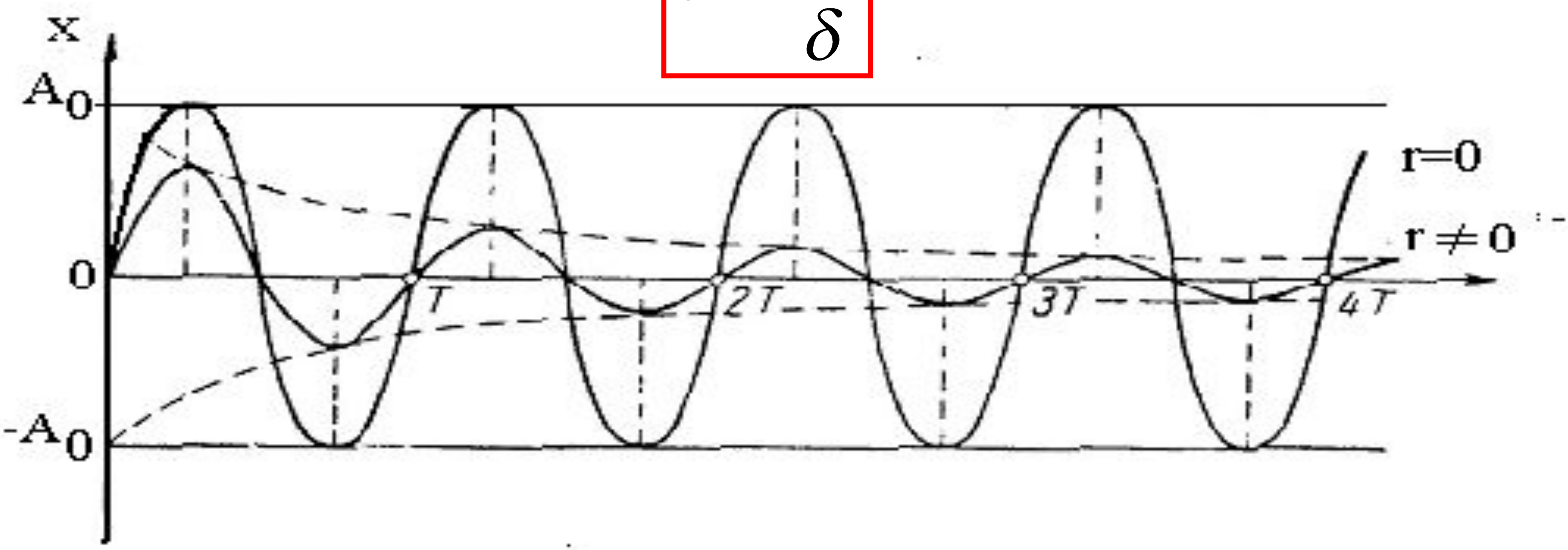
Изменяется амплитуда во времени!!

Частота изменяется относительно собственной (начальной) частоты системы (частоты свободных незатухающих колебаний)

Время релаксации – график амплитуды

Временя релаксации - промежуток времени τ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\delta}}$$



Затухающее колебание не является периодическим, и тем более гармоническим

Период
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

Декремент затухания - отношение амплитуд 2-х последовательных колебаний:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}=e^{\delta T}.$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\Theta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\delta T=\frac{T}{\tau}=\frac{1}{N_e}$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время τ

ЛДЗ – const для данной колебательной системы.

Добротность:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Q равна с точностью до π числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации τ.

Q пропорциональна отношению энергии $W(t)$ колеб. системы в момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t + T$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.}$$

От характера воздействия

1. Свободные колебания, возникающие при однократном воздействии внешней силы (первоначальном сообщении энергии) и при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему

2. Вынужденные – возникающие под действием внешних, периодически изменяющихся сил (при периодическом поступлении энергии извне к колебательной системе)

3. Автоколебания – возникающие под действием внутренних периодических сил(при периодическом поступлении энергии от собственного источника внутри колебательной системы)

вынужденные

Вынужденные колебания – незатухающие колебания, возникающие в колебательной системе под действием внешней периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t$$

F

Для простейшего пружинного маятника, на который действует внешняя сила:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{F_{упр}} \underbrace{- r\frac{dx}{dt}}_{F_{сопр}} + \underbrace{F_0\cos\omega t}_{F_{вын}}$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$r/2m = \delta$ $k/m = \omega_0^2$

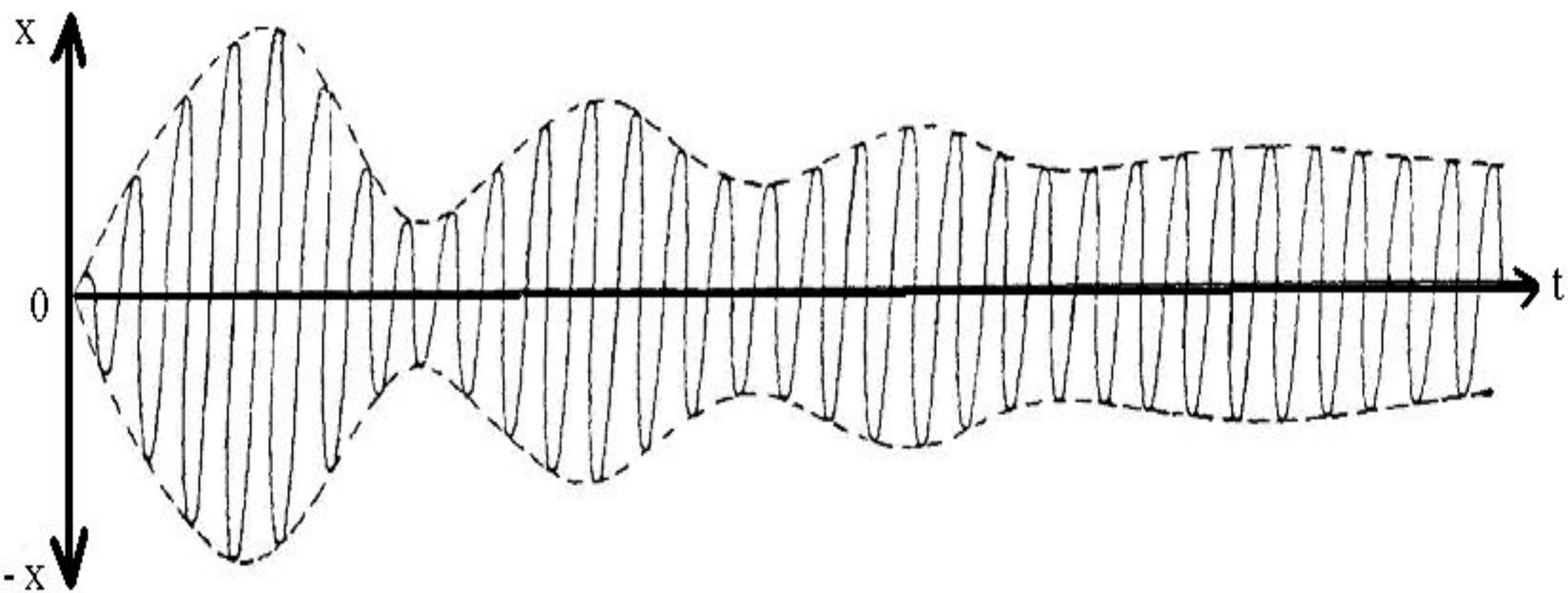
Амплитуда установившихся вынужденных колебаний:

$$\boxed{A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}}$$

Сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой:

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

В установившемся режиме вынужденные колебания являются гармоническими, происходят с частотой внешней гармонической силы.

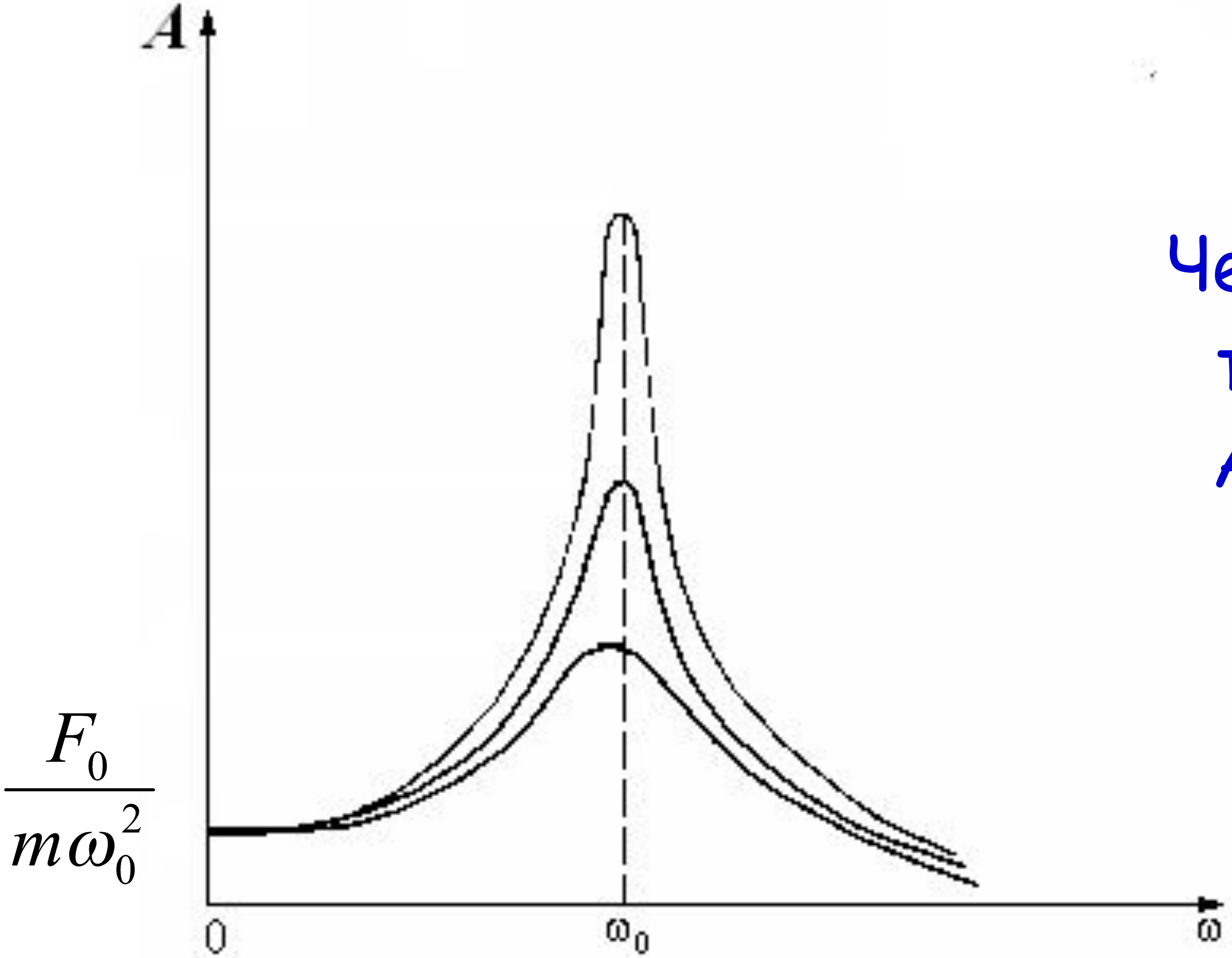


При некоторой частоте внешней силы – резонансной частоте $\omega_{рез}$ – амплитуда смещения достигает максимального значения:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Яв-ние резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется механическим резонансом.

$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$



Чем меньше δ, тем больше Амплитуда!

Автоколебания - колебательная система, совершающая незатухающие колебания за счёт источника энергии, не обладающего колебательными свойствами- называется автоколебательной системой.

Пример: часы с анкерным ходом, паровые машины, двигатели внутреннего сгорания, отбойные молотки, электрические звонки, смычёк для скрипки, воздушные столбы в духовых инструментах, языки в баянах и аккордеонах, голосовые связки при разговоре.