

Раздел 3.
Введение в анализ

Тема:

Множества. Последовательность

Лектор Имас О.Н.

2019 г.

§ 1. Множества. Вещественные числа

Множество – неопределяемое понятие.

Говорят: набор, совокупность, система и др.

Обозначают: A, B, D, \dots, X

Считается, что множество состоит из элементов. Обозначают: a, b, d, \dots, x

Как можно задать множество?

а) перечислить элементы

б) указать признак

пропустить 7 клеточек

ОПР 1. Множество называется **конечным**, если оно состоит из некоторого конечного числа элементов.

Непустое множество называется **бесконечным**, если оно не является конечным.

ОПР 2. Множество, в котором нет ни одного элемента называется **пустым** множеством. Обозначают: \emptyset

ОПР 3. Множества A и B называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

ОПР 4. Если все элементы множества B принадлежат множеству A то B называется **подмножеством** множества A . Обозначают: $B \subseteq A$.

Примеры

пропустить 15 клеточек

операции над множествами

ОПР 5. Объединением множеств A и B называется множество, определяемое следующим образом:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ или } x \in$$

Читают:

Объединением множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B

пропустить 10 клеточек

ОПР 6. Пересечением множеств A и B называется множество, определяемое следующим образом:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ и } x \in$$

пропустить 10 клеточек

ОПР 7. Разностью множеств A и B (*дополнением B до A*) называется множество, состоящее только из тех элементов, которые входят в A , но не входят в B :

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ и } x \notin$$

пропустить 10 клеточек

Числовые множества: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{J} , \mathbb{R}

пропустить 20 клеточек

Мощность – обобщение понятия «количества элементов» для бесконечных множеств

ОПР 8. Говорят, что между множествами A и B установлено взаимнооднозначное соответствие, если каждому элементу множества A поставлен в соответствие один элемент множества B так, что:

- 1) разным элементам A соответствуют разные элементы B ;
- 2) каждый элемент множества B поставлен в соответствие некоторому элементу множества A .

пропустить 10 клеточек

Такие множества называются **эквивалентными**.

Обозначают: $A \sim B$

ОПР 9. Бесконечное множество A называется **счетным**, если можно установить взаимнооднозначное соответствие между множеством A и множеством натуральных чисел, т.е. если $A \sim \mathbb{N}$.

пропустить 10 клеточек

ОПР 9*. Всякое множество равномощное множеству \mathbb{N} называется **счетным**

примеры

пропустить 2 страницы

Вещественное число – это бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком + или - .

Свойства:

1. Упорядоченности: $\forall a, b \in R \quad a > b \vee a < b \vee a = b$
2. Свойство полноты: $\forall a, b \in R, \quad a \neq b \ (a < b) \quad \exists c \in R: a < c < b$
3. Свойство плотности: $\forall a, b \in R, \quad a \neq b \ (a < b) \quad \exists q \in Q: a < q < b$

Модуль – расстояние – абсолютное значение вещественного числа

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Свойства:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $|x - y| \geq |x| - |y|$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $|x / y| = |x| / |y|$

ОПР 10. Множество вещественных чисел $\{x\}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число M , что любой элемент x из множества $\{x\}$ будет меньше числа M .

$$\exists M \forall x \in \{x\} \quad x \leq M \quad M \text{ называется верхней границей}$$

ОПР 10*. $\{x\}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \forall x \in \{x\} \quad x \geq m \quad m - \text{нижняя граница множества } \{x\}$$

ОПР 10.** $\{x\}$ называется ограниченным, если $\exists C \forall x \quad x \in \{x\} \mid |x| \leq C$

пропустить 10 клеточек

ОПР 11. Наименьшая из верхних границ называется точной верхней границей или **супремумом** множества $\{x\}$

$$M = \sup \{x\}$$

Наибольшая из нижних границ называется точной нижней границей или **инфимумом** множества $\{x\}$

$$m = \inf \{x\}$$

Свойства $\sup \{x\}$ и $\inf \{x\}$.

пропустить 15 клеточек

Теорема 1 (Бернарда Больцано)

о существовании *sup* и *inf* числового множества

Если множество $X = \{x\}$ не пусто и ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) границу

Док-во: самостоятельно, по желанию

§ 2. Последовательность

Опр. 12 **Числовой последовательностью** называется счетное множество чисел

или

ОПР. 12* **Числовая последовательность** это взаимно однозначное соответствие множества N и множества R

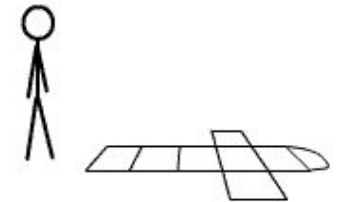
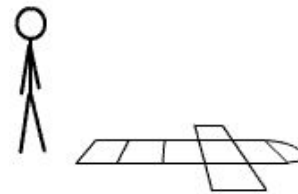
или

ОПР. 12** ... это $x_n = f(n)$ – функция натурального аргумента
– **решетчатая** функция

Обозначают $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots$ или $\{x_n\}$

пропустить 15 клеточек

Какие бывают последовательности?



ОПР. 13. Последовательность называется ограниченной

- сверху, если $\exists M < +\infty, \forall n \ x_n \leq M$
- снизу, если $\exists m > -\infty, \forall n \ x_n \geq m$
- ограниченной, если она ограничена сверху и снизу

пропустить 2 страницы