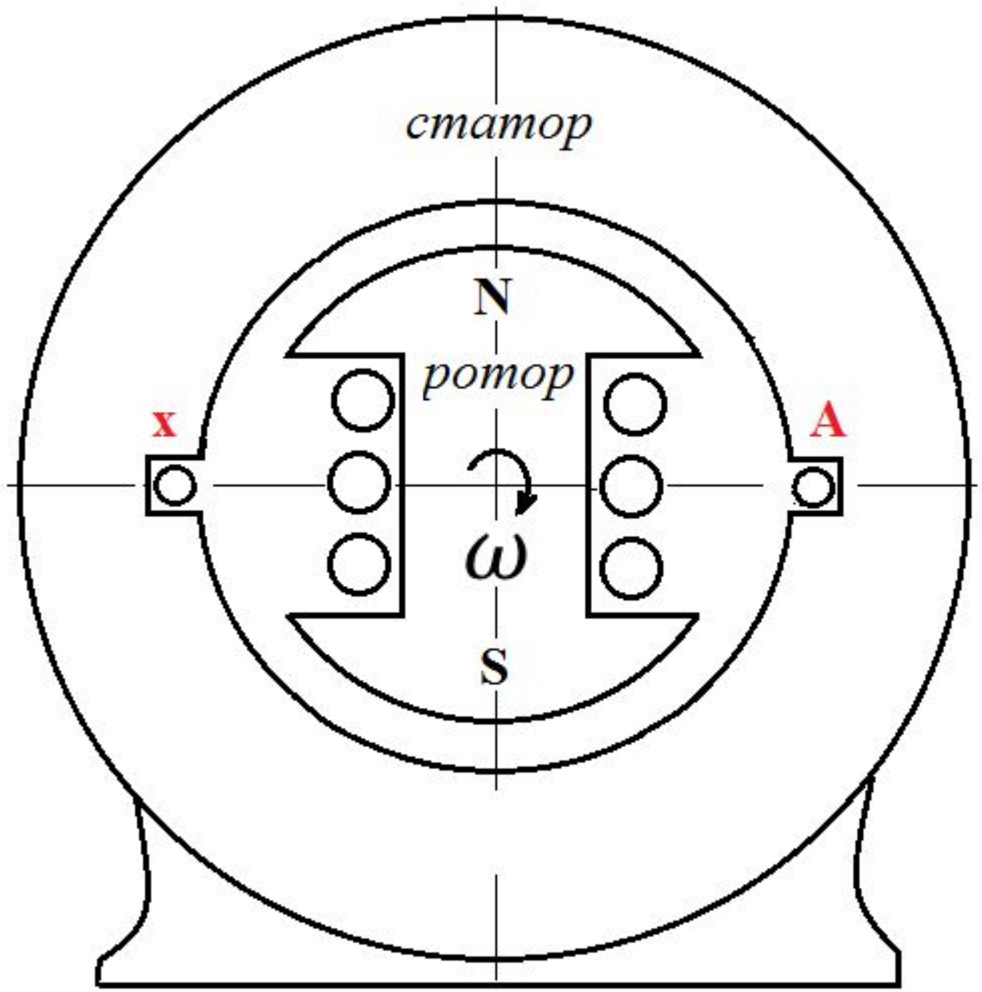
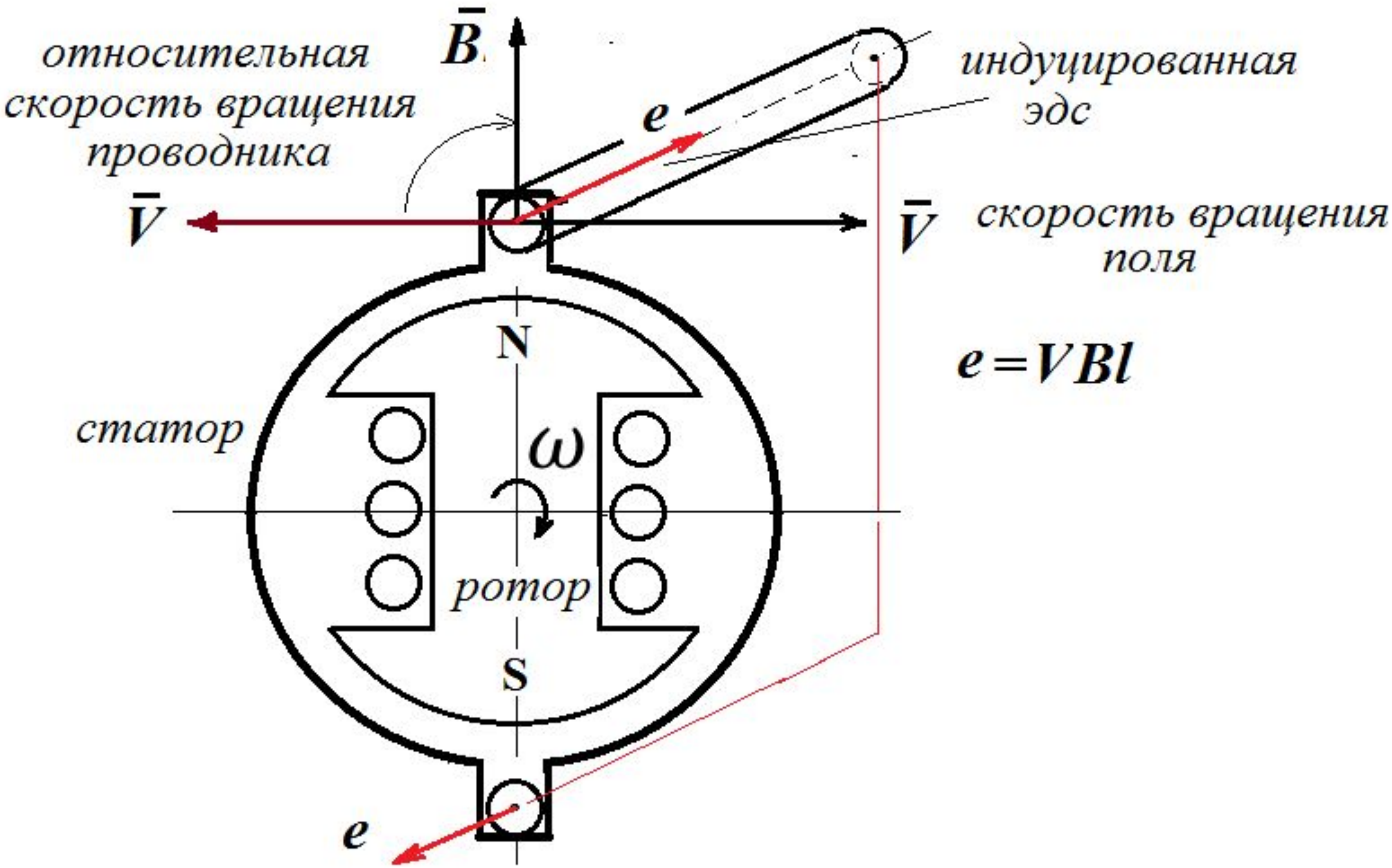
Электрические цепи синусоидального тока

Основные понятия.

Получение синусоидального напряжения (ЭДС).

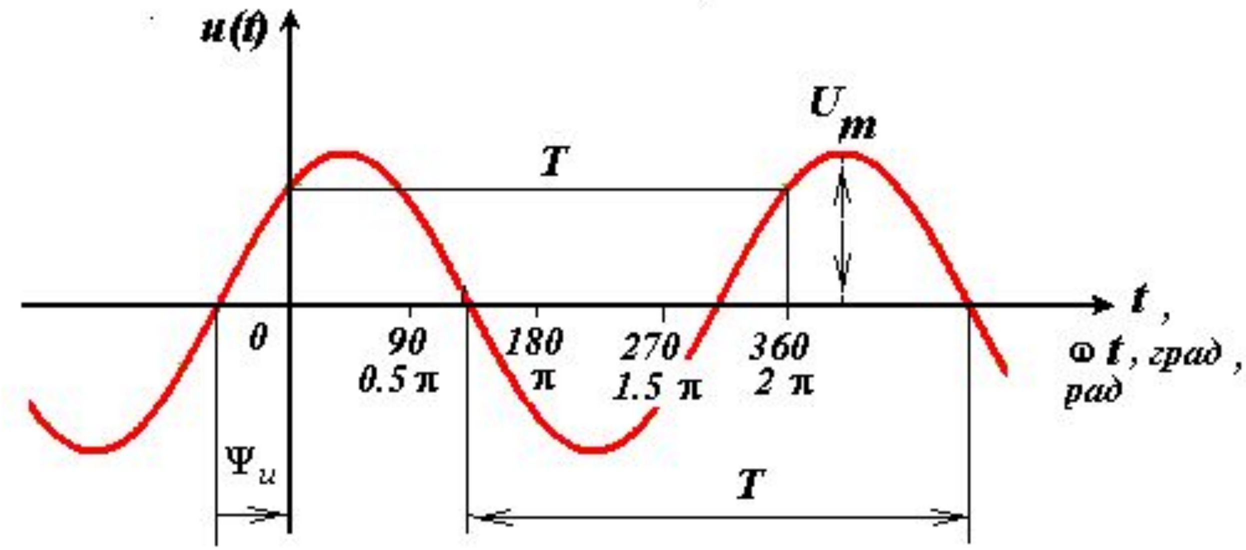




$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

Синусоидальная функция (гармоническое колебание) и характеризующие ее величины.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \qquad u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



амплитуда $I_m U_m$

частота ω

фаза $\omega t + \psi$

начальная фаза ψ

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $рад/с$ $f = \dfrac{1}{T}$ Гц $\omega = 2\pi \cdot f$ $I = I_m/\sqrt{2}$ $U = U_m/\sqrt{2}$

$U \quad I$ - действующие значения тока и напряжения

Пример $u(t) = 1{,}41\sin\left(2\pi \cdot 10^6 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $U_m = 1.41$ В $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ $рад/с$ $\psi_u = \dfrac{\pi}{2}$

$f = 2\pi/\omega = 10^6$ Гц $T = 1/f = 10^{-6}$ сек. $U = U_m/\sqrt{2} = 1$ В

Представление гармонических колебаний комплексными числами

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \mathrm{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = \mathrm{Im}(U_m \cos(\omega t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega t + \psi_u))$$

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$$

комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$

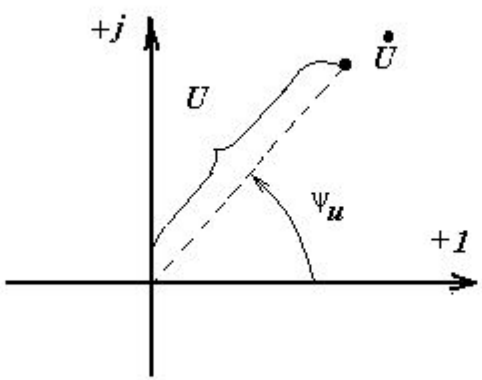
комплексная амплитуда тока

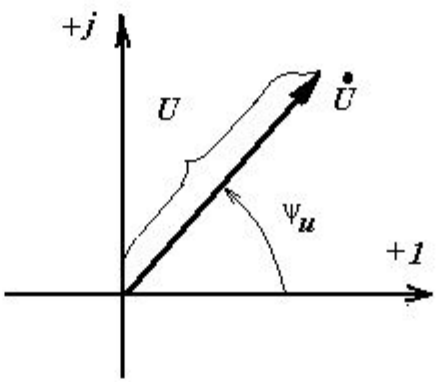
$$U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow U_m e^{j\psi_u}$$

Комплекс действующего значения напряжения и тока

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} \qquad \dot{I} = Ie^{j\psi_i}$$

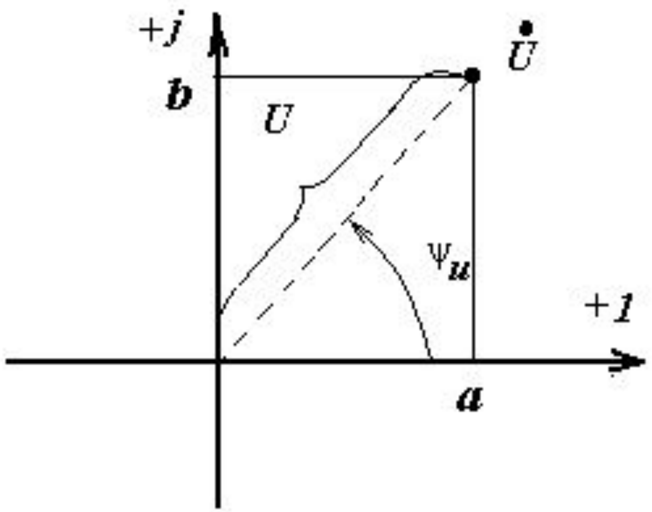
изображение на комплексной плоскости по координатам в полярной системе координат





$$j = \sqrt{-1}$$

Комплексы в декартовой системе координат



$$\dot{U} = a + jb$$

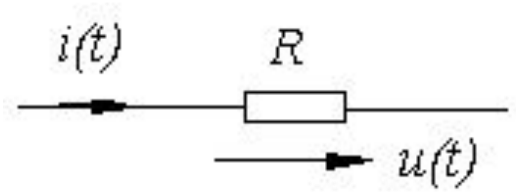
$$a = U\cos\psi_u \qquad b = U\sin\psi_u$$

$$U = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \psi_u = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Синусоидальный ток в элементах $R \quad L \quad C$

в режиме воздействия на них гармонического колебания

электрическое сопротивление R



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \qquad \dot{I} = I e^{j\psi_i}$$

$$u(t) = i(t) \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\dot{U} = R \cdot \dot{I} \qquad U = R \cdot I$$

$$\psi_u = \psi_i \qquad \varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$

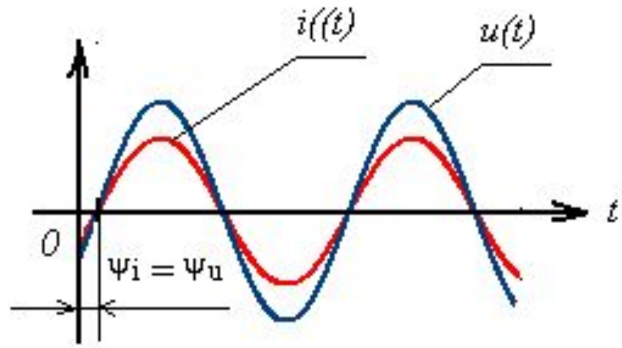
Комплексное сопротивление для электрического сопротивления R

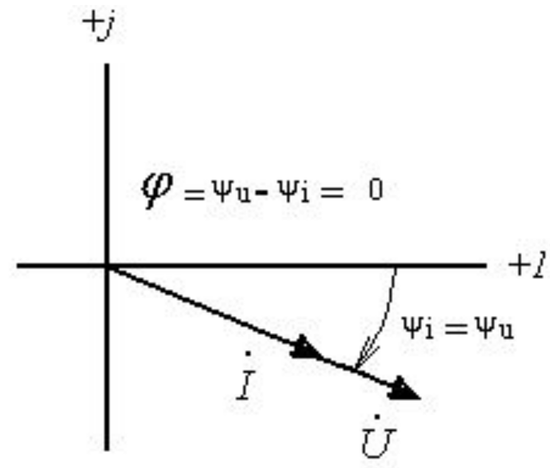
$$\underline{Z}_r = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R$$

Комплексная проводимость

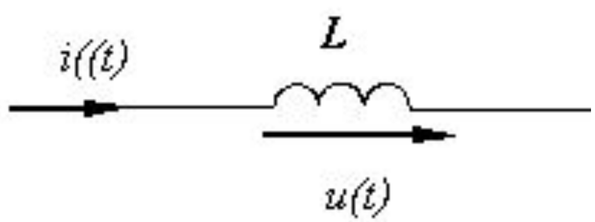
$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R} = G$$

временная и векторная диаграммы тока и напряжения на элементе R





индуктивность L



$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_i) = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i + 90^0)$$

$$\dot{U}_m = I_m \omega L e^{j(\Psi_1 + 90^0)} = j\omega L \dot{I}_m \qquad \dot{U} = I\omega L e^{j(\Psi_1 + 90^0)} = j\omega L \dot{I}$$

$X_L = \omega L$ *индуктивное сопротивление синусоидальному току*

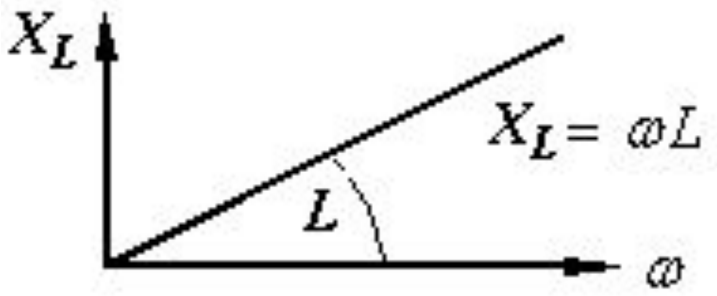
$\underline{Z}_L = jX_L$ *комплексное сопротивление индуктивности*

$\underline{Y}_L = \dfrac{1}{\underline{Z}_L} = -j \cdot b_L$ *комплексная проводимость индуктивности*

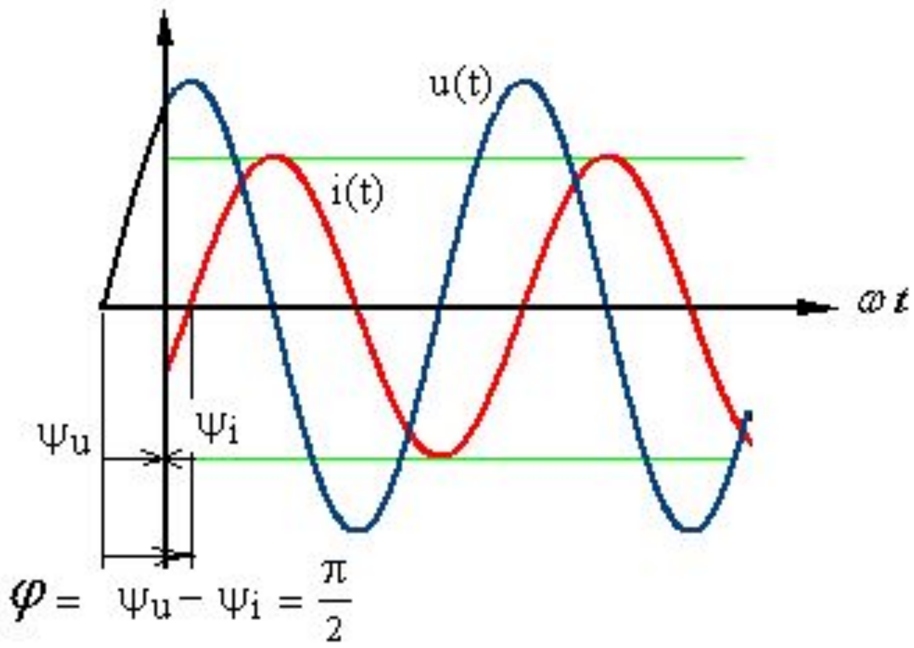
$b_L = \dfrac{1}{X_L} = \dfrac{1}{\omega L}$ *проводимость индуктивности*

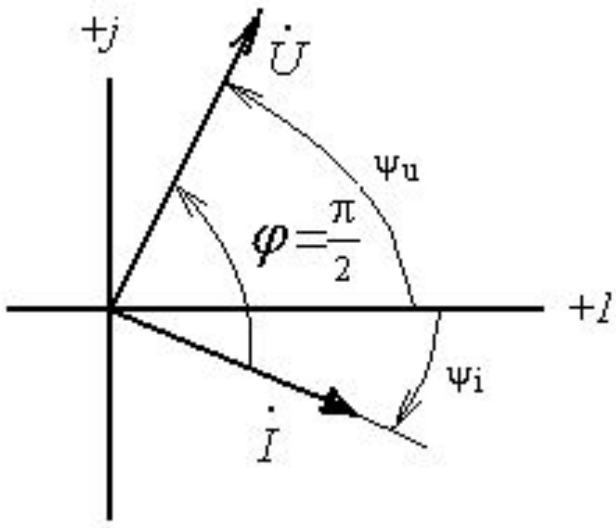
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^0$$

частотная характеристика индуктивного элемента

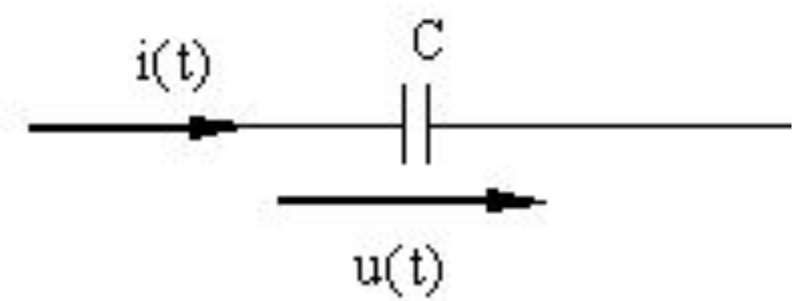


временная и векторная диаграммы тока и напряжения на индуктивности





емкость C



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{\omega C}\cdot I_m \cdot(-\cos(\omega \cdot t + \psi_i)) = \frac{1}{\omega C}\cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i - 90^0)$$

$$\dot{U} = \frac{1}{\omega C}\cdot I \cdot e^{j(\psi_i - 90^0)} = -j\cdot\frac{1}{\omega C}\cdot I \cdot e^{j\psi_i} = \dot{I}\cdot\frac{1}{j\omega C}$$

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ *емкостное сопротивление синусоидальному току*

$\underline{Z}_C = -jX_C$ *комплексное сопротивление емкости*

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = j \cdot b_C$$

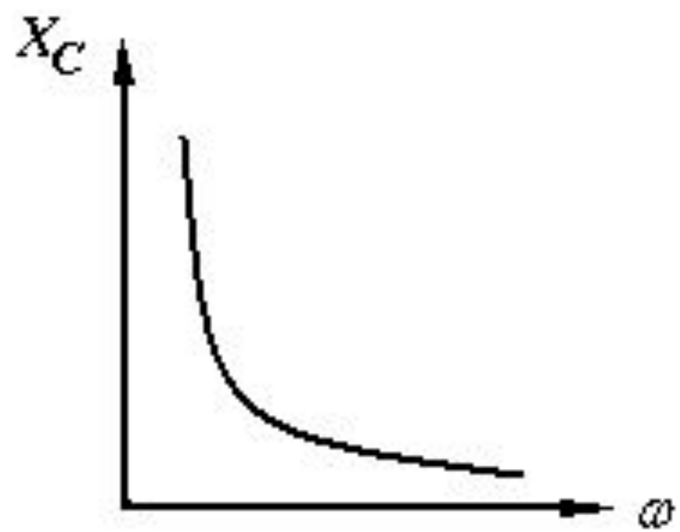
комплексная проводимость для емкостного элемента

$$b_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$$

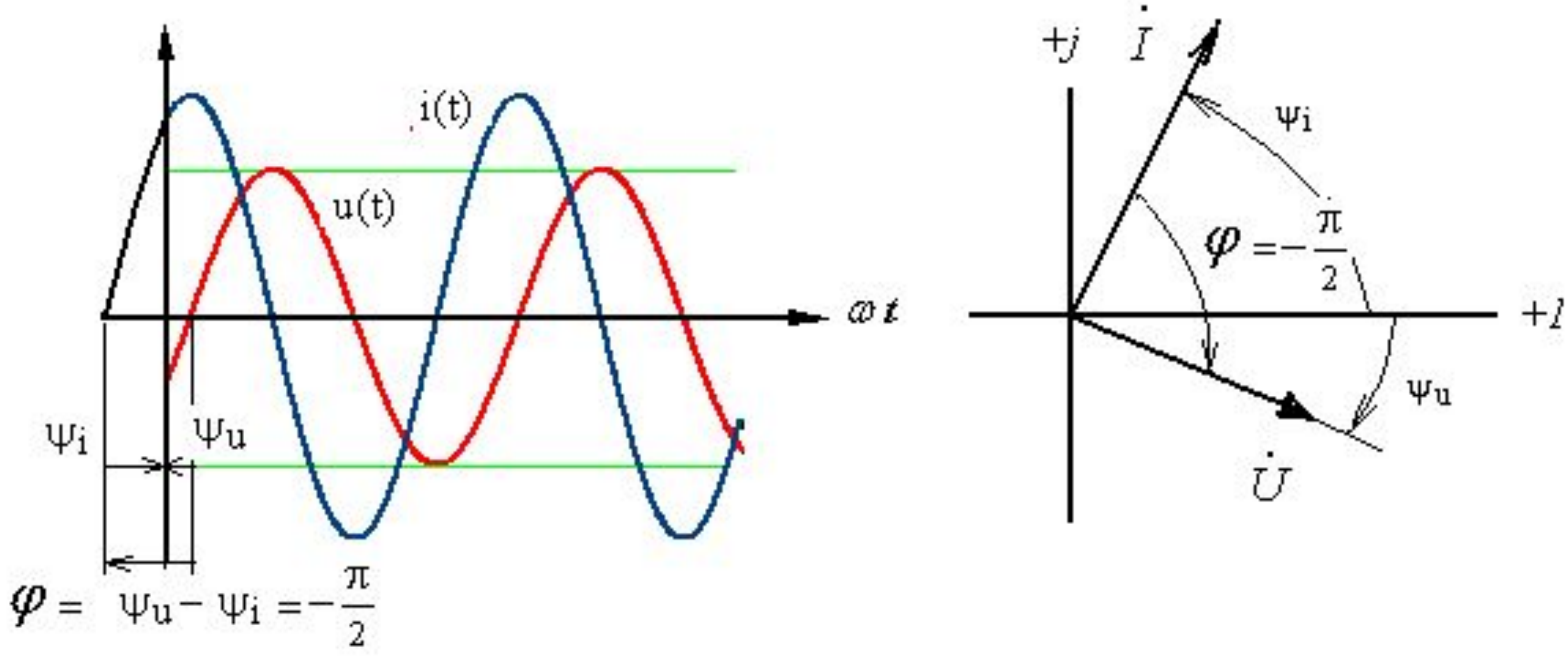
проводимость емкости

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^0$$

частотная характеристика емкостного элемента



временная и векторная диаграммы тока и напряжения на емкости



Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

первый закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n} \pm \dot{I}_k = 0$$

второй закон Кирхгофа в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n} \pm \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \pm \dot{E}_k$$

закон Ома в комплексной форме

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}$$

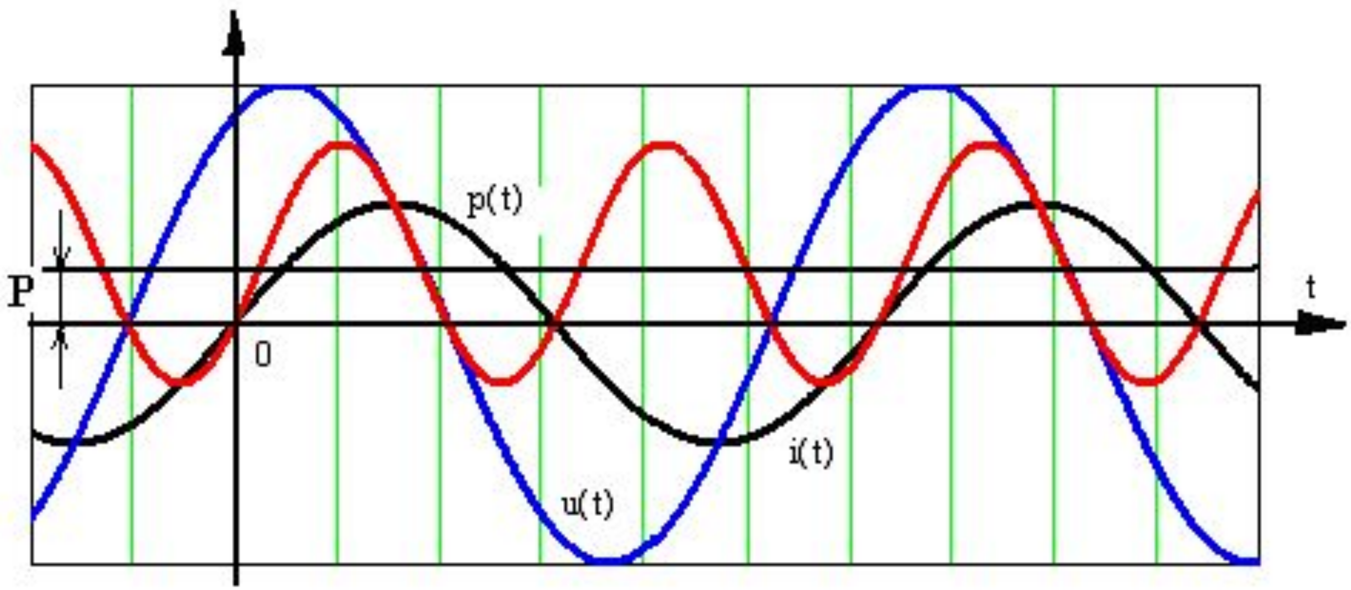
Мощность гармонических колебаний

Энергетические свойства двухполюсника определяются его мгновенной мощностью

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)\cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(\psi_u - \psi_i) - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)\right]$$

На рис. представлены графики тока, напряжения и мгновенной мощности в зависимости от времени из которых видно, что мгновенная мощность изменяется с двойной частотой.



Мгновенная мощность , как видно из графика и аналитического выражения имеет постоянную составляющую.

. Это средняя мощность, потребляемая двухполюсником за период колебания .

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{2}U_m \cdot I_m \cdot \cos\varphi = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Физический смысл средней мощности заключается в том, что она показывает мощность безвозвратно потребляемую цепью. Эта мощность выделяется в цепи либо в виде тепловой энергии (нагревание резисторов), либо преобразуется в другие виды энергии (механическая работа, например, в электродвигателях , химическая энергия , например при зарядке аккумуляторов, электромагнитное излучение, например, как в радиопередатчиках и радиоприемниках).

Средняя за период мощность называется *активная мощность цепи* , измеряется в ваттах (Вт)

Рассмотрим возможность определения активной мощности по заданным комплексным значениям напряжения и тока.

Введем понятие *комплексная мощность* цепи.

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\dot{U}_m \overset{*}{I}_m = \dot{U} \cdot \overset{*}{I}$$

где $\overset{*}{I}$ сопряженный комплекс действующего значения тока.

$$\dot{S} = \frac{1}{2}U_m e^{j\psi_u} I_m e^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi$$

Вещественная часть полученного комплексного числа есть *активная мощность* цепи

$$P = \mathrm{Re}(\dot{S}) = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Мнимая часть комплексной мощности называется *реактивная мощность* цепи

$$Q = \mathrm{Im}(\dot{S}) = U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

Физический смысл реактивной мощности – она оценивает максимальную скорость обмена энергией между источником и приемником. Реактивная мощность связана с энергиями электрического поля в емкостях схемы и магнитного поля в индуктивностях . Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных(Вар).

Модуль комплексной мощности называется *полная мощность* цепи

$$S = |\underline{S}| = UI$$

Таким образом можно записать:

$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\sin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Как видно из полученных формул реактивная мощность – это алгебраическое число. Ее знак зависит от знака угла сдвига фаз между током и напряжением

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

, то есть от характера реактивного сопротивления цепи , при $\varphi > 0$

,что соответствует индуктивному сопротивлению реактивная мощность положительна, при $\varphi < 0$

,что соответствует емкостному сопротивлению реактивная мощность отрицательна.

Понятие комплексная мощность оказывается удобным при расчете установившихся гармонических колебаний. Пусть двухполюсник имеет комплексное сопротивление

$$Z = r + jx$$

По определению комплексной мощности имеем:

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} = \dot{I} \cdot \dot{Z} \cdot \overset{*}{I} = \dot{I} \cdot \overset{*}{I} \cdot (r + jx) = I^2 r + jI^2 x$$

Следовательно, $P = I^2 r$ $\quad Q = I^2 x$

Косинус угла сдвига фаз между напряжением и током называется *коэффициентом мощности.*

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Этот коэффициент характеризует степень использования полной мощности

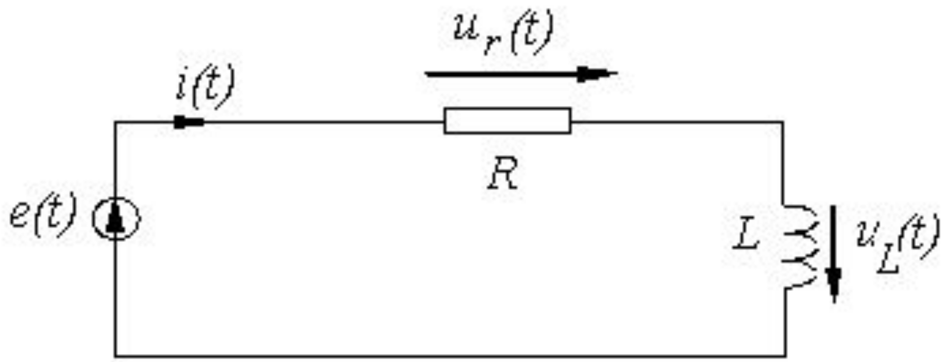
Чем больше $\cos\varphi$

при заданной средней мощности, тем меньше потери в установках, передающих энергию

Проблема повышения $\cos\varphi$

является одной из важнейших проблем энергетики .

Расчет простейших электрических цепей в режиме гармонических колебаний



дано

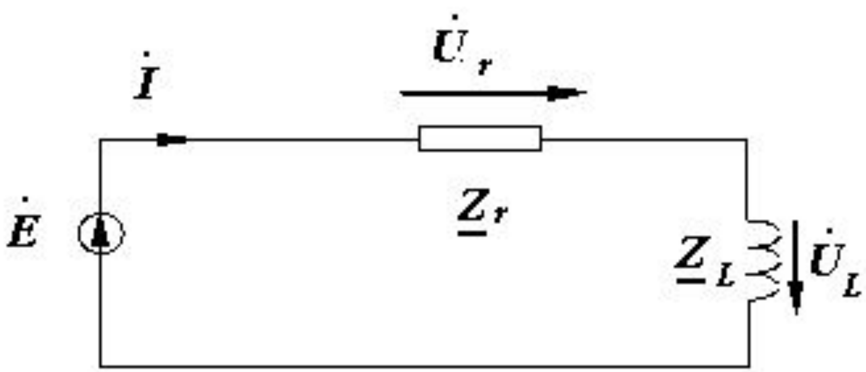
$$R \qquad L$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

решение

$$\dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e} \qquad \underline{Z}_r = R \qquad \underline{Z}_L = j \cdot X_L \qquad X_L = \omega \cdot L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_0} \qquad \underline{Z}_0 = \underline{Z}_r + \underline{Z}_L \qquad \dot{U}_r = \dot{I} \cdot \underline{Z}_r \qquad \dot{U}_L = \dot{I} \cdot \underline{Z}_L$$



комплексная схема замещения

расчет ЭЦ при числовых значениях

$E_m = 100\sqrt{2}$ В $\quad R = 100$ Ом $\quad L = 0.318$ Гн $\quad f = 50$ Гц $\quad \psi_e = 15^0$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 100 \qquad \dot{E} = 100e^{j15^0}$$

$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50 = 314$ 1/сек частота

$X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 0.318 = 100$ Ом

$\underline{Z}_L = j \cdot X_L = j100$ Ом

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + \underline{Z}_L} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 15^0}}{100 + j100} = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot \underline{Z}_L = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0} \cdot j100 = 100 \cdot e^{j \cdot 60^0}$$

$$\dot{U}_r = \dot{I} \cdot R = 1 \cdot e^{-j \cdot 30^0} \cdot 100 = 100 \cdot e^{-j \cdot 30^0}$$

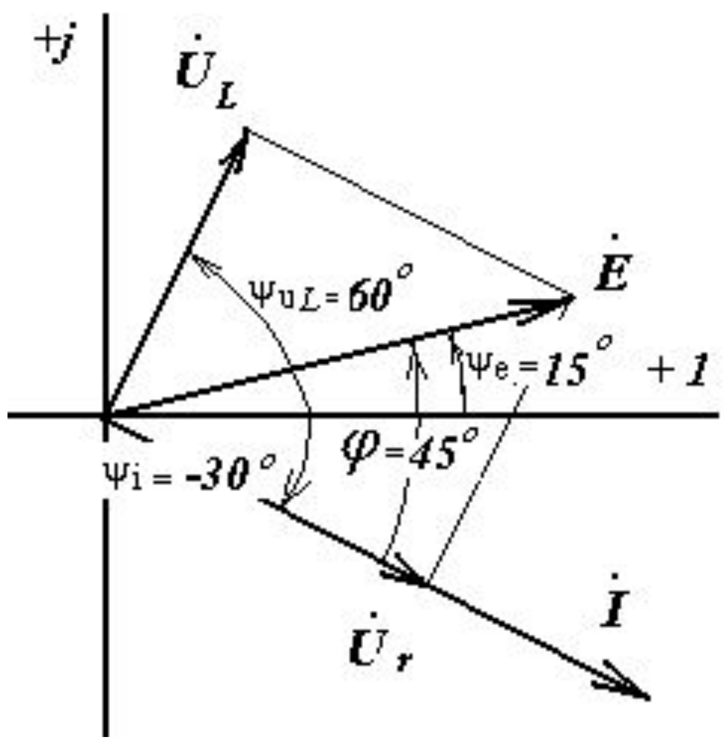
переход от комплексов к синусоидальным функциям

$$i(t) = 1\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 30^0)$$

$$u_L(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 60^0)$$

$$u_r(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 30^0)$$

векторная диаграмма тока и напряжений



Алгоритм расчета токов в сложной цепи комплексным методом

Для расчета цепей в гармоническом режиме рекомендуется следующий алгоритм действий:

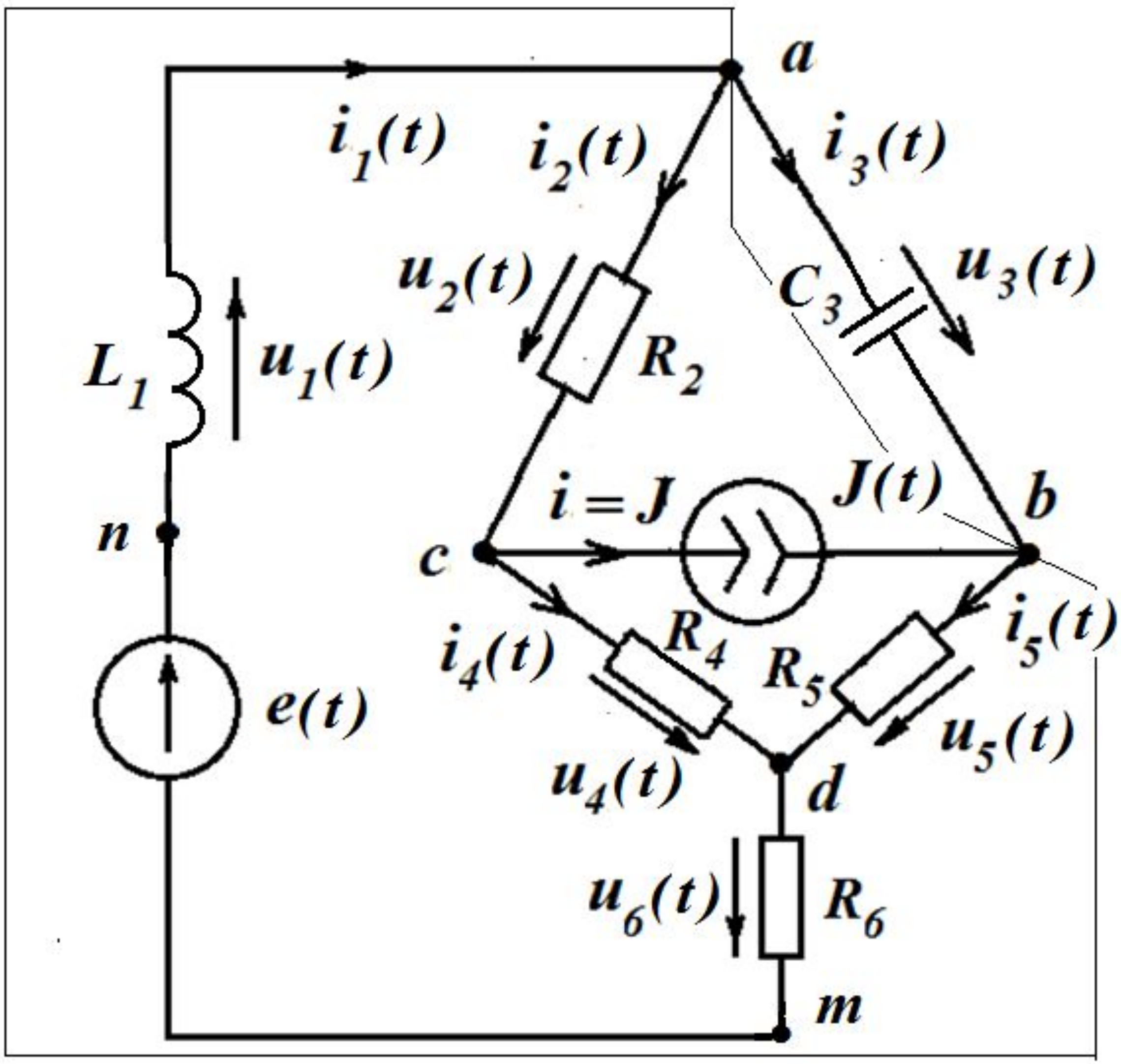
1. От мгновенных значений заданных источников перейти к комплексам действующих значений. Перевести пассивные элементы ЭЦ в комплексные сопротивления.

2. Используя известные правила составления системы уравнений записать алгебраические уравнения для комплексов действующих значений токов.

3. Решить систему уравнений и найти комплексы токов в ветвях.

4. Записать мгновенные значения найденных реакций.

Для расчета токов в сложной цепи можно использовать : законы Кирхгофа, МКТ, МУП, МЭГ



Для изображенной выше сложной цепи при заданных значениях:

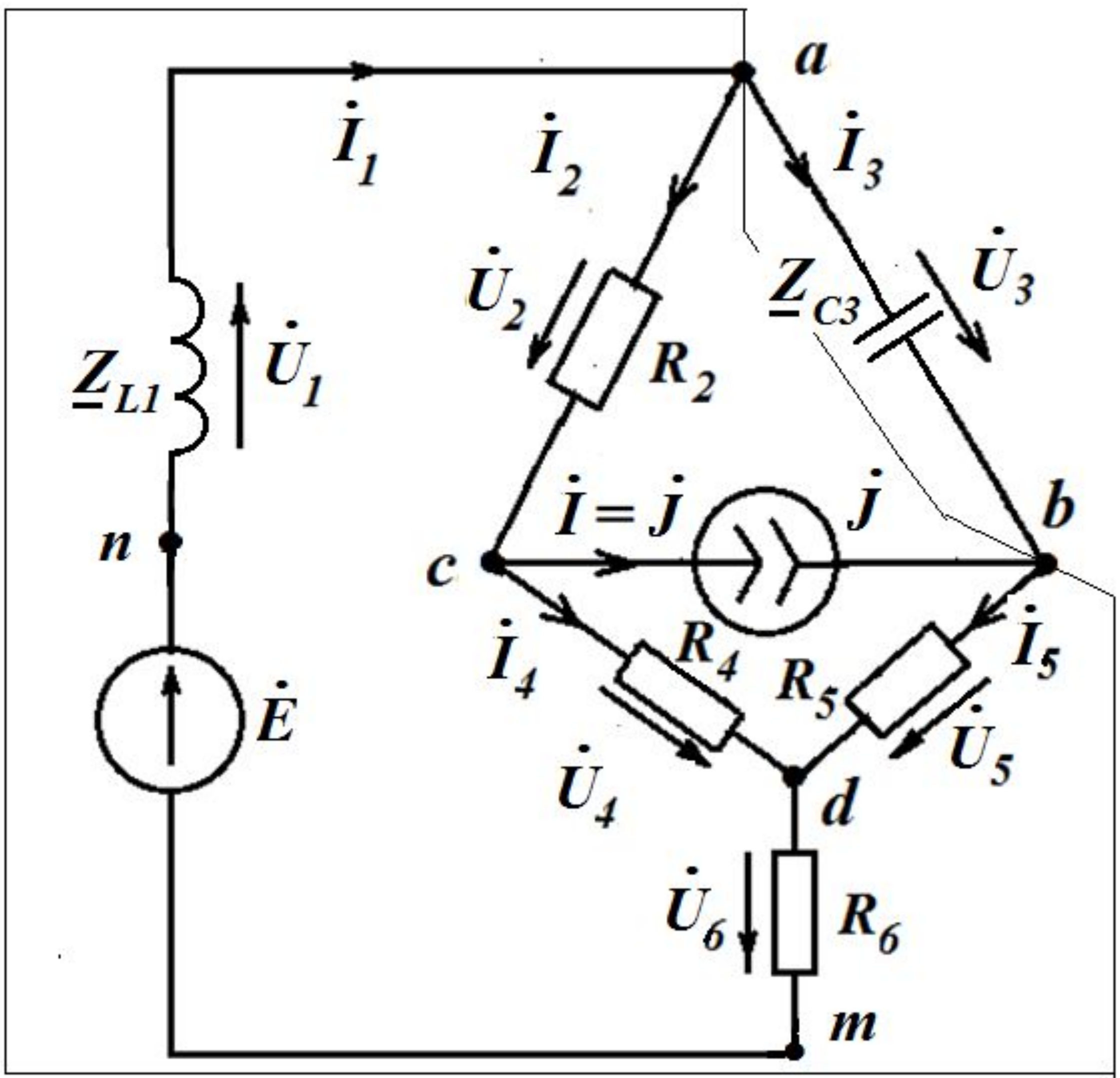
$$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u) \qquad J(t) = J_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_J)$$

$$R_2 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad L_1 \quad C_3$$

требуется рассчитать синусоидальные токи в ветвях ЭЦ

Расчет по законам Кирхгофа

1. Изобразим схему цепи в комплексной форме и представим исходные данные в комплексной форме



$$\dot{E} = Ee^{j\psi_e}$$

$$\dot{J} = Je^{j\psi_J}$$

$$\underline{Z}_{L1} = jX_{L1}$$

$$\underline{Z}_{C3} = -jX_{C3}$$

$$X_{L1} = \omega L_1$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3}$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

$$J = \frac{J_m}{\sqrt{2}}$$

2. Расставим в схеме стрелки токов и напряжений в комплексной форме

3. Составим систему расчетных уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме

Для изображенной комплексной схемы независимых узлов - 3, независимых контуров - 2, неизвестных токов - 5. Следовательно , по 1 закону Кирхгофа составляется 3 уравнения, по 2 закону - 2 уравнения.

Узел a : $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$

Узел b : $\dot{I}_3 + \dot{J} - \dot{I}_5 = 0$

Узел c : $\dot{I}_2 - \dot{J} - \dot{I}_4 = 0$

Контур I $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_4 + \dot{U}_6 = \dot{E}$

Контур II $\dot{U}_3 + \dot{U}_5 - \dot{U}_4 - \dot{U}_2 = 0$

С учетом уравнений связи (закона Ома в комплексной форме) уравнения по 2 закону Кирхгофа запишутся в виде

$$\dot{I}_1 (R_6 + \underline{Z}_{L1}) + \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_4 R_4 = \dot{E}$$

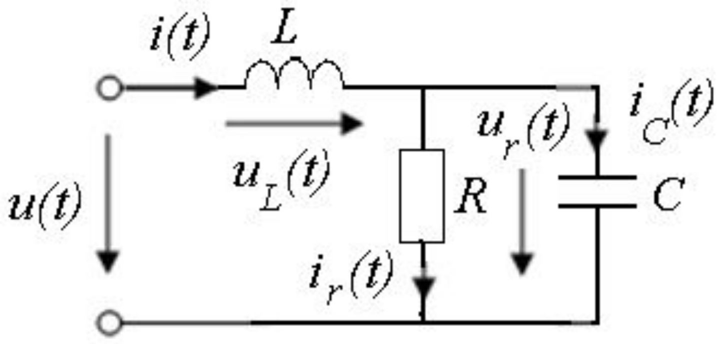
$$\dot{I}_3 \underline{Z}_{C3} + \dot{I}_5 R_5 - \dot{I}_4 R_4 - \dot{I}_2 R_2 = 0$$

4. Решить систему расчетных уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме, используя матричную форму записи уравнений ,на ЭВМ или ручным расчетом

5. Перейти от комплексов действующих значений токов к мгновенным значениям (синусоидальным функциям времени)

Резонансные явления в цепях синусоидального тока

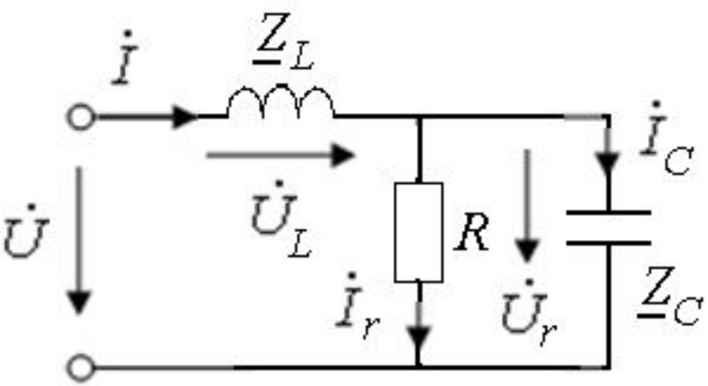
Резонанс - это явление при котором ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе



$$\psi_u = \psi_i$$

Следствия из этого условия :

$$1.\quad \varphi = 0 \qquad 2.\quad \underline{Z}_э = R_э(X_э = 0)$$



Для данной цепи можно получить:

$$\underline{Z}_э = \underline{Z}_L + \frac{R \cdot \underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = jX_L + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} =$$

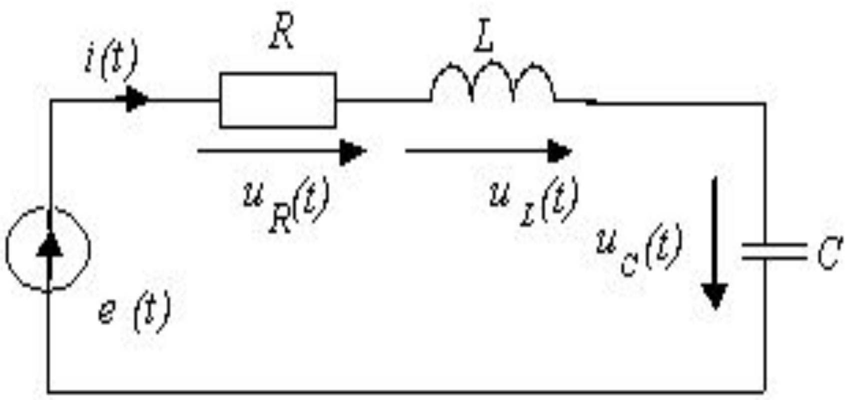
$$= jX_L + \frac{R\cdot(-jX_C)\cdot(R+jX_C)}{(R-jX_C)(R+jX_C)} = \frac{RX_C^2}{R^2+X_C^2} + j(X_L - \frac{R^2X_C}{R^2+X_C^2}) =$$

$$= R_э + jX_э$$

Условие резонанса для данной цепи :

$$X_э = 0 \qquad\qquad (X_L - \frac{R^2X_C}{R^2+X_C^2}) = 0$$

резонанс в последовательном колебательном контуре (резонанс напряжений)



$$e(t) = E_m \sin \omega t$$

$$\underline{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

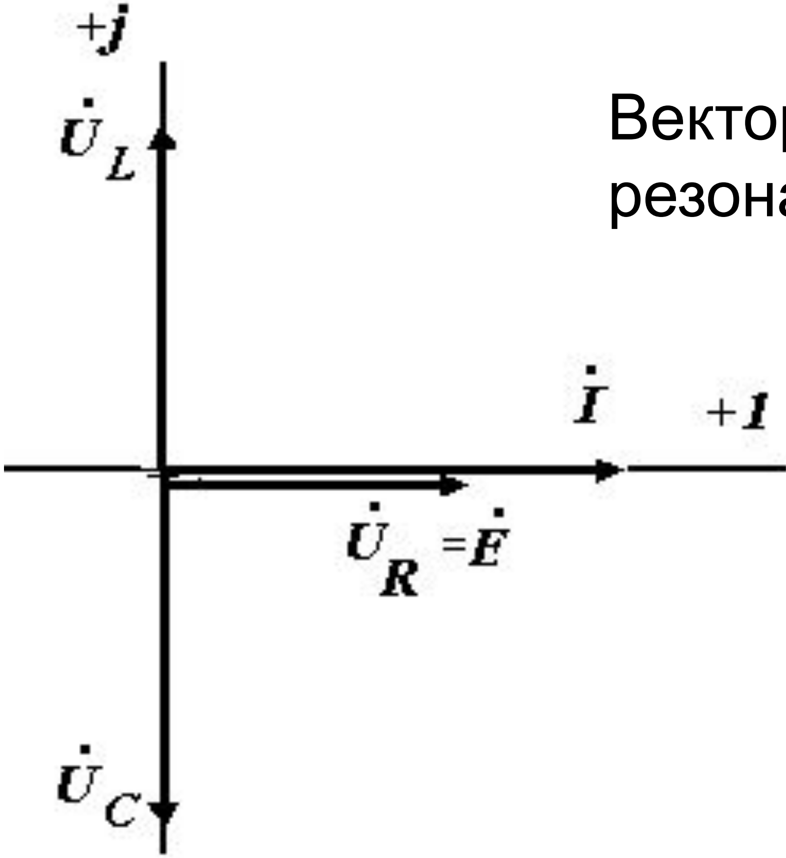
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j\,arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

Условие резонанса :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad X_L = X_C$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Векторная диаграмма при резонансе

волновое сопротивление контура

$$\rho = \left.\frac{U_C}{I}\right|_{\omega=\omega_0} = \left.\frac{U_L}{I}\right|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

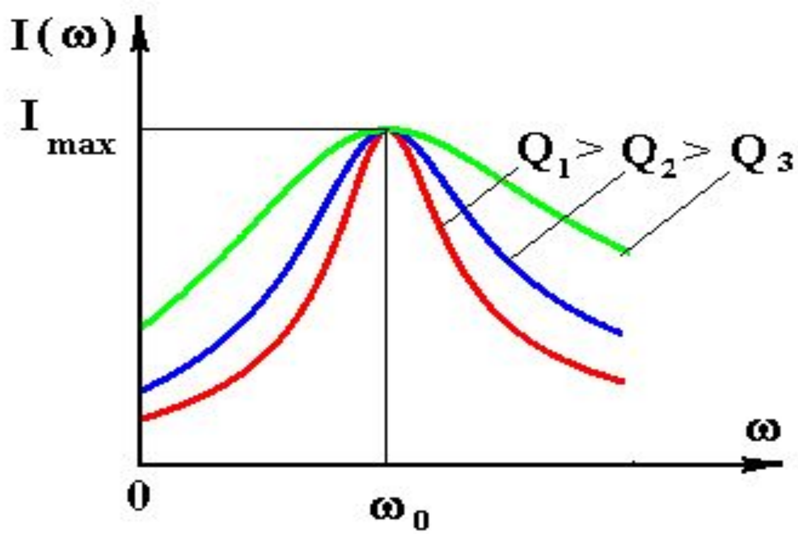
добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1/\omega_0 C}{R}$$

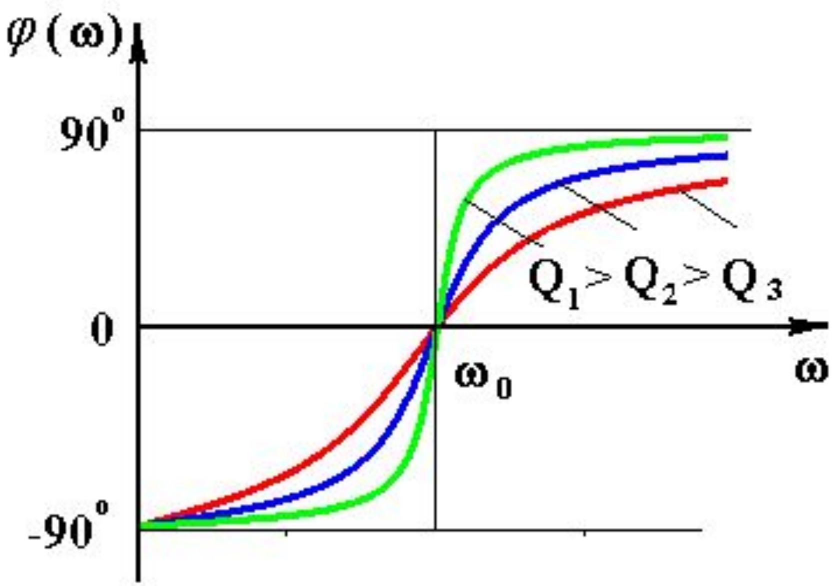
резонансное сопротивление контура

$$Z_{рез} = \frac{\rho}{Q} = R$$

Частотные характеристики последовательного колебательного контура

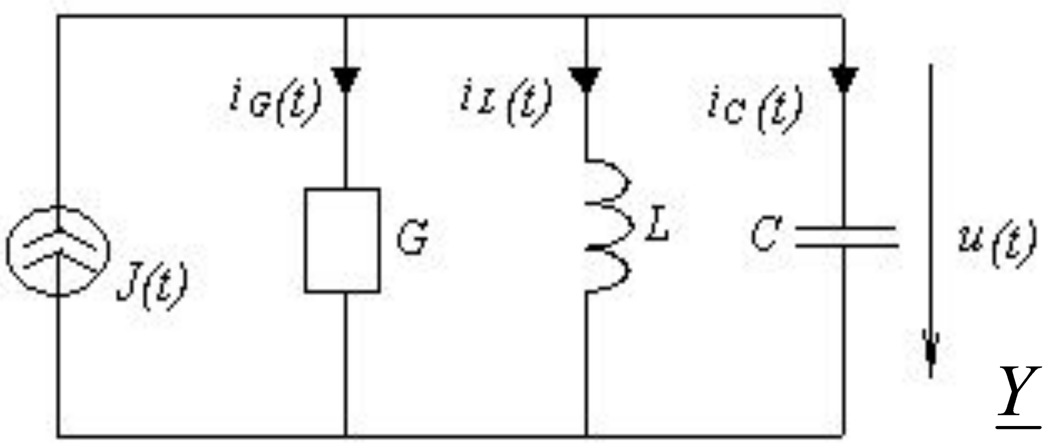


Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)



Фазо-частотная характеристика (ФЧХ)

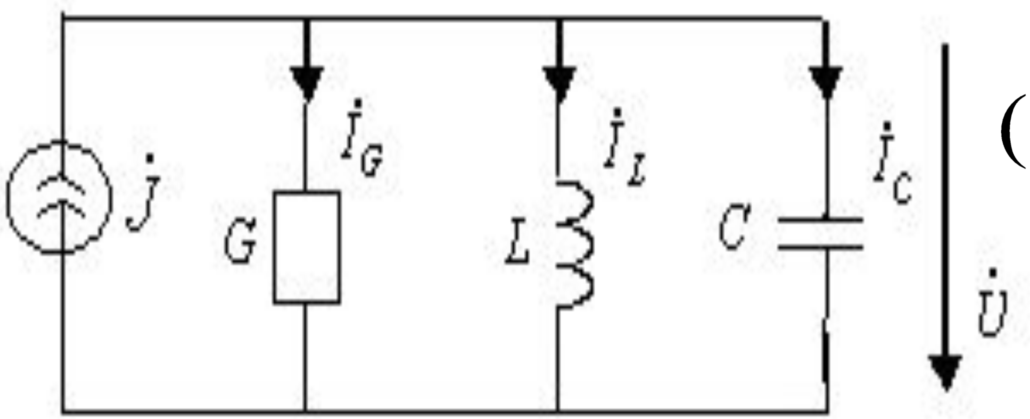
резонанс в параллельном колебательном контуре
(резонанс токов)



$$J(t) = J_m \sin \omega t$$

Комплексная проводимость

$$\underline{Y}(j\omega) = G + j(\omega C - 1/\omega L)$$



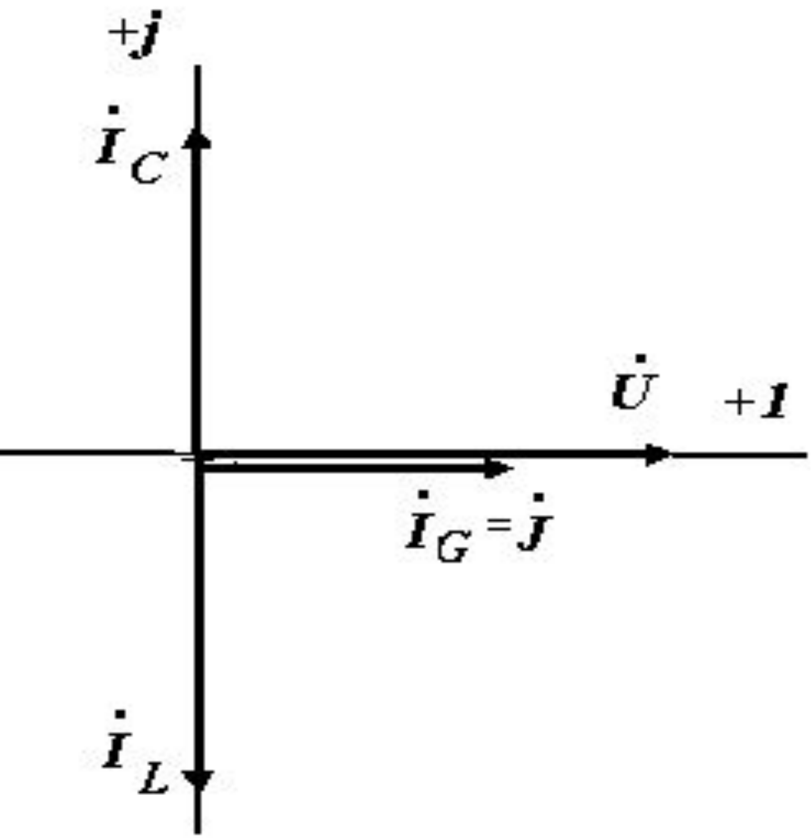
Условие резонанса

$$(\omega C - 1/\omega L) = 0 \quad b_L = b_C$$

резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{J}}{\underline{Y}(j\omega)} = \frac{\dot{J}}{G + j(\omega C - 1/\omega L)} = \frac{J e^{j0^0}}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)}}$$



Векторная диаграмма при резонансе

волновое сопротивление контура

$$\rho = \frac{U}{I_L}\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U}{I_C}\Big|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

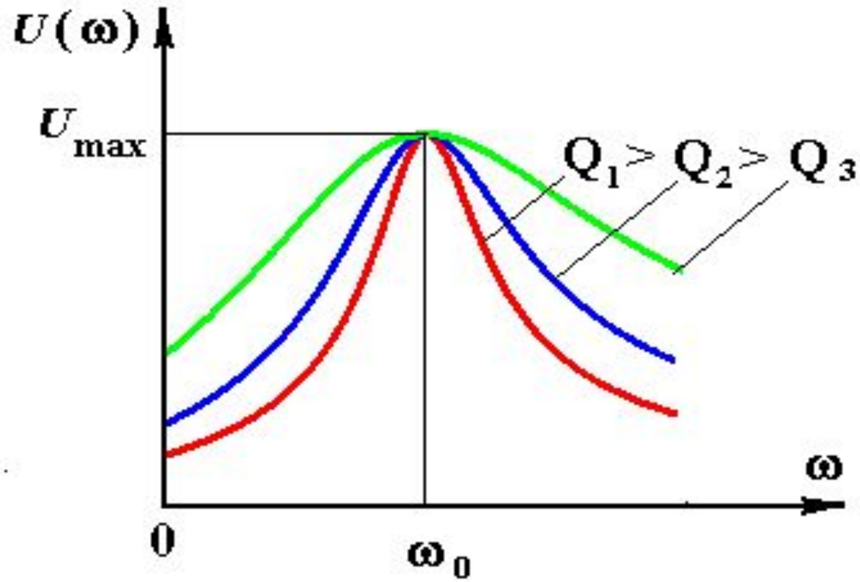
добротность контура

$$Q = \frac{1}{G\rho} = \frac{1}{G\omega_0 L} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

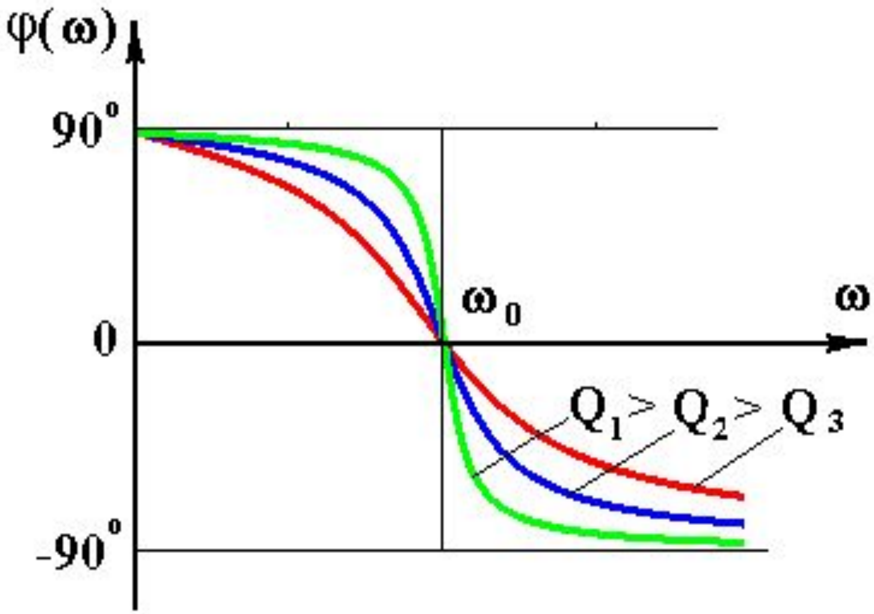
резонансное сопротивление контура

$$Z_{рез} = \rho Q = \frac{1}{G} = R$$

Частотные характеристики параллельного колебательного контура

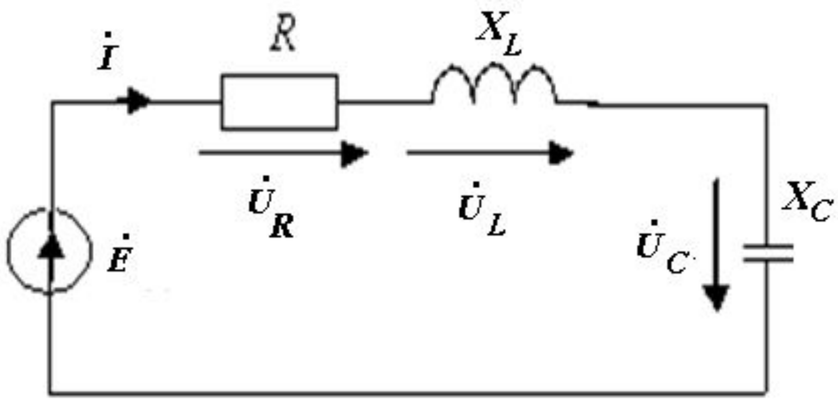


Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)



Фазо-частотная характеристика (ФЧХ)

Практическое значение резонанса

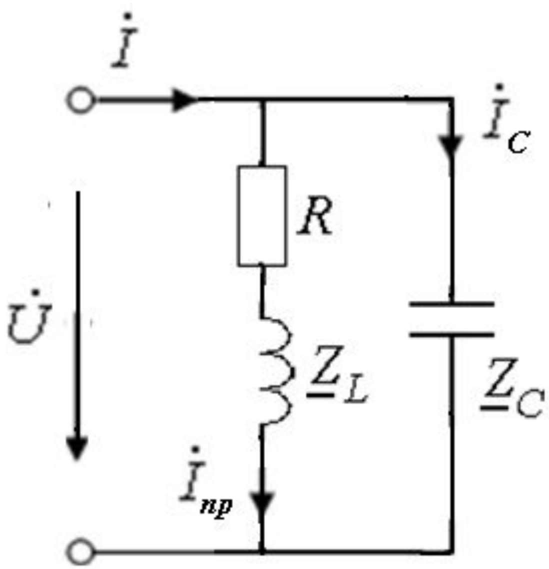


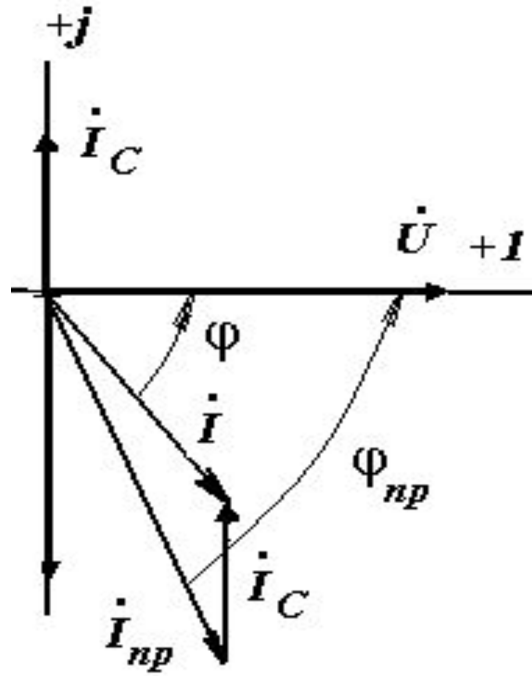
резонанс напряжений

При добротности контура

$$Q = 1000 \quad , E = 1 \quad B \Rightarrow U_C = 1000\, B$$

Повышение коэффициента мощности в энергосистеме





$$\cos\varphi > \cos\varphi_{пр}$$