Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, **где** $a \neq 1$, $a > 0$
называют логарифмическими уравнениями

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a h(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод потенцирования.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5{,}5 \end{array}\right. \\ -1{,}5<x<0{,}5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x)$$

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x = \log_5 0,04$$

$$ОДЗ: \; x > 0$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

$$\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$$

пусть $\log_5 x = t$, *тогда*

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25 \in ОДЗ, \\ x = 0,2 \in ОДЗ. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_x\left(3x^{\lg x}+4\right)=2\lg x$$

ОДЗ : $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$

По определени ю логарифма

$$x^{2\lg x}=3x^{\lg x}+4$$

Пусть $x^{\lg x}=t$, *где* $t>0$ *тогда*

$$t^2-3t-4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ не удовлетворяет} \\ t=4 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x}=4$$

Прологарифмируем обе части по основанию 10:

$$\lg\left(x^{\lg x}\right)=\lg 4$$

$$\lg x \lg x=\lg 4$$

$$\lg^2 x=\lg 4$$

$$\lg x=\pm\sqrt{\lg 4}$$

$$x=10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$$

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

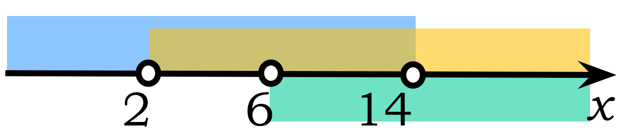
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$т.к.\ \ a = 3 > 1,\ то$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

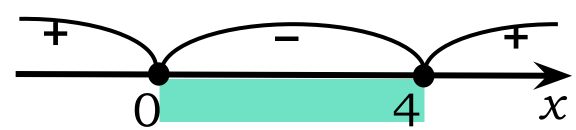
$т.к.\ \ a = \frac{1}{2} < 1,\ то$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases} \quad -\ лишнее\ \ условие$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

$$\lg\left(x(45 - x)\right) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg\left(45x - x^2\right) < \lg 200$$

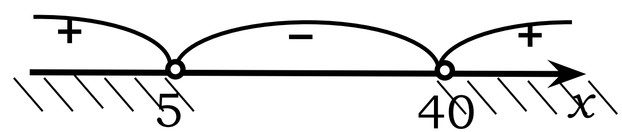
т.к. $a = 10 > 1$, то

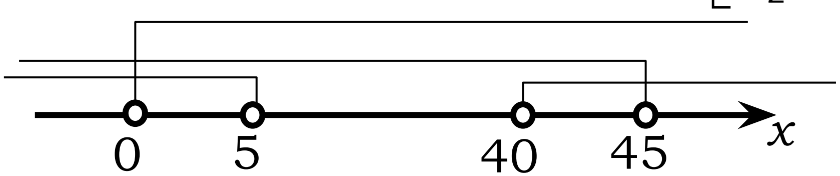
$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases}$$

н.ф.: $x^2 - 45x + 200 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{array}\right.$$





Ответ: $(0;\ 5) \cup (40;\ 45)$.

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 4

$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0 \quad ОДЗ: \; x > 0$

$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0$

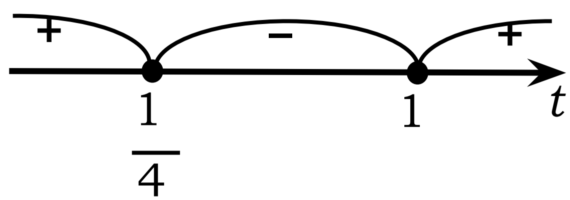
$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$4t^2 - 5t + 1 \le 0$

н.ф.: $4t^2 - 5t + 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{array}\right.$



$\dfrac{1}{4} \le t \le 1$

Вернемся к исходной переменной

$\dfrac{1}{4} \le \log_2 x \le 1$, т.к. $a = 2$, то

$\sqrt[4]{2} \le x \le 2$

Ответ: $[\sqrt[4]{2};\, 2]$.

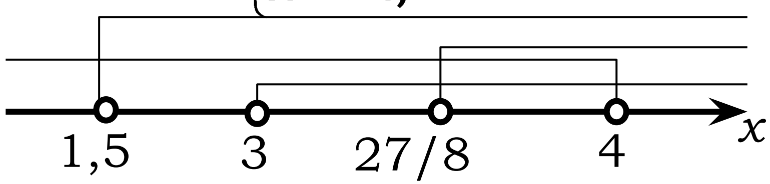
Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 5

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

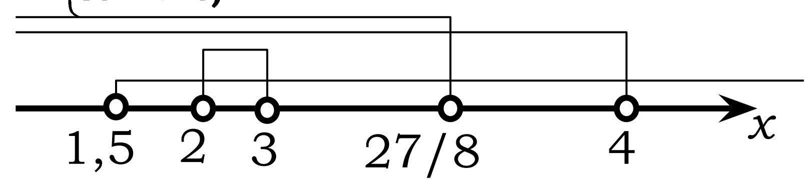
Возможны два случая :

1) $\begin{cases} x-2>1, \\ 2x-3>24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x>\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases}$



$x \in (27/8;$
$4)$

2) $\begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3<24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2<x<3, \\ x<\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases}$



$x \in (2;\ 3)$

Ответ: $(2;\ 3) \cup (27/8;\ 4)$

Логарифмическая комедия математический софизм «2>3»

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} - \textit{очевидно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} > 3 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$2 > 3 - \textit{неверно}!!!$$