# Лекция 11. Основы теории автоматического управления. УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

# Литература

# Процесс управления и требования к нему

Процесс управления во времени определяется решением дифференциального уравнения, описывающего динамическое поведение замкнутой системы. Чтобы определить его необходимо знать, как минимум, передаточную функцию замкнутой системы. Это решение для регулируемой величины имеет вид

$$y(t) = y_{пер}(t) + y_{\text{вн}}(t))$$

# Процесс управления и требования к нему

где

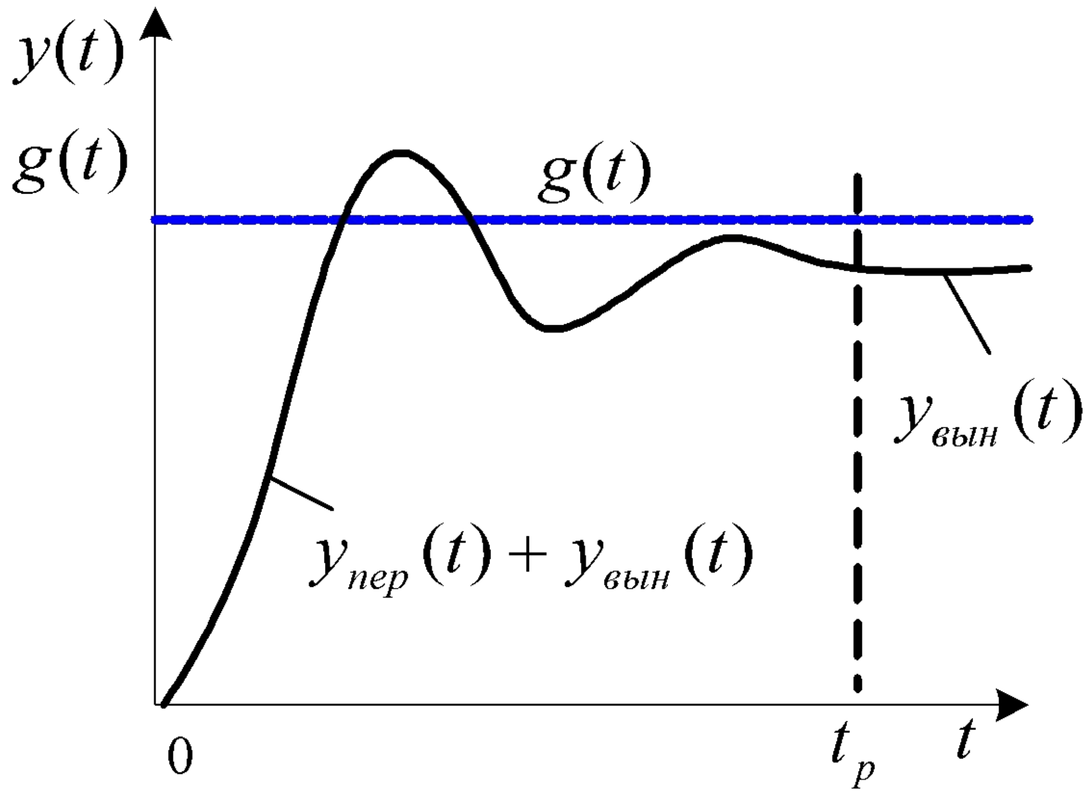
$y_{пер}(t)$ – переходная составляющая процесса управления или собственное движение, определяется решением однородного уравнения при заданных начальных условиях , и характеризует переходной процесс в системе управления.

$y_{вн}(t)$ – вынужденное или частное решение дифференциального уравнения, зависит от вида правой части уравнения.

# Процесс управления и требования к нему

Фактически на вынужденную составляющую $y_{\text{вн}}(t)$ процесса управления накладывается переходной процесс $y_{пер}(t)$, который теоретически длится бесконечность, а практически его влияние становиться ничтожно малым через конечное время, так называемое *время регулирования* $t_p$. После затухания переходной составляющей $y_{пер}(t)$ в САУ останется только вынужденная $y_{\text{вн}}(t)$ составляющая процесса управления , т. е. *установившейся процесс,* как показано на рис

# Процесс управления и требования к нему




Пример графика переходного процесса в САУ

# Процесс управления и требования к нему

С точки зрения протекания процесса управления, требования к системе формируются следующими тремя основным направлениями:

- устойчивостью;
- точностью;
- качеством процесса управления.

# Процесс управления и требования к нему

Устойчивость гарантирует затухание переходного процесса, после чего обеспечивается требуемая точность работы САУ и желаемое качество переходного процесса.

Для определения решения дифференциального уравнения  применяются различные способы:

- классическое математическое решение;
- операторный метод;
- численные методы решения дифференциальных уравнений (например метод Рунге-Кутта);
- графические методы решения (моделирование на АВМ)

# Корневой метод исследования устойчивости

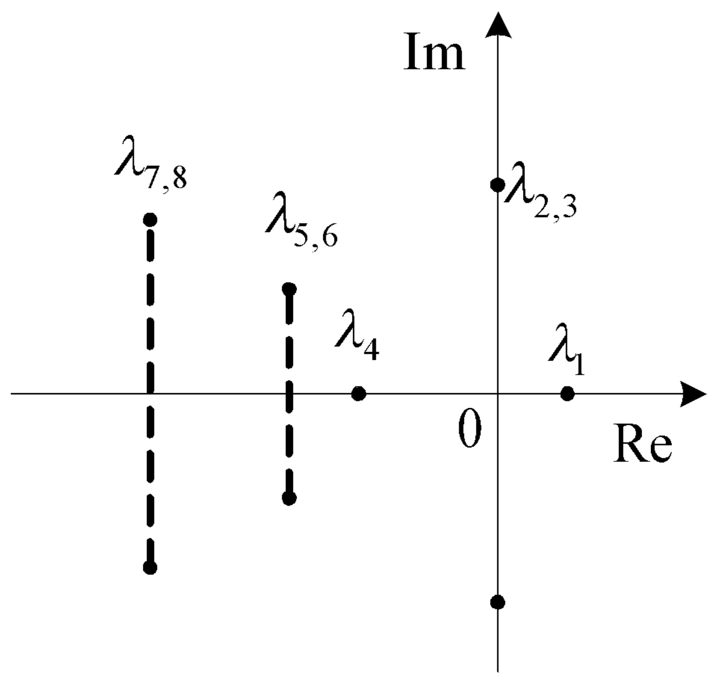
Устойчивость САУ – одно из важнейших условий ее работоспособности, так как требование устойчивости включает в себя требование затухания переходного процесса во времени. Очевидно, что система с расходящимся процессом была бы неработоспособной.

# Процесс управления и требования к нему

*Устойчивой* является САР, реакция которой на ограниченное воздействие является также ограниченной величиной.

# Корневой метод исследования устойчивости

Рассмотрим комплексную плоскость распределения корней характеристического полинома замкнутой системы управления , изображенную на рис.



# Корневой метод исследования устойчивости

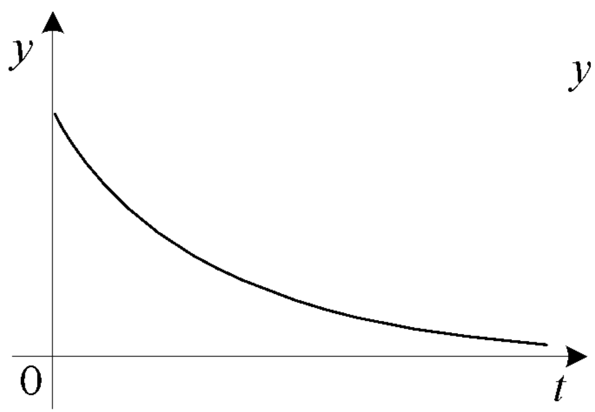
Под *устойчивостью линейной системы* понимают *свойство затухания переходного процесса с течением времени*, то есть

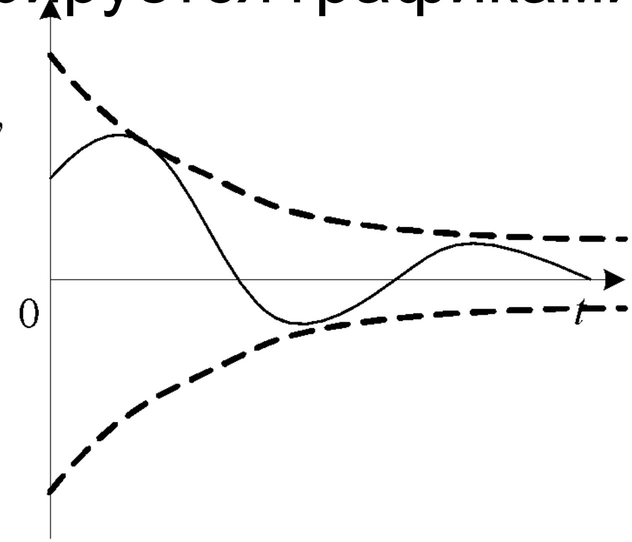
$$y_{пер}(t) \to 0 \quad t \to \infty$$

# Корневой метод исследования устойчивости

I. Свойство устойчивости имеет место тогда, когда все корни характеристического полинома $D(p)=0$ $\lambda_i, \forall i=\overline{1,n}$ обладают *отрицательными* вещественными частями $\operatorname{Re}\lambda_i<0, i=\overline{1,n}$

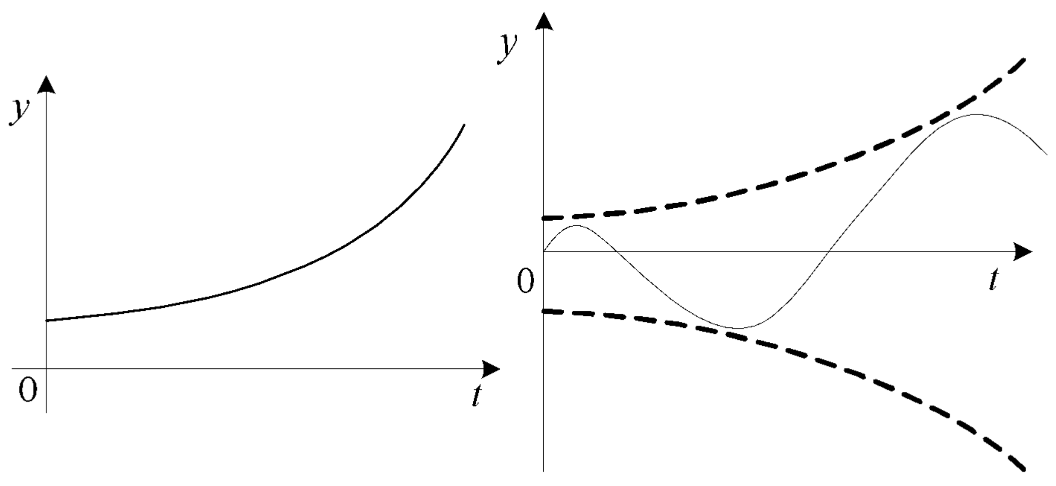
Это иллюстрируется графиками на рис



# Корневой метод исследования устойчивости

2. Если хотя бы один из *вещественных корней*, или если хотя бы одна *пара комплексных корней* будет иметь *положительную вещественную часть*, то переходной процесс будет расходящийся, как показано на рис.



# Корневой метод исследования устойчивости

*Условие устойчивости*, следовательно, заключается в том, что *все корни* характеристического полинома *должны располагаться в левой полуплоскости* комплексного переменного, а мнимая ось плоскости корней служит *границей* устойчивости.

# Критерий Гурвица

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости и неустойчивости системы непосредственно по коэффициентам характеристического полинома без вычисления его корней. В ТАУ наибольшее применение получили критерии Гурвица и Рауса. Рассмотрим критерий Гурвица.

# Критерий Гурвица

Предварительно определим необходимое условие устойчивости.

Предположим, что характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$D(p) = A(p) + kB(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

*Необходимым*, но недостаточным условием устойчивости САУ является *положительность всех коэффициентов* характеристического полинома замкнутой САУ .

# Критерий Гурвица

*Для устойчивости линейных систем необходимо и достаточно, чтобы при положительности всех коэффициентов* $a_i > 0, \forall i = \overline{0,n}$ *характеристического полинома* $D(p) = 0$ *все главных определителей матрицы Гурвица* $\Delta_k > 0, \forall 0 < k < n$ *были положительны*

Матица Гурвица обозначена буквой «Г» и имеет вид

# Критерий Гурвица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0,$$

$$\Delta_2 = (a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3}) > 0,$$

$$\Delta_3 = (a_{n-3})\Delta_2 - a_{n-1}[(a_{n-1})(a_{n-4}) - a_n(a_{n-5})] > 0,$$

$$\vdots$$

$$a_0 > 0.$$