Теория вероятности и основы математической статистики

Тема 1. Предмет теории вероятностей

1.1 Основные понятия теории вероятностей

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых, однородных случайных событий.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. То есть появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

Виды событий

Достоверное	Невозможное	Случайное
- событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществляться определенная совокупность условий S Пример: t°=20°, вода в жидком состояние, нормальное атмосферное давление- достоверное событие	- событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S Пример: Вода при тех же условиях не может быть в твердом состоянии	- событие, которое при осуществлении совокупности условий сможет либо произойти, либо нет. Пример: бросается монета: орел-решка; бросается кубик Событие - результат испытания(условия)

Некоторые виды случайных событий

Несовместимые	Равновозможные	Единственновозможные
- если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании Пример: орел-решка, стандартная и нестандартная деталь	- если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным чем другое Пример: орел-решка равновозможные	- события таковы, что одно из них непременно должно иметь место при испытании Пример: достать один шар № 1….10

1.2 Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика- раздел математики, занимающийся решением задач, в которых производится подсчет различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу

Основные виды соединений: размещения, перестановки, сочетания

1. Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком расположения. Число всех возможных комбинаций:

$$A_n^m = n*(n-1)\dots(n-m+1)$$

2. <u>Перестановками</u> называется комбинации (соединения), состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком расположения:

$P_n = n!$ (частный случай размещения) <u>причем</u> $0!=1$; $1!=1$

3. <u>Сочетаниями</u> называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом (т.е. составом элементов)

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{p_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

<u>Связь между числом размещений, перестановок и сочетаний:</u>

$$A_n^m = P_m * C_n^m$$

(комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам)

1.3 Классическое и статистическое определение вероятности

Вероятность

Классическая (математическая) $P(A)=m/n$ **(до проведения опыта)**	**Статистическая (частность)** $W(A)=m/n$ **(после проведения опыта)**

1. Классическое определение вероятности. Вероятность - это число, характеризующее степень возможности появления события

$P(A)=mn$- число благоприятствующих исходов (m) к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов (n), образующих полную группу.

Свойства вероятности (следствия из определения):

1.Вероятность достоверного события равна 1 (m=n)

2.Вероятность невозможного события равна 0 (m=0)

3.Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1

2. Статистической вероятностью - частностью появления данного события называется отношение числа появления этого события при испытании к общему числу испытаний (фактически проведенных)

Некоторая ограниченность классического определения вероятности заключается в следующем:

- предполагается, что число элементарных исходов конечно;
- очень часто невозможно предоставить результаты испытаний в виде совокупности элементарных исходов;
- трудно указать основание, позволяющее считать элементарные события равновозможными.

1.4 Геометрическая вероятность. Задача Бюффона.

Если плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G, и на фигуру G наудачу брошена (•), то это означает выполнение следующего предположения:

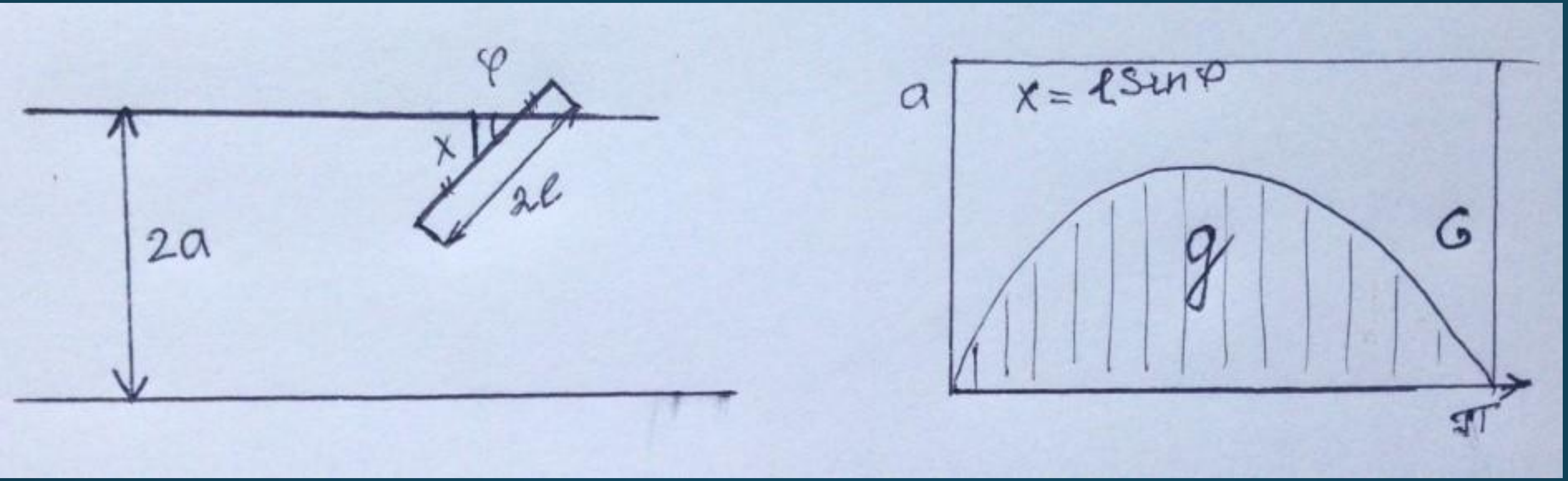
- брошенная (•) может оказаться в любой (•) фигуры G

-вероятность попадания брошенной (•) на фигуру g пропорциональная площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно G или от формы g

$$P=\frac{s_g}{s_G}$$

Задача Бюффона

Дано: Площадь разграфлена параллельными прямыми, относящими друг от друга на расстояние 2a. На плоскость наудачу бросают иглу длиной 2l (l<a). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.



Решение: Пусть x- расстояние от середины иглы до ближайшей параллели.

ϕ - угол, составленный иглой с этой параллелью.

Положение иглы полностью определяется x и ϕ , причем:

$$0<x<a \quad ; \quad 0< \phi <\pi$$

Т.е. середина иглы может попасть в ∀ из (•) прямоугольника со сторонами a и π.

Т.е. этот прямоугольник есть G, точки которого представляют собой все возможные положения середины иглы

$$S_G = \pi * a$$

g- фигура, каждая (•) которой благоприятствует интересующему нас событию, т.е. каждая (•) этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель.

Игла пересечет параллель, если

$$x \leq l \sin \varphi$$

Таким образом, площадь

$$\int g = \int_0^{\pi} l \sin \varphi \, d\varphi = -l \cos \varphi \, \Big|_0^{\pi} = l\,(-\cos \pi)-(-\cos 0)) = l(-(-1)+1) = 2\,l$$

$P = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G} = \frac{2l}{a\pi}$ - вероятность того, что игла пересекает параллель

Тема2. Основные теоремы теории вероятностей

2.1 **Теорема сложения вероятностей несовместных событий**

Определение: суммой двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий (хотя бы одного из этих событий)

Теорема: Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- Следствие: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятности этих событий

Т.е. P $(A_1 + A_2 + \cdots\ A_n)$ = P (A_1) + P(A_2) + …+ P(A_n)

Пространства элементарных событий

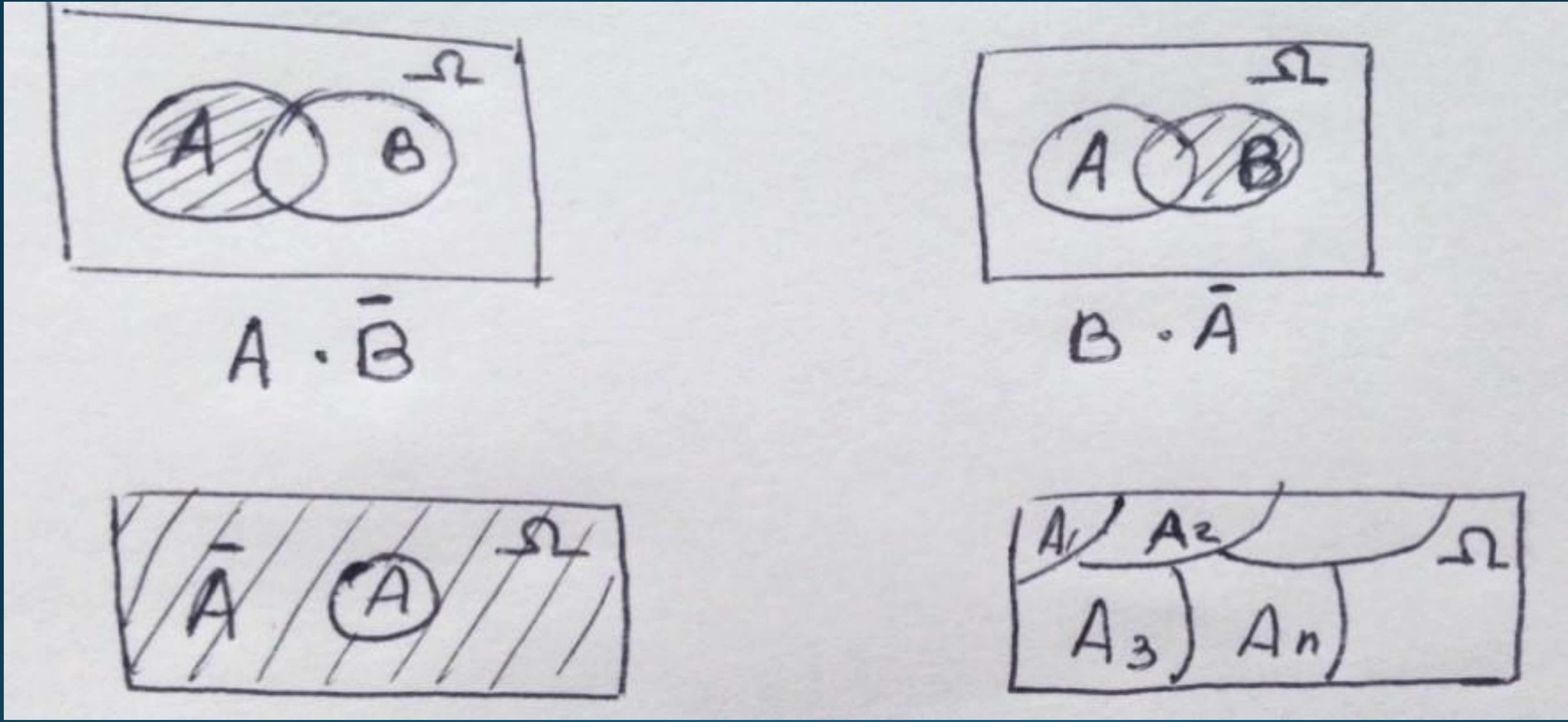
Операции над случайными событиями

Пусть пространство элементарных событий есть множество всех элементарных событий Ω = $\{\omega_i\}$

Множество Ω (весь прямоугольник) называется достоверным событием. Пустое множество Ø – это невозможное событие.

Т.е. A и B несовместны если A*B= Ø

Событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A , если A*$\bar{A}$ = Ø и A+$\bar{A}$ = ω_i



Полная группа событий

$A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n = \omega_i$

2.2 Теорема сложения вероятностей совместных событий

- Определение: два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.
- Теорема: вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- Полная группа событий
- Теорема: сумма вероятностей события $A_1 \dots A_n$, образующих полную группу событий равна 1.
  - $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$

- Определение: Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу , при этом одно из противоположных событий A, другое $\bar{A}$ (попадание-промах)
- $P(A) = P(\bar{A}) = 1$; $(p+q = 1)$
- Принцип практической невозможности маловероятных событий
- Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит (отказ детали 0,01)
- Малая вероятность $\longrightarrow$ однопроцентный уровень значимости (на практике от 0,01 до 0,05)

2.3 Теорема умножения вероятностей зависимых событий

- Определение: произведением двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий
- Определение: если при вычислении вероятности события никаких других ограничений не накладывается, кроме условий «S» , то это называется безусловной вероятностью [P(A)], если же наложены другие условия, то это называется условной вероятностью (P_B(A)).
- Определение: условной вероятностью P_B(A) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило
- Определение: условная вероятность В при условии, что событие А уже наступило, по определению равна $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$; (P(A)>0).

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

- Теорема: Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило

$$P(AB)= P(A)* P_A(B)$$

- Следствие: Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли.
- $P(A_1 * A_2 * \ldots * A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1A_2}(A_3) * \ldots * P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$
- Где $P_{A_1A_2\ldots A_n}(A_n)$ – вероятность события A_n , вычисленная в предположении , что событие $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}$ наступили

Частный случай (для трех событий)

$$P(ABC) = P(A) * P_A(B) * P_{AB}(C)$$

2.4 Теорема умножения вероятностей независимых событий

- Определение: событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности

$$\text{т.е} \quad P_A(B) = P(B) \quad \text{и} \quad P_B(A) = P(A)$$

$$P(A) * P(B) = P(B) * P_B(A)$$

- Теорема: вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

-

- Замечание: если события А и В независимы, то независимы такие события А и $\overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{A}}$ и В , $\overline{\mathrm{A}}$ и $\overline{\mathrm{B}}$
- Определение: несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. А, В, С- попарно независимы, если независимы события А и В, А и С, В и С.
- Следствие: несколько событий называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы как каждое событие, так и возможные произведения остальных

$$\mathrm{P}\,(A_1 * A_2 * \ldots * A_n) = \mathrm{P}\,(A_1) * \mathrm{P}(A_2) * \ldots * \mathrm{P}(A_n)$$

2.5 Вероятность появления хотя бы одного события

- Теорема: вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2,....A_n (одно, или два, или n) независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{\mathrm{A}_1}$, $\overline{\mathrm{A}_2}$,....., $\overline{\mathrm{A}_n}$

$$P(A) = 1 - q_1 * q_2 * \cdots * q_n$$

- Частный случай: если события A_1, A_2,....A_n имеют одинаковую вероятность, равную P, то вероятность появления хотя бы одного события : $P(A) = 1 - q^n$
- Замечание: если A и B несовместны, то их совмещение есть невозможное событие

Т.е P(AB) = 0

2.6 **Формула полной вероятности.**

-

- Теорема: вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) * P_{B_n}(A)$$

2.7 Вероятность гипотез. Формула Байеса

- В ряде случаев приходится иметь дело с опытами, в которых случайным образом может присутствовать то или иное условие. Мы проводим опыт и по полученным результатам хотим выяснить, какова вероятность того, что в проведенном опыте присутствовало одно из возможных случайных условий.
- Пример: в трех ящиках x_n белых и y_n черных шаров (n=1, 2, 3)
- Наудачу подошли к ящику и достали черный шар. Определить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

- Пусть $B_1, B_2, \ldots B_n$ образуют полную группу событий.

- Тогда $$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) * P_{B_i}(A)}{P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n) * P_{B_n}(A)}$$

Тема 3. Повторные испытания

3.1 Формула Бернулли

- Определение: если произведено несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.
- Вывод формулы Бернулли
- Вероятность односложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие А наступит k раз и не наступит n-k раз по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k * q^{n-k}$.
- Таких сложных событий столько, сколько можно составить C_n^k
- $P_n(\text{k}) = C_n^k * p^k * q^{n-k}$

Формула Бернулли

- или $P_n(\text{k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} * p^k * q^{n-k}$

3.2 Локальная теорема Лапласа

- Теорема: если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 , то вероятность P_n(k) того, что событие A появится в n испытаниях равно k раз приближенно равна (тем точнее , чем больше n) значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

3.3 Интегральная теорема Лапласа

- Теорема: если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$, того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz \quad (1)$$

- Где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$
- Преобразуем соотношение (1)

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{x_2} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz - \int_{0}^{x_1} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz\right) =$$

$$= \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

- Итак: вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

3.4 Теорема Пуассона

- Применяется при больших количествах испытаний и малой вероятности события.
- P_n(k)= $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
  λ - среднее число появлений событий в различных сериях испытаний.
- k – количество событий
- n – количество независимых испытаний

3.5 Вероятность отклонения относительно частоты от постоянной вероятности при независимых испытаниях

- 1. Найти вероятность того, что отклонение относительно частоты m/n от постоянной вероятности p по абсоютной величине не превышает заданного числа ε>0
- Т.е. $p\left(\left| \frac{m}{n} - \mathrm{p} \right| \leq \varepsilon \right)$ -?
- Замечание: пусть m – число появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события А постоянно и равна p.
- Если число m изменяется от k_1 до k_2 , то
- $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$
-
- X\`                X\`\`

- Интегральная теорема Лапласа запишется в виде:

$$P(x` \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq x``) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x`}^{x``} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

- Рассмотрим соотношение $\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon$, тогда

$$-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon \rightarrow -\varepsilon \leq \frac{m-np}{n} \leq \varepsilon$$

- Умножим каждую часть этого неравенства на положительный множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}} > 0$, тогда

$$\underbrace{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}_{X`} \leq \frac{(m-np)\sqrt{n}}{n\sqrt{pq}} \leq \underbrace{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}_{X``}$$

$$\text{Т.е. } x` = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \; ; \quad x`` = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

- Тогда $P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz =$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Тема 4 Дискретная случайная величина (д.с.в.) и ее законы распределения

- Случайная величина
- Определение: случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.
-
- Дискретные и непрерывные случайные величины
- Определение: дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.
- Число возможных значений д.с.в. может быть как конечным так и бесконечным.
- Определение: непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка (число значений бесконечно).

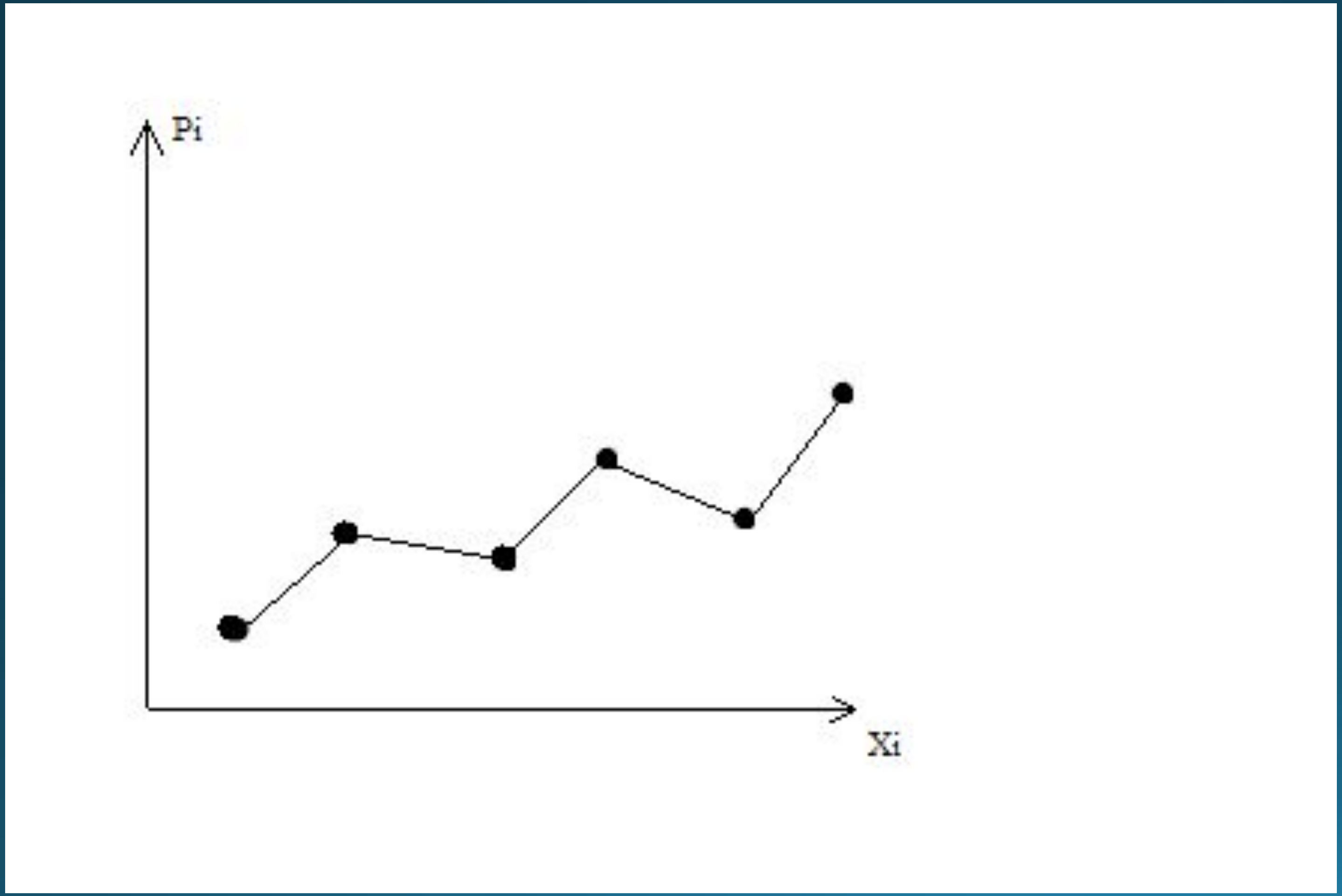
- Законы распределения вероятностей д.с.в.
- Случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их различны.
- Законом распределения д.с.в. называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.
- Его можно задать таблично, аналитически и графически.

Табличный способ задания:

X				.....	
p				.....	

- Возможные значения случайной величины

Возможные значения случайной величины Графический способ задания (многоугольные распределения):



4.1 Биномиальное распределение

- 1. Определение: биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли (д.с.в. может принимать только целые неотрицательные значения)

$$(q+p)^n=q^n+\frac{nq^{n-1}p}{1!}+\frac{n(n-1)q^{n-2}p^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)q^{n-3}p3}{3!}+p^n=$$

$$=C_n^0\,q^n+C_n^{n-1}\,q^{n-1}\,p+C_n^{n-2}\,q^{n-2}\,p^2+\cdots+C_n^0\,p^n$$

4.2 Закон распределения Пуассона. Простейший поток событий

- Для определения вероятности k появления события в этих испытаниях используют формулу Бернулли.
- Если n-велико, то используют формулу Лапласа.Если $p \le 0{,}1$, то формулы Бернулли и Лапласа непригодны. Таким образом при $p \le 0{,}1$ применяется формула Пуассона
- Простейший поток событий
- Определение: потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Свойства потоков событий

- 1) Стационарность: характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности времени t промежутка и не зависит от начала его отсчета.
- 2) Свойство отсутствия последствий наступает, если имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающихся промежутках времени (условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени равна безусловной вероятности).
- 3) Свойство ординарности заключается в том, что за малый промежуток времени может произойти не более одного события.

- Если поток событий обладает всеми тремя свойствами, то он называется простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком.

- Интенсивностью потока " λ " называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

4.3 Геометрическое распределение

- Если событие А появилось в k-испытаниях, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появилось.
- Пусть X – д.с.в. –число испытаний, которое нужно провести до появления события А. (X: $x_1=1$, $x_2=2$ …….)
- $P(x=k) = q^{k-1}*p$ - вероятность “сложного” события считается по теореме умножения вероятностей независимых событий.
- При k=1,2…. Получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0<q<1$)

$p, q*p, q^2*p \ldots\ldots q^{k-1}*p$ – геометрическое распределение.

4.4 Гипергеометрическое распределение

- В партии “N” изделий, из них “M” стандартных (M-N), из партии случайно отбирают “n” –изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью). Изделие потом обратно не возвращается (поэтому формула Бернулли не применима).
  - $P(X=m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
- Расчет вероятности при различных значениях m позволяет построить гипергеометрическое распределение.

Тема 5 <u>Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины</u>

•

5.1 <u>Математическое ожидание и его свойства</u>

- Математическим ожиданием д.с.в. называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.
- <u>Вероятностный смысл математического ожидания</u>
- $\overline{X} = M(x)$, математическое ожидание примерно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайных величин.

- <u>Свойства математического ожидания</u>

1)Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной. M(C)=C

<u>Замечание 1</u>

Произведение const C на д.с.в. x =Cx - д.с.в., возможные значения которого равны CX_1, CX_2...CX_n
а вероятности равны вероятностям возможных значений $X(p_1...p_n)$

2)Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(CX) = CM(X)$$

<u>Замечание 2</u>

Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Замечание 3

Произведение независимых случайных величин X и Y равно случайной величине XY,

возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y, вероятности возможных значений XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей.

3)Математическое ожидание приведения двух независимых случайных величин равно приведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$$

Следствие.

Математическое ожидание произведения нескольких взаимонезависимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XYZ) = M(XY) \cdot M(Z) = M(X)\,M(Y)\,M(Z)$$

Замечание 4

Суммой случайных величин X и Y называется случайная величина (X + Y) возможные значения которых равны сумме каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятности возможных значений (X + Y) для независимых величин X иY равны произведениям вероятностей слагаемых : для зависимых величин - произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

4)Математическое ожидание сумм двух величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Для независимых и зависимых величин

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

• <u>Следствие:</u> Математическое ожидание сумм нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X + Y + Z) = M[(X + Y) + Z] = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z)$$

5.2 **Математическое ожидание числа появлений события в n независимых испытаниях**

- Теорема: Математическое ожидание M(X) числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании

$$M(X)= np.$$

- Замечание: Т.к. величина x распределена по биномиальному закону, то эта теорема применима для математического ожидания биномиального распределения с параметрами n и p.

5.3 **Дисперсия и ее свойства**

- Определение: Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: $x-M(x)$
- Свойство отклонения
- Математическое ожидание отклонения равно 0. $M[x - M(x)] = 0$
- Дисперсия – среднее значение квадрата отклонения (радиус выстрела - рассеяние)
- Определение: Дисперсией (рассеянием) д.с.в. называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(x) = M[x-M(x)]^2$$

- Теорема: Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины x и квадратом ее математического ожидания

$$D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2$$

Свойства дисперсии:

1)Дисперсия постоянной величины «С» равна «0» $D(C)=0$

2)Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2D(X)$$

3)Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

- Следствие 1
- Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.
- Следствие 2
- Дисперсия суммы постоянной величины и случайной величины равна дисперсии случайной величины.

$$D(C+X) = D(X)$$

4)Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y)$$

5.4 Дисперсия числа появлений события в n независимых испытаниях

- Дисперсия числа появлений события А в n независимых испытаниях (в каждом из которых вероятность появления равна p и постоянна) равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании.
- $D(X)= npq$
- Доказательство:
- Рассмотрим случайную величину X – число появлений события А в n-независимых испытаниях. Общее число появлений события в этих испытаниях равно сумме появлений события в отдельных испытаниях:
- $X= X_1+X_2+ \dots +X_n$
- X_1 – число наступлений события в первом испытании и соответственно X_n - в n-ом

5.5 Среднее квадратическое отклонение

- Средним квадратическим отклонением (с.к.о.) случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$б\ (X) = \sqrt{D(X)}$$

- Среднее квадратическое отклонение конечного числа взаимно независимых величин равно квадратному корню из суммы квадратов с.к.о. этих величин:

$$б\ (X1+X2+\ ....\ +Xn) = \sqrt{6^2(X1) + 6^2(x2) + \cdots + 6^2(Xn)}$$

- <u>Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины</u>
- n взаимно независимых случайных величин X1, X2 .... Xn, которые имеют одинаковое распределение, следовательно одинаковые характеристики (математическое ожидание M, дисперсию D, среднее квадратическое отклонение G.)

$$\bar{X} = \frac{X1 + X2 + \cdots + Xn}{n}$$

5.6 Мода. Медиана. Начальные и центральные теоретические моменты

- В ряде исследований бывает недостаточно знания M(X) и D(X) случайной величины. Тогда рассматривают моменты случайной величины, 3-го, 4-го и т.д. порядков.
- Начальным моментом k-го порядка случайной величины “X” называется число

$$V_k = M(X^k)$$

- Центральным моментом k-го порядка случайной величины “X” называется число

$$M_k = M(X - M(X))^k$$

- Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии (или «скошенности») распределения.
- Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все моменты нечетного порядка равны 0, если они существуют.

- Четвертый центральный момент служит для характеристики так называемой «крутости», то есть островерхости или плосковерхости распределения.
- Эти свойства распределения описываются с помощью так называемого «эксцесса».

$$E_x = \frac{M_2}{6^4} - 3$$

- Для нормального распределения эксцесс равен о (в основном для непрерывной случайной вершины).
- Модой (М) случайной величины называется наиболее вероятное значение (для дискретной случайной величины).
- Мода часто не совпадает с математическим ожиданием.
- Медианой случайной величины Х называется такое её значение Ме, для которого

P(X<Me)= P(X>Me)

то есть одинаково вероятно окажется ли следующая величина больше или меньше Ме (обычно для непрерывной случайной величины).

- Геометрический смысл медианы – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.
- Непрерывная случайная величина (н.с.в.)
- Определение: Случайную величину считают непрерывной, если ее функция распределения непрерывная кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.
- Определение: Функцией распределения называют функцию F(X), определяющую вероятность того, что случайная величина "X" в результате испытания примет меньшее значение " x" , т.е.

$$F(x) = P(X < x)$$

- Свойства функции распределения
- Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат [0;1]

$$0 \leq F(x) \geq 1$$

- Свойство 2. F(x) - неубывающая функция

Доказательство :

- Пусть $x_2 > x_1$ Событие, состоящее в том, что X примет значение меньше x_2 можно разделить на два несовместимых события:

1) X примет значение, меньше x_1 с вероятностью $P(X < x_1)$;

2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X < x_2$ с вероятностью $P(x_1 \le X < x_2$

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ \text{если } x_2 > x_1$$

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$$

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0$$

$$F(x_2) \ge F(x_1)$$

- Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (а; в), равна приращению функции распределения на этом интервале

$$P(a \le X < в) = F(в) - F(a)$$

- Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет одно определенное значение равное 0.

$$P(a < x < b) = P(a \le x \le b) = P(a \le x < b) = P(a < x \le b)$$

- Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (а; в), то

1. F(x)=0 при $x \le a$
2. F(x)=1 при $x \ge в$

- Следствие 4 . Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси ОХ, то справедливо следующие предельные соотношения

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$$

<u>График функции распределения</u>

- <u>Следствие 1:</u> вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a,b) равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a<X<b)= F(b)-F(a)$$

Тема 6.Непрерывная случайная величина и её законы распределения

6.1 Плотность распределения и ее свойства

- Определение: плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию f(x)- первую производную от функции распределения F(x)

$f(x)=F'(x)$, то есть $F(x)$ – первообразная от $f(x)$.

- Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
- Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a,b) равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения – неотрицательная функция. $f(x) \geq 0$ (то есть точки принадлежащие графику $f(x)$ расположены либо над осью OX, либо на этой оси .

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах $-\infty$ до ∞ равен 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Геометрический смысл: вся площадь криволинейной трапеции, ограниченная осью OX и кривой распределения равна 1.

6.2 Закон равномерного распределения вероятностей

- Определение: распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале, которым принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.
- 1)Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{при } a < x < b \\ 0, \text{при } x < a \text{ или } > b \end{cases}$$

- 2) Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{при } a < x < b \\ 1, \text{при } x > b \end{cases}$$

-

- з) Характеристики положения:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{b} xf(x)dx + \int_{b}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2|ab}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

- б) В силу симметричности равномерного распределения медиана величины X равна $\frac{b+a}{2}$
- в) Мода – нет.
- г) Дисперсия

- $D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(x))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} (X - M(x))^2 f(x)dx + \int_{a}^{b} (X - M(x))^2 f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} (X - M(x))^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{(X-M(x))^2 f(x)dx}{b-a} = \int_{a}^{b} \frac{(x-\frac{b+a}{2})^2}{b-a} = \int_{a}^{b} \frac{x^2dx}{b-a} - \int_{a}^{b} \frac{b+a}{b-a} xdx + \int_{a}^{b} \frac{(b+a)^2}{4(b-a)} dx = \frac{x^3}{3}\Big| ab \frac{1}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big| ab + \frac{(b+a)^2}{4(b-a)} x \Big| ab = \frac{(b-a)^2}{12}$
- д) Среднее квадратическое отклонение

$$б\,(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

- е) Асимметрия

$$S_k = \frac{M_3}{б_x^3} = 0$$

- ж) Эксцесс Ex=-1.2 (крутость)

6.3 Нормальный закон распределения. Правило трех сигм

-

- Является предельным законом, к которому приближаются другие законы при весьма часто встречающихся типичных условиях.
- 1)Плотность вероятности.

$$(n(x,m,\sigma))=f(x)=\frac{1}{6\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- 2)Функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{26^2}}dx$$

Нормирование распределения

- Нормирование распределения ведет к перенесению начала координат в центр группирования, то есть к «центрированию» и выражению абсциссы в долях б.
- Для комплексной характеристики непрерывного распределения удобно пользоваться не вероятностью события, когда X=x, а вероятностью, когда X<x, где x – некоторая текущая переменная.
- F(x) полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения.

Правило трёх сигм

- Зная среднее квадратическое отклонение б и математическое ожидание M (x) случайной величины можно ориентировочно указать интервал её практических возможных значений - это правило трёх сигм.
- Из него вытекает также ориентировочный способ определения б случайных величин: берут максимальное практически возможное отклонение от среднего и делят его на три.

6.4 Вероятностные (срединные) отклонения

- Определение: вероятным (срединным)отклонением случайной величины числа X, распределенной по нормальному закону, называется половина длины участка, симметричного относительно центра рассеивания, вероятность попадания в который равна половине.
- Геометрически – E(B) это половина длины участка оси абсцисс, симметричного относительно точки m, на которую опирается половина площади кривой распределения.

Свойства функции Ф(x):

1)$\Phi(-\infty) = 0$

2)$\Phi(+\infty) = 1$

3)Ф(x)- неубывающая функция

4)Ф(-x)=1-Ф(x) симметричность нормального распределения с параметрами.

m=0, б=1 относительно начала координат.

Характеристики положения:

а) Математические ожидания M(x)=$\frac{b+a}{2}$ = m

б) В силу симметричности распределения медиана величины x равна

$$Me=\frac{b+a}{2} = m$$

в) Моды. M=m

г) Дисперсия D(x)=$б^2$

д) Среднее квадратическое отклонение б(x) = б

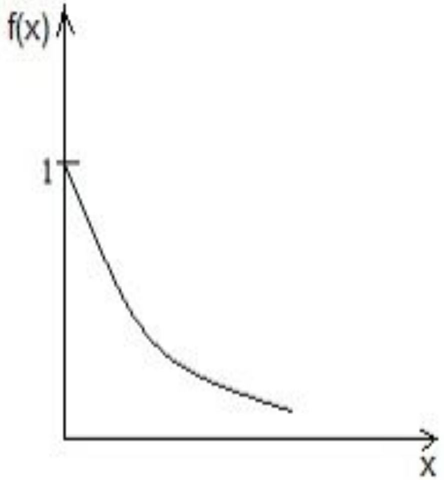
е) Коэффициент асимметрии Sk=0

ж) Коэффициент эксцесса Ek=0

6.5 Показательный закон распределения. Функция надежности

1)Плотность распределения.

$$f(x)=\begin{cases}0,\text{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x},\text{при } x\geq 0\end{cases}$$



2)Функция распределения.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=0+\lambda\cdot(-\frac{1}{\lambda})\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}d(\lambda x)$$

$$=-1\left(e^{-\lambda x}-e^{-\lambda\cdot 0}\right)=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}$$

- Определение: Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

- 3)Характеристики положения.
- А) математическое ожидание.
- б)Медиана
- 4)Дисперсия.

$$D(x) = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 \text{ или } \int_0^{\infty} [M(x)]^2 f(x)dx$$

$$D(x)=\frac{1}{\lambda^2}$$

- 5) Среднее квадратическое отклонение.
- Функция надежности.
- Пусть to =0 – начало работы элемента t – время до появления отказа, тогда T – непрерывная случайная величина, характеризующая время безотказной работы.

R(t)=P(T>t)=1-F(t) - функция надежности

- Определение: Показательный закон надежности - есть функция надежности, определяемая равенством.

R(t)=e-λt, где λ - интенсивность отказов.

- Свойство показательного закона надежности
- Вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивности отказов).

6.6 Функция одного случайного аргумента и ее распределение

- 1) Пусть аргумент Х – дискретная случайная величина
- а) Если различным возможным значениям аргумента Х соответствуют различные возможные значения функции У, то вероятности соответствующих значений Х и У между собой равны.
- б) Если различным возможным значениям аргумента Х соответствуют значения У, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений У.

2) Пусть аргумент X – непрерывная случайная величина. Тогда если $y=\varphi(x)$ - дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайная величина находится с помощью равенства

$$g(y)=f[\psi(y)\ |\psi'(y)|$$

<u>Математические ожидания функции одного случайного аргумента</u>

Пусть $y=\varphi(x)$

а) если x дискретная случайная величина, то

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i$$

б) если x непрерывная случайная величина

$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \cdot f(x)dx$, аналогично, если $a<x<b$

6.7 Функция двух случайных аргументов

Определение: Если каждой паре возможных значений случайной величины X и У соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z - функция двух случайных аргументов X и У.

$$Z = \varphi(x, y)$$

Например: X - погрешность показаний измерительного прибора (распределенная нормально).

У – погрешность округлений показаний до ближайшего деления шаги (распределенная равномерно).

Возможные значения Z – есть сумма каждого возможного значения X со всеми возможными значениями У.

Пусть X и У – непрерывная случайная величина.

g(z)=$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x)dx$ или $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy$, где

f_1 и f_2 - плоскости распределения аргументов, если возможные значения аргументов неотрицательны, то g(z)=$\int_0^z f_1(x) f_2(z-x)dx$ и

g(z)=$\int_0^z f_1(y) f_2(z-y)dy$.

Плотность распределения суммы независимых случайных величин называют композицией.

Закон распределения вероятностей устойчивый, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающихся параметрами).

Нормальный закон обладает свойством устойчивости: композиция нормальных законов имеет нормальные распределения.

$$M(z) = M_1(x) + M_2(y); \quad D(z) = D_1(x) + D(y)$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью.

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{при } x \geq 0 \end{cases}$, где λ – постоянная положительная величина

(распределение определяется лишь одним параметром λ).

Тема 7.Предельные теоремы теории вероятностей

7.1 Применение предельных теорем. Центральная предельная теорема.

- Теорема Бернулли является простейшей формой закона больших чисел
- Теорема:
- Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события А постоянна, то как угодно близка к 1, вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

2) В теории вероятностей при увеличении числа опытов n частота приближается к вероятности, но не с полной достоверностью, а с большой вероятностью, то есть сходимость по вероятности, так как при 10 бросаниях монеты может выпасть герб 10 раз, то есть $\frac{m}{n} = 1$(это физически возможно, но маловероятно) при 1000 бросаниях это ещё меньше вероятно.

Но при практическом применении вероятностных методов исследования всегда необходимо учитывать принадлежит ли данное событие к массовым явлениям.

- Центральная предельная теорема.
- для неодинаково распределенных слагаемых
- Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно-независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение близкое к нормальному.
- Совокупность- суммарная ошибка, которая по распределению близка к нормальному.

Функция распределения нормированной суммы

$$F_n(x) = P(\frac{S_n - A_n}{B_n} < X)$$

- 2) для одинаково распределенных слагаемых.
- Если x1, x2, …xn - независимые случайные величины имеет один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и б2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы неограниченно приближение к нормальному.

7.2 Лемма Чебышева. Теорема Чебышева

Если случайная величина x, для которой существует математическое ожидание, может принимать только неотрицательные значения, то для любого положительного числа δ имеет место неравенство

$$p(x \leq \delta) \geq 1 - \frac{M(x)}{6}$$

Неравенство Чебышева $p(x \geq \alpha) \leq \frac{M(x)}{\alpha}$ (справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин).

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$

То есть $P(|X - M(x)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$ или $P(|X - M(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$

Теорема Чебышева.

Если $x_1, x_2, \ldots x_n$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают положительного числа с), то как бы ни было мало положительное число ε вероятность неравенства

$\dfrac{x1+x2+\ldots+xn}{n} - \dfrac{M(x_1)+M(x_2)+\cdots+M(x_n)}{n}$ будет как угодно близко к 1. Если число случайных величин достаточно велико, то есть

$$P\left(\left|\frac{x1+x2+\ldots+xn}{n} - \frac{M(x_1)+M(x_2)+\cdots+M(x_n)}{n}\right| = 1\right) < \varepsilon$$

Тема 8.Система двух случайных величин

- (X,У) – двумерная случайная величина, где величины X и У – (компоненты).
- Пример: Длина X и ширина У для выпускаемой детали , вес и длина осколка, ошибка высоты и вес топлива для 1а.
- Законом распределения дискретных двумерных случайных величин называют перечень возможных значений этой величины, то есть пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i=1..n,\ j=1..m)$. Обычно задается в виде таблицы.

Пример:

Найти законы распределения составляющих двумерных случайных величин, за данным законом распределения.

y	x		
	X_1	X_2	X_3
Y_1	0.1	0.3	0.2
Y_2	0.06	0.18	0.16

Решение: (Для X сложение по столбцам.)

1)$P(X_1)=0.16=P(y_1)+P(y_2)$

$P(X_2)=0.48$

$P(X_3)=0.36$

Проверка: $0.16+0.48+0.36=1$

Для У сложение построчно.

y	$У_1$	$У_2$
p	0.60	0.40

8.1 Функция распределения.

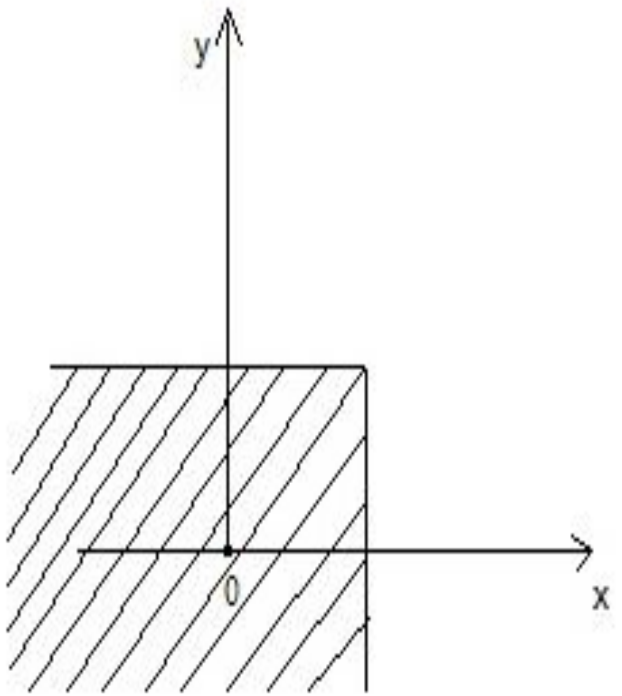
- Функцией распределения двумерной случайной величины (X,У) называют функцию F(x,y), определяющую для каждой пары чисел x,y вероятности того, что X примет значение меньше x, и при этом У примет значение, меньше y. $F(x,y)=P(X<x,Y<y)$
- Геометрическое истолкование:
- F(x,y) есть вероятность того, что случайная точка (X,У) попадет в бесконечный квадрат, с вершиной (x,y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Свойства функции распределения двумерной случайной величины:

$1)\ 0 \le F(x,y) \le 1$

2)F(x,y) есть неубывающая функция по каждому аргументу, то есть

$F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$, если $x_2 > x_1$ $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$, если $y_2 > y_1$



3) Имеет место соотношения

А) $F(-\infty, y) = 0$

Б) $F(x, -\infty) = 0$

Г) $F(+\infty, +\infty) = 1$

4)а) При y=+∞ функция распределения системы становится функцией распределения составляющего X.

$F(x, \infty) = F_1(x)$

б) При x=+∞ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей У.

$F(\infty; y) = F_2(y)$

8.2 Плотность совместного распределения вероятностей.

- Плотностью совместного распределения вероятностей f(x,y) двумерной случайной величины (X,У) называют вторую смешанную производную от функции распределения.

$$f(x,y) = \frac{\vartheta^2 F(x,y)}{\vartheta x \vartheta y}$$

- Определение:
- Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины У при X=x (x определение возможные значения X) называют произведение возможных значений У на их условные вероятности.

$$M(y/X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j\, p(y_j/x)$$

Для непрерывных величин

$M(y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y/x)dy$, где $\psi(y/x)$ - условная плотность случайной величины У.

- Случайные величины для которых 1111111 называются некорряционными.

1) Рост и вес человека положительная корреляция.

2) Время на регулирование прибора и время его безотказной работы – положительная корреляция

3) Время на подготовку к работе и количеством неисправности отрицательная корреляция.

Тема 9.Элементы математической статистики

- Коэффициент корреляции характеризует только линейную зависимость (то есть с возрастанием Х У уменьшается или возрастает по линейному закону). Коэффициент корреляции ху=о для независимых случайных величин, они называются некорреляционными.
- Её цели и задачи: создание методов сбора обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

9.1 Генеральная и выборочная совокупность.

- Определение:
- Выборочной совокупностью или выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.
- Определение:
- Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.
- Объем совокупности – это число её объектов.
- Способы отбора:
- 1) Простой отбор – не требует разделения совокупности на части, объекты извлекают по 1 из всей генеральной совокупности.
- 2) А) Типичный – объекты отбираются не из генеральной совокупности, а из каждой ей типичной части.

- Отбирают объекты из продукции каждого завода.
- Б) Механический – отбор, при котором всю генеральную совокупность механически делят на столько групп, сколько надо отобрать объектов в выборку.
- Пример: Надо отобрать 20% деталей, то берут каждую 5ую.
- В) Серийный – отбор, при котором объекты выбираются из генеральной совокупности, но не по одному, а по сериям

9.2 Статистическое распределение выборки.

- Определение:
- Последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке называется вариационным рядом.
- Числа наблюдений (n1…nk) называют частотами, а их отношение к объему выборки

$$\frac{n_i}{n} = W_i$$ - относительными частотами.

- Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот

9.3 Эмпирическая функция распределения.

Определение:

Эмпирической функцией распределения выборки (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события X<x

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, т.е. $F^*(x) = w_x$ относительная частота

Определение:

Теоретической функцией распределения генеральной совокупности называют функцию F(x), которая определяет вероятность события X<x

При больших n: $\lim_{n \to \infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1 (\varepsilon > 0)$

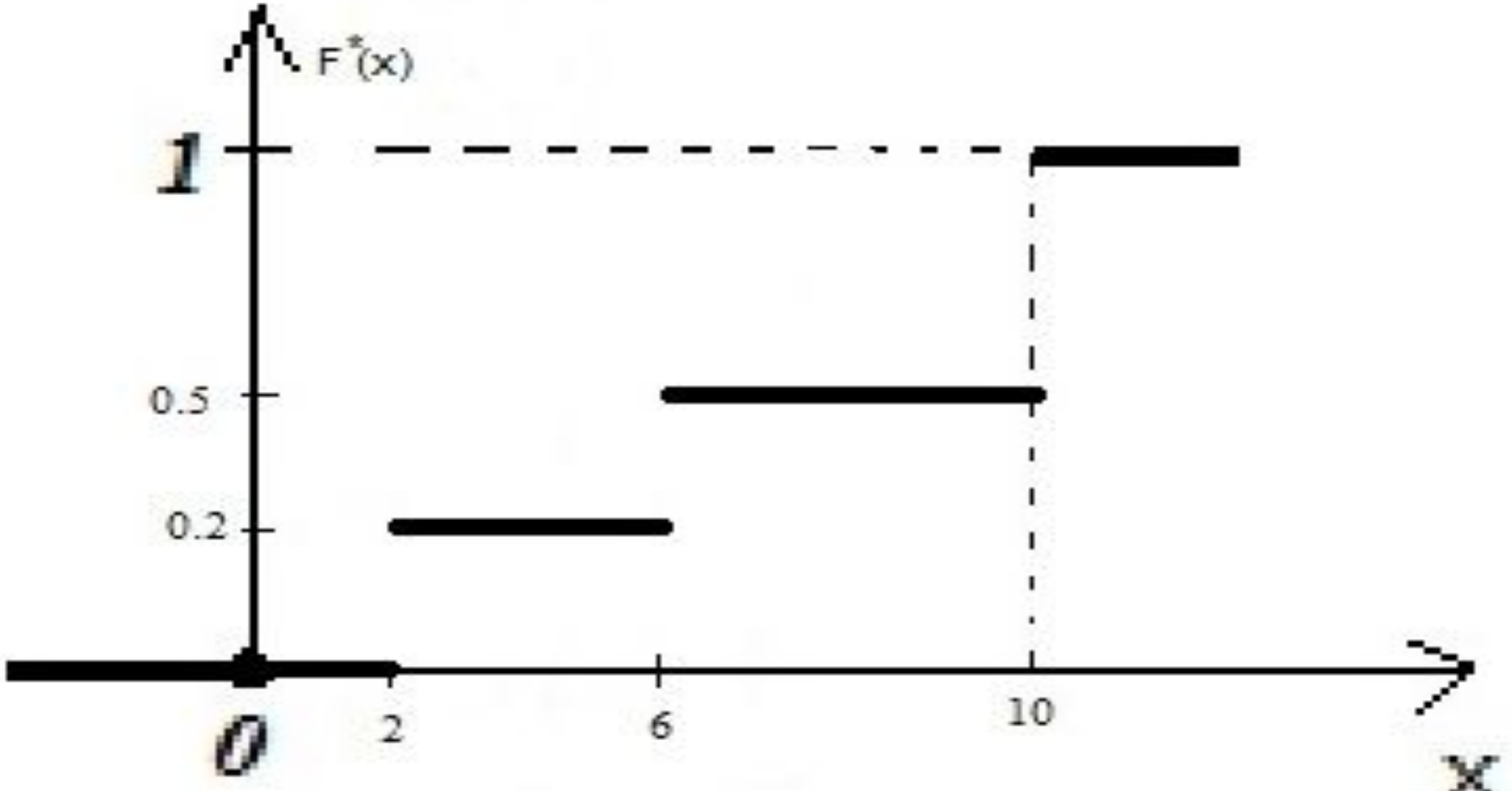
Свойства $F^*(x)$ те же, что и функции распределения $F(x)$

1) Значения эмпирической функции принадлежат [0,1]
2) $F^*(x)$ неубывающая функция
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$. Если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x \ge x_к$

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Эмпирическая функция

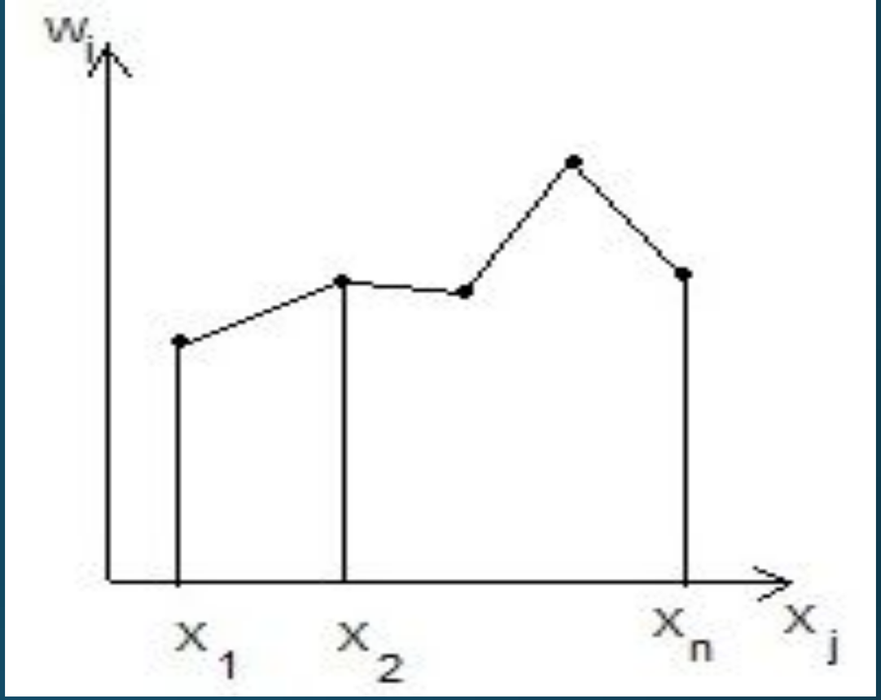
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 2 \\ 0.2, \text{при } 2 < x \le 6 \\ 0.5, \text{при } 6 < x \le 10 \\ 1, \text{при } x > 10 \end{cases}$$



9.4 Полигон и гистограмма.

- Определение:
- Полигоном частот называют ломанную, состоящую из отрезков, которые соединяют точки. (x_1,n_1), (x_2,n_2),… (x_k,n_k). Для этого по оси OX откладывают варианты X_i, по оси ординат соответствующие им частоты n_i.
- Точки (x_i,n_i) соединяют отрезки прямых и получают полигоны частот.
- Определение:
- Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки (x_1,w_1), (x_2,w_2) и (x_n,w_n).
- На оси OX варианты x_i.
- На оси OY – соответствующие им w_i

В случае непрерывной случайной величины строят гистограмму.



Определение:

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру состоящую из прямоугольников, основанием которых служат частичные интервалы длиной h, а высота равна относительно $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{w_i}{h}$(плотность частоты и относительная частота)

Замечание:
1) Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть равна объему выборки.
2) Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть 1.

9.5 Статистические оценки периметров распределения.

- В математической статистике существует понятие количественного признака (контролируемый размер детали) и качественного признака (стандартность детали).
- Пусть даны значения количественного признака X_1, X_2, …X_n полученные в результате n (независимых) наблюдений. Тогда нахождение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения заключается в нахождении функции от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.
- При этом, если известно, что изучаемый признак (неизвестный параметр) распределен в генеральной совокупности а) нормально, то оценивают математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение M(x) и Ϭ (полностью определяют нормальное распределение), б) по закону Пуассона

9.6 Смещенные, несмешанные, эффективные и состоятельные оценки.

Определение:

Несмещенной называют статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки, то есть $M(\theta^*) = \theta$.

Определение:

Смещенной называют оценку математического ожидания, которая не равна оцениваемому параметру.

Замечание:

Несмещенная оценка не всегда дает хорошее приближениен оцениваемого параметра, вследствие значительной дисперсии (рассеивания) возможных значений θ^* около своего среднего значения.

2) Необходимо. чтобы дисперсия θ^* была малой, то есть требование эффективности для статистической оценки.

- Определение:
- Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданной выборке n) имеет наименьшую возможную дисперсию.
- 3) Необходимо, чтобы оценка была состоятельна для большего объема.

<u>Определение:</u>

Состоятельной называют статистическую оценку которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Пример: Если дисперсия несмешанной оценки при $n \to \infty$ стремится к 0, то эта оценка состоятельная.

9.7 Точечность оценки, доверительная вероятность

- Определение: Точечной называют оценку, которая определяется одним числом (выборочная дисперсия, генеральная дисперсия и т. д.)
- При выборке малого объема наблюдается большое отклонение точечной оценки от оцениваемого параметра. Поэтому используют интервальные оценки.
- Определение: Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

При этом , если $\delta > 0$ и $|\theta - \theta^*| < \delta$, то чем меньше δ, тем точнее оценка.

То есть $\delta > 0$ характеризует точность оценки с определенной вероятностью γ.

<u>Определение:</u>

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$

$j \approx 0.95, 0.99, 0.999$.

$P[\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta = \gamma$

Доверительным называют интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, который заключает в себе неизвестный параметр θ к заданной надежностью Y.

9.8 Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.

А) При известном среднем квадратическом отклонении б

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем б известна.

Необходимо оценить неизвестное математическое ожидание m (метод заключается в том, что по выборочной средней X найти доверительные интервалы, покрывающие параметр m с надежностью γ).

Решение:

Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя X, найденная по независимым наблюдениям, тоже распределена нормально.

$M(X)=m,\ \sigma(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Необходимо, чтобы $P(|xcp - m| < \delta) = \gamma$, где γ - заданная надежность.

Так как $P(|x - m| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$, то заменив x на X и б на б(X) получим

$P(|Xcp - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$, где $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} => \delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$

$P(|X_{cp} - m| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t)$ или $P(Xcp - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < m < Xcp + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 2\Phi(t) = \gamma$, где

X – выборочная средняя величина X.

Смысл соотношения

С надежностью j можно утверждать, что доверительный интервал

$(X - \frac{t\text{б}}{\sqrt{n}}, X + \frac{t\text{б}}{\sqrt{n}})$ покрывает неизвестный параметр m при точности оценки

$$\delta = \frac{t\text{б}}{\sqrt{n}}$$

Где Ф(t)=$\frac{\gamma}{2}$ по таблице функции Лапласса.

9.9 Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения от нормального распределения.

Пусть количественный признак X совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное б по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению S. Найти доверительные интервалы с надежностью γ.

Пусть $P(|6 - S|<\delta)=\gamma$ или $P(S-\delta < 6 < S + \delta) = \gamma$

Преобразуем неравенство $S-\delta < 6 < S + \delta$ к виду $S(1-\frac{\delta}{s} < 6 < S(1 + \frac{\delta}{s})$, если

$\frac{\delta}{s} = q$, то получим $S-q < 6 < S + q$ (1)

Чтобы найти q введем в рассмотрение случайную величину X, где

$X=\frac{S}{6}\sqrt{n-1}$, где n – объем выборки, где величина $\frac{S^2(n-1)}{6^2}$ распределена по

закону λ^2 С(n-1) степени свободы, где n – количество неизвестных – («степеней свободы»).

Плотность распределения R(λ,n) зависит лишь от объема выборки n, а не зависит от оцениваемого параметра б.

Если q<1, то неравенство (1) примет вид $\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{б} < \frac{1}{S(1-q)}$

Причем $\int_{x_1}^{x_2} R(\lambda,n)d\lambda = \gamma$ - вероятность неравенства $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

Умножив все члены неравенства на $S\sqrt{n-1}$ получим

$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{S\sqrt{n-1}}{б} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$ => $\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < X < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$

Вероятность осуществления этого неравенства равна $\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(X,n)dx = \gamma$

По заданным n и γ можно найти q

Для отыскания q существуют таблицы.

9.10 Основные характеристики вариационного ряда

- Определение:
- Выборочной средней Хв называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.
- Если все значения признака выборки x1,x2,…xn объема n различны, то

$$X_в = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Если все значения признака x1, x2, … xn имеют соответственно частоты n1, n2, …nk , причем n1+ n2+…+ nk=n, то

$$X_в = \frac{(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k)}{n} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i)}{n}$$

- То есть выборочная средняя есть среднее взвешенное значение признака с весами, равными соответствующим частотам.
- Хв есть несмещенная оценка генеральной совокупности, она же и состоятельная оценка генеральной совокупности.
- При возрастании объема выборки n - Хв ср стремится к вероятности генеральной средней , то есть Хв – есть состоятельная оценка генеральной средней.
- Устойчивость выборочных средних - Хв разных выборок из одной генеральной совокупности приблизительно равны между собой.
- Выборочная дисперсия Dв – среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения Хв.

- Размахом варьирования R называют разность между наибольшим и наименьшим вариантами.
- R= Xmax-Xmin
- Размах – простейшая характеристика рассеивания.
- Средним абсолютным отклонением называют среднее арифметическое абсолютных отклонений.

$$\theta = \frac{\left(\sum n_i \left|x_i - x_{в}\right|\right)}{\sum n_i}$$

- Коэффициентом вариации объема называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней.

$$V = \frac{\sigma_{в}}{X_{в}} \cdot 100\%$$

- Коэффициент вариации служит для сравнения величины рассеивания по сравнению к выборочной средней двух вариационных рядов.
- Чем больше объем, тем больше рассеивание