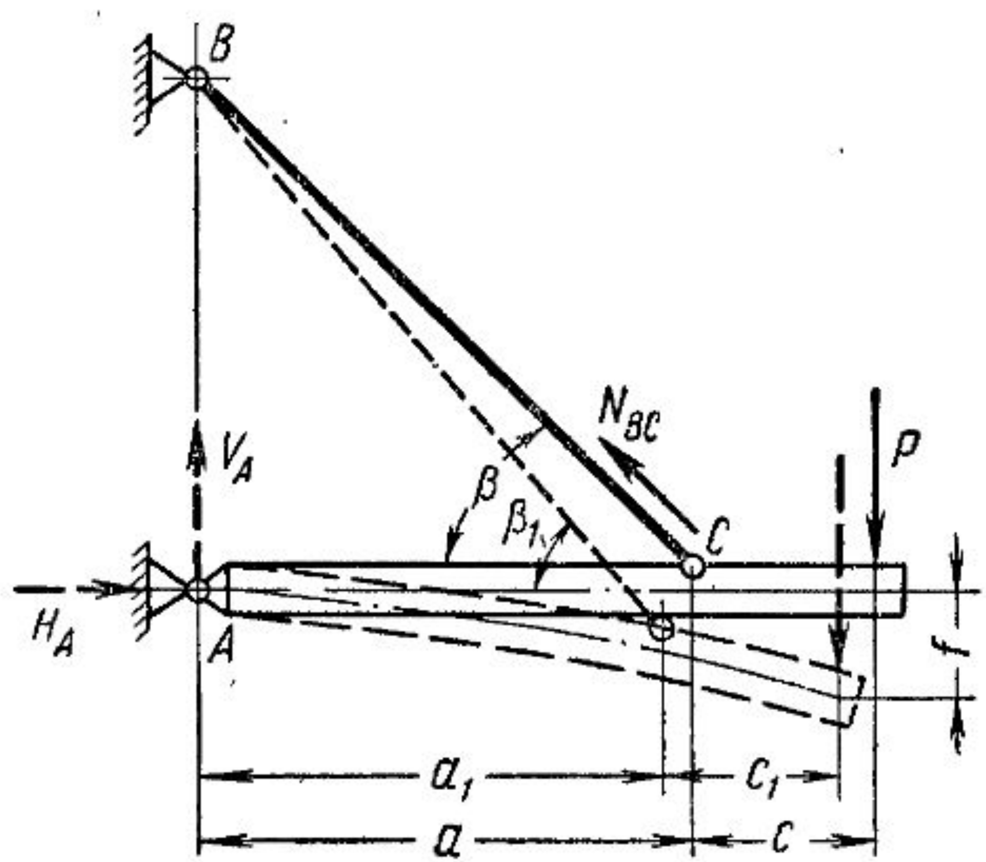
Сопротивление материалов
Лекция №1
«Основные положения»
Задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов представляет собой одну из ветвей механики деформируемого твердого тела, т. е. такого тела, которое под действием приложенных к нему сил изменяет свою форму и размеры — *деформируется.*

На основе методов сопротивления материалов и смежных областей механики деформируемого тела (математической и прикладной теории упругости, математической и прикладной теории пластичности, статики и динамики сооружений) выполняют расчеты машин, аппаратов, приборов, конструкций промышленных и гражданских сооружений.

Для того, чтобы получить более полное представление о задачах сопротивления материалов, рассмотрим некоторые частные примеры схем простейших конструкций.



Реальные твердые тела под действием приложенных к ним сил деформируются; в рассматриваемом случае тяга удлинится, а балка изогнется примерно так, как показано штриховыми линиями на рисунке.

Допустим теперь, что балка разгружена: сила Р удалена. При этом в зависимости от величины силы Р (силу тяжести конструкции не учитываем), материалов и размеров балки и тяги могут представиться два случая (полагаем, что при действии силы Р ни один из

1. Балка и тяга полностью восстанавливают те формы и размеры, которые они имели до нагружения; в этом случае говорят, что в системе (конструкции) при заданной нагрузке возникают лишь ***упругие деформации***.

2. Деформации балки и тяги уменьшаются, но система все же остается в деформированном состоянии; такое положение означает, что в системе при заданной нагрузке возникают наряду с упругими также и ***пластические (остаточные) деформации***.

При заданной величине силы *P* следует так выбрать размеры сечения тяги и балки, чтобы ни один из элементов конструкции не разрушился и в нем не возникли пластические деформации. При соблюдении указанных условий балка и тяга имеют достаточную *прочность.* Легко понять, что возможна и обратная постановка задачи: размеры и материалы балки и тяги известны и требуется определить ту наибольшую величину силы Р, при которой прочность конструкции обеспечена.

Первая задача сопротивления материалов — *расчет элементов конструкций на* ***прочность.***

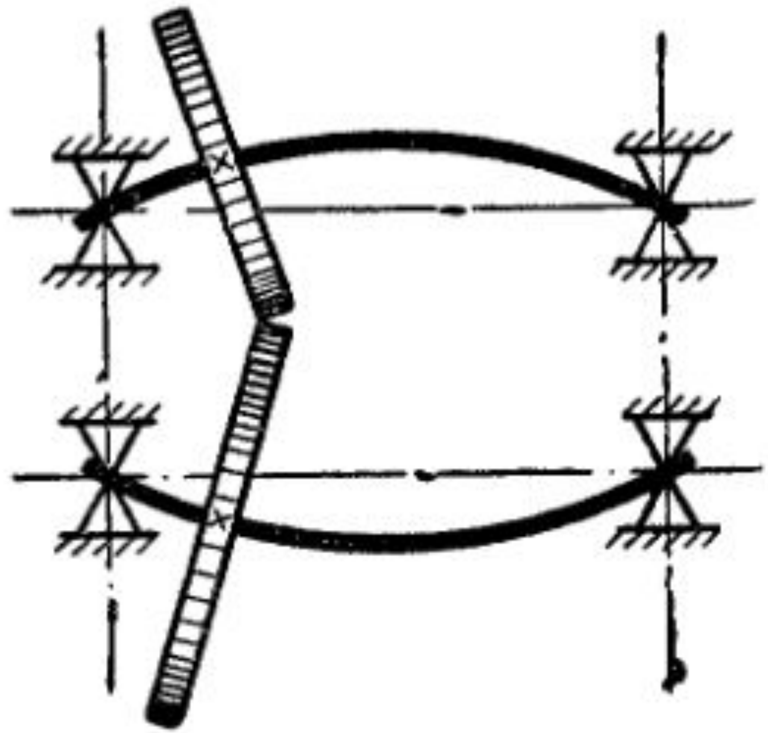
Прочность **–** способность материала, не разрушаясь, воспринимать внешние механические воздействия.

Возникновение упругих деформаций в нагруженной конструкции неизбежно, так же неизбежны и обусловленные этими деформациями перемещения отдельных точек конструкции.

Может оказаться, что величина f больше допустимой по условиям нормальной работы конструкции. В этом случае говорят, что конструкция имеет недостаточную *жесткость.*

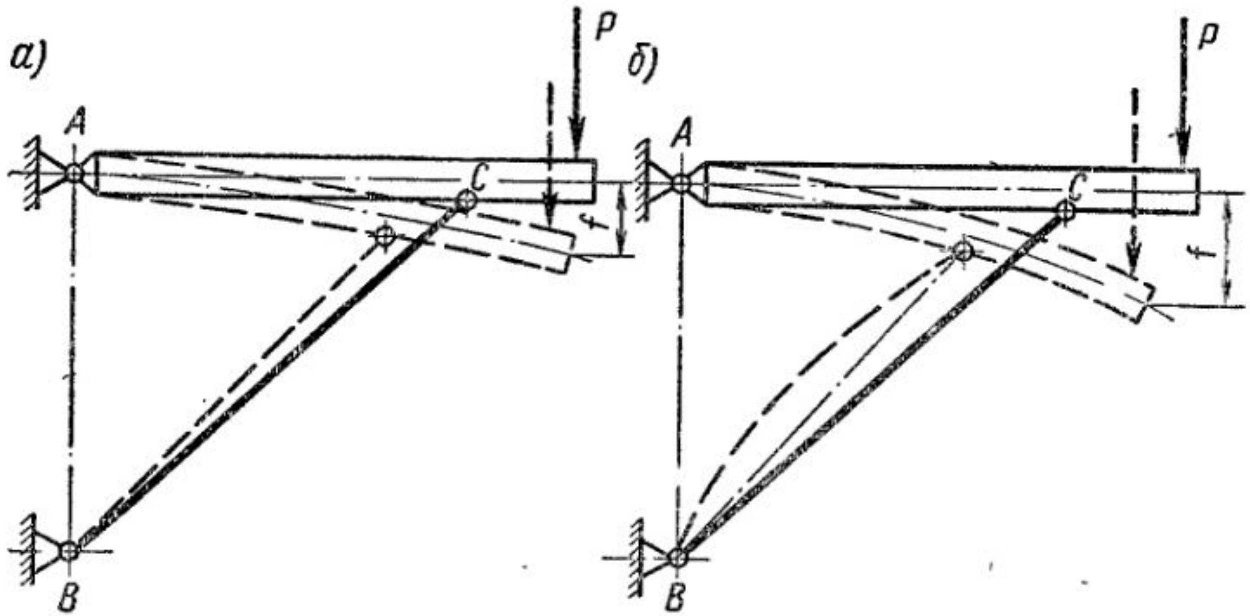
жесткостью *называют способность материала или элемента конструкции сопротивляться упругим деформациям.*

Пример недостаточной жесткости конструкц



Вторая задача сопротивления материалов — *расчет элементов конструкций на жесткость*

Рассмотрим еще один пример



Если стержень *BC* сравнительно длинный и тонкий, то при некоторой величине силы *P* он может внезапно изогнуться (выпучиться), как показано штриховыми линиями

Иными словами, при определенных условиях (при увеличении нагрузки до критического значения) первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой и возникает новая устойчивая форма равновесия — криволинейная.
При таком характере деформации конструкция практически выходит из строя: она или разрушается, или в ней возникают недопустимо большие перемещения.

Поэтому расчет должен обеспечить такое соотношение нагрузок, размеров и свойств материала, при котором гарантирована (с определенным запасом) *устойчивость* заданной (прямолинейной) формы равновесия.

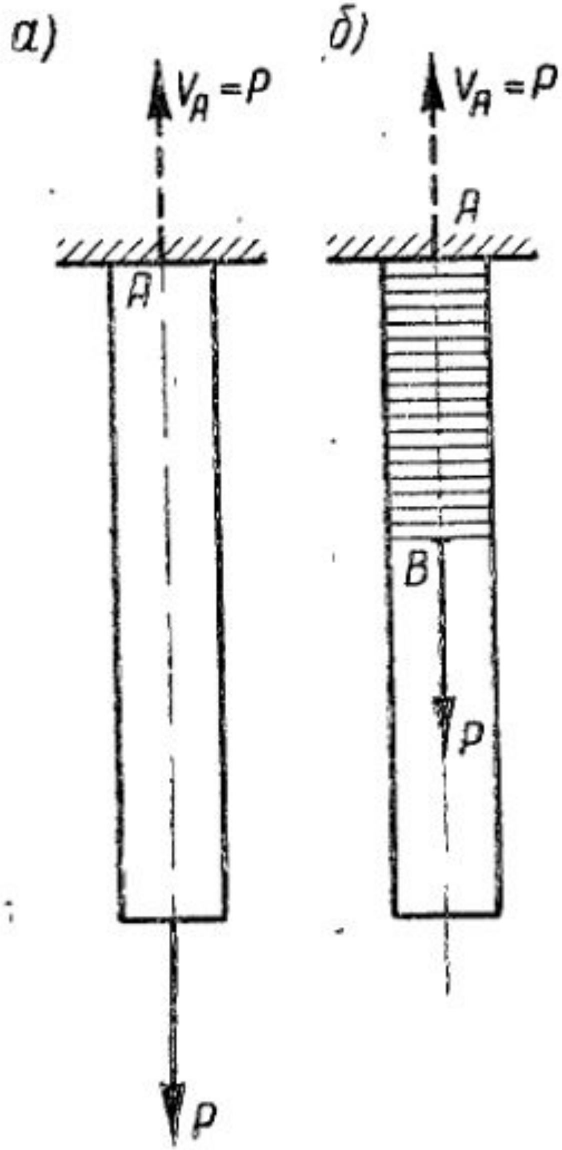
третья задача сопротивления материалов — *расчет элементов конструкций на устойчивость.*

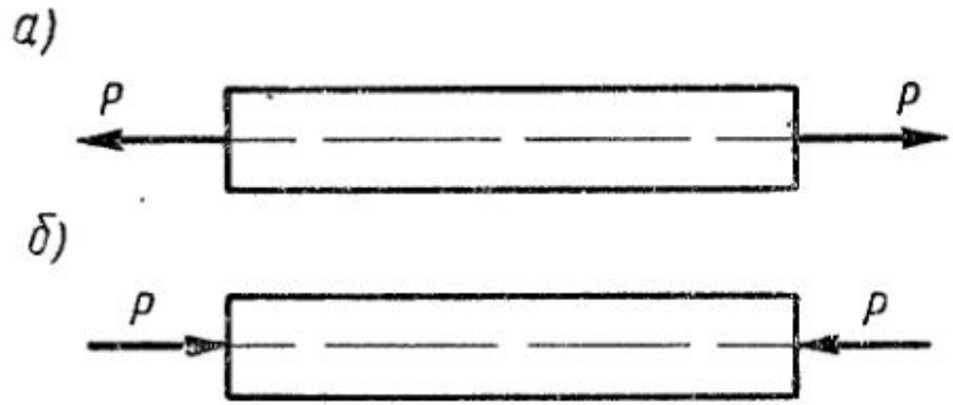
Подводя итог, заключаем, что *сопротивление материалов дает основы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.*

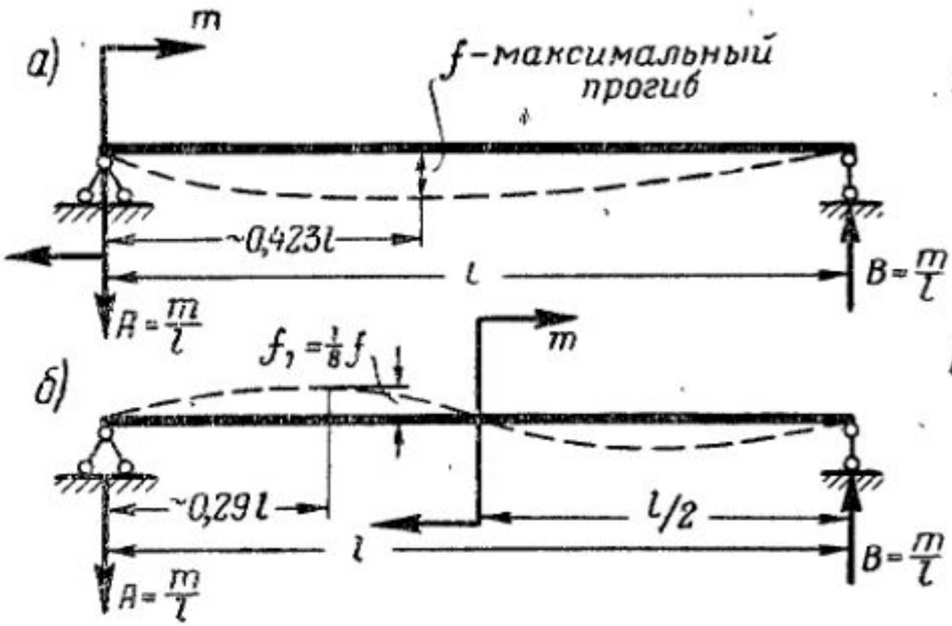
Некоторые замечания

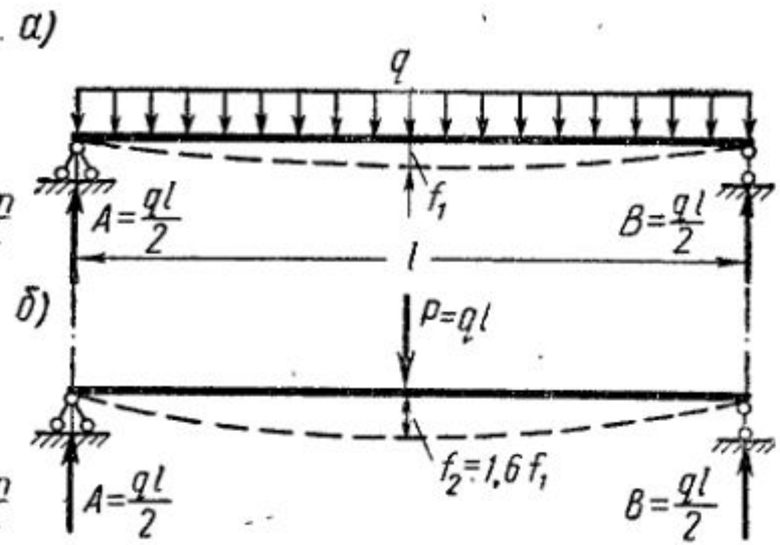
При решении задач сопротивления материалов широко применяют уравнения равновесия различных систем сил, полученные в статике абсолютно твердого тела, но все приемы и методы статики могут быть использованы в сопротивлении материалов.

Замена одной системы сил другой, статически эквивалентной, в частности перенос силы по линии ее действия и замена ряда сил их равнодействующей, резко изменяют характер деформации детали и поэтому недопустимы.


а)
б)
$V_A = P$
$V_A = P$
A
A
B
P
P


а)
P
P
б)
P
P

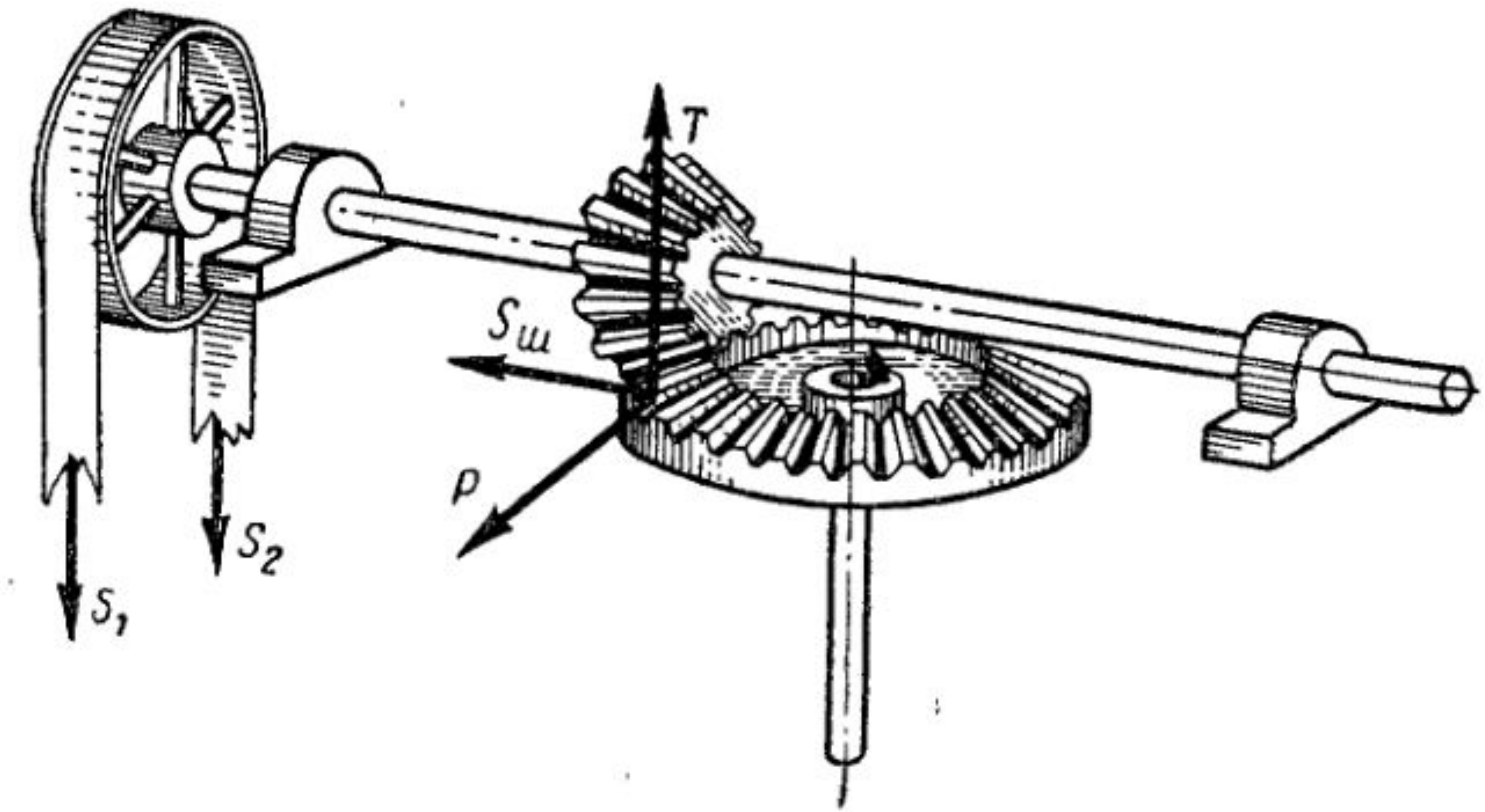

а)
m
f-максимальный прогиб
~0,423l
l
B=m/l
A=m/l
б)
$f_1 = \frac{1}{8} f$
m
~0,29l
l/2
l
B=m/l
A=m/l


а)
q
f_1
A=ql/2
B=ql/2
l
б)
P=ql
$f_2 = 1,6\, f_1$
A=ql/2
B=ql/2

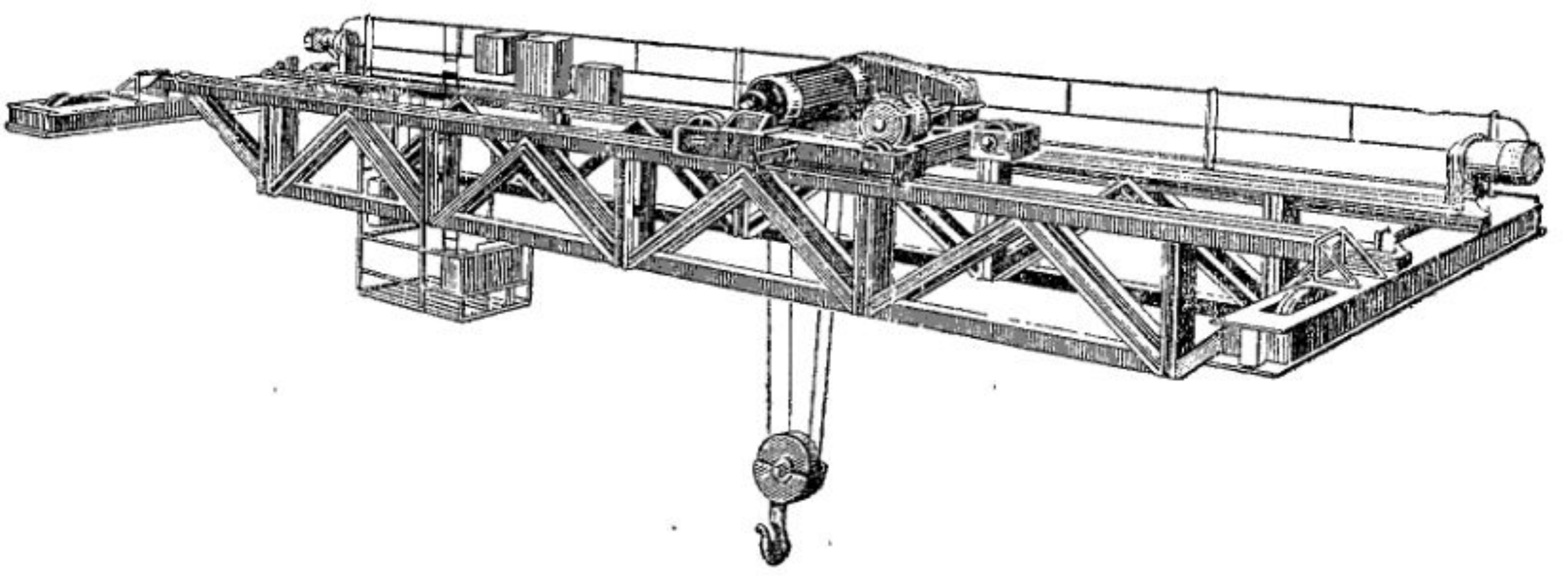
КЛАССИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ СИЛ И ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Внешние силы, действующие на элементы конструкций, как известно из курса теоретической механики, делятся на **активные** и **реактивные** (реакции связей). Активные внешние силы принято называть ***нагрузками***.

Приводной вал



Мостовой кран



В случае, если рассматриваемый элемент конструкции движется с ускорением, то к числу действующих на него нагрузок относятся также **силы инерции**.

Силы тяжести данной части конструкции и силы инерции, возникающие при ее ускоренном движении, являются ***объемными силами***, т. е. они действуют на каждый бесконечно малый элемент объема.

Нагрузки, передающиеся от одних элементов конструкции к другим, относятся к числу ***поверхностных сил***. ***Поверхностные силы*** делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. При этом следует помнить, что сосредоточенных сил, конечно, не существует — это абстракция, которая вводится для удобства расчетов.

По характеру изменения во времени различают:

1. Статические нагрузки*, нарастающие медленно и плавно от нуля до своего конечного значения, достигнув которого, в дальнейшем не изменяются. Примером могут служить центробежные силы в период разгона и при последующем равномерном вращении какого-либо ротора.*

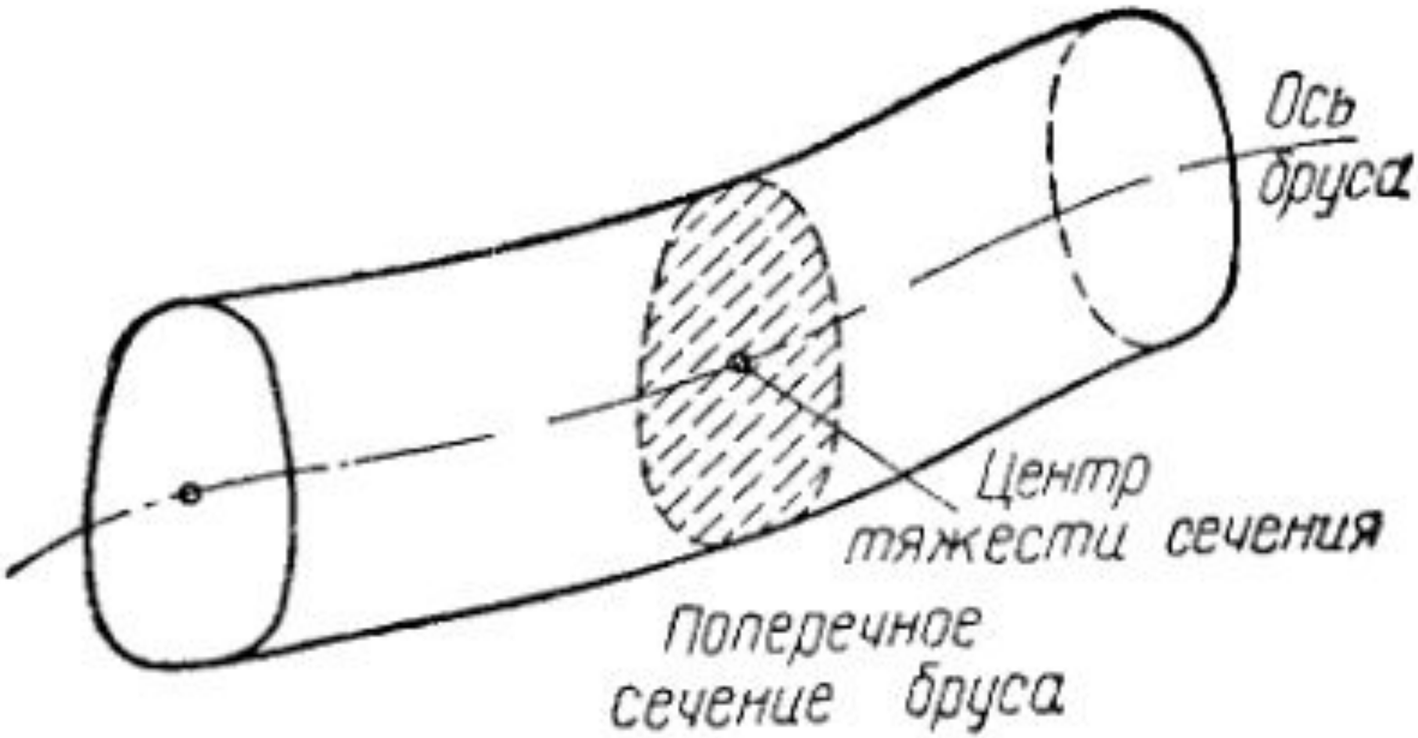
***2. Повторные нагрузки**, многократно изменяющиеся во времени по тому или иному закону. Примером такой нагрузки служат силы, действующие на зубья зубчатых колес.*

***3. Нагрузки малой продолжительности**, прикладываемые к конструкции сразу в полную величину или даже с начальной скоростью в момент контакта (эти нагрузки часто называют **динамическими** или **ударными**). Примером ударной является, например, нагрузка, воспринимаемая деталями парового*

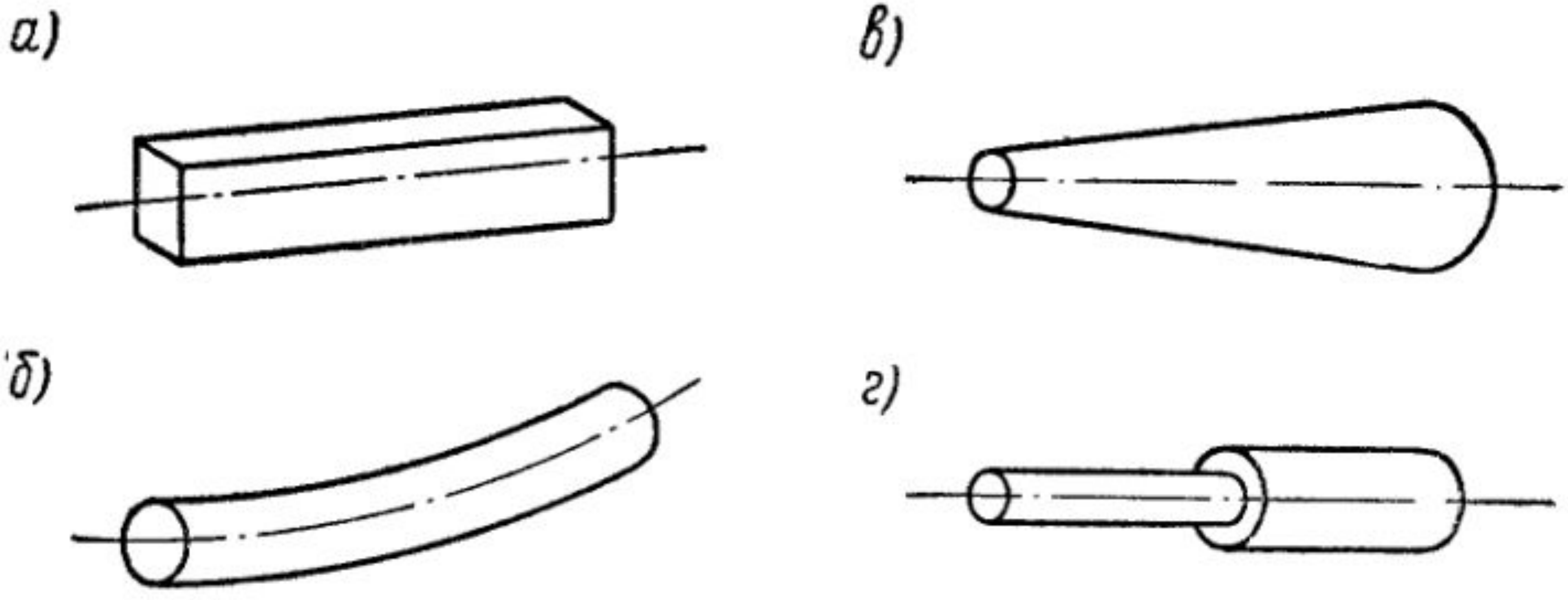
Элементы конструкций

Формы элементов конструкций чрезвычайно разнообразны, но с большей или меньшей степенью точности каждый из них можно для расчетных целей рассматривать либо как ***брус***, либо как ***оболочку*** или ***пластинку***, либо как ***массив***.

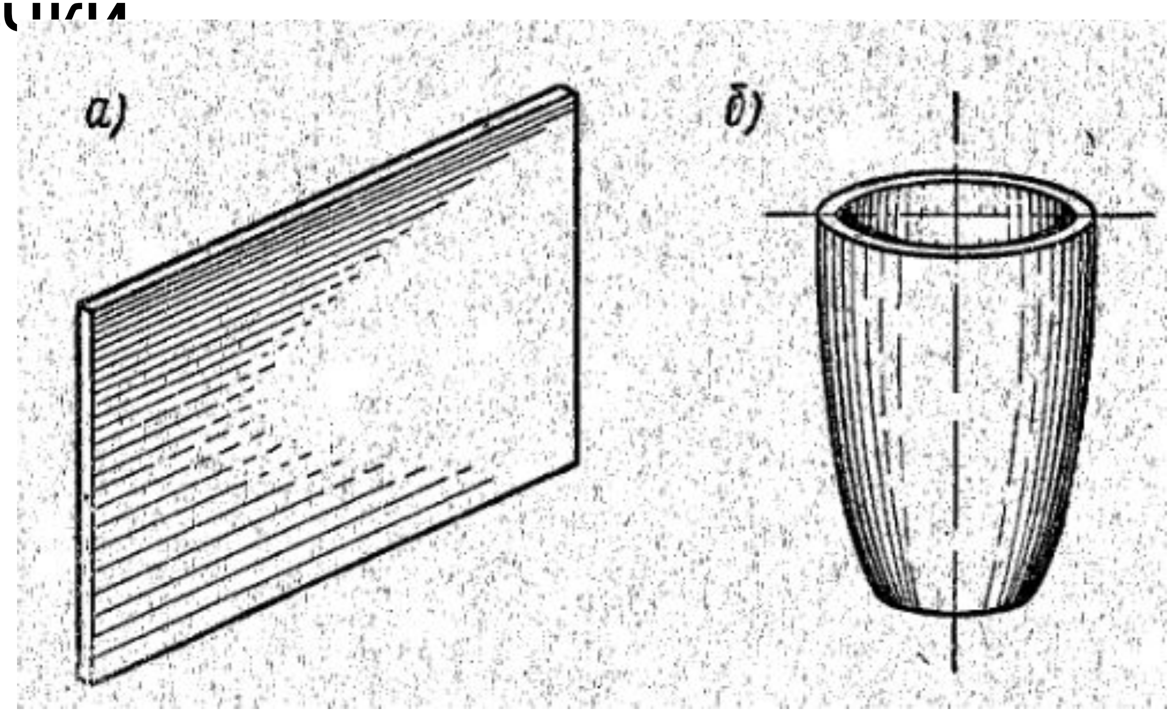
Брус - тело, два измерения которого невелики по сравнению с третьим (длиной).



Различают прямые и кривые брусья с постоянным, непрерывно или ступенчато изменяющимся поперечным сечением



Пластинка и ***оболочка*** характеризуются тем, что их толщина невелика по сравнению с остальными размерами. Пластинку можно рассматривать как частный случай оболочки.



Массивом -принято называть тело, все три измерения которого - величины одного порядка, например, фундамент под машину

Допущения о свойствах материалов и характере деформаций

В сопротивлении материалов приходится вводить ряд допущений о свойствах материалов, позволяющих построить достаточно простую и удобную для инженерной практики теорию расчетов элементов конструкций.

Рассмотрим эти допущения:

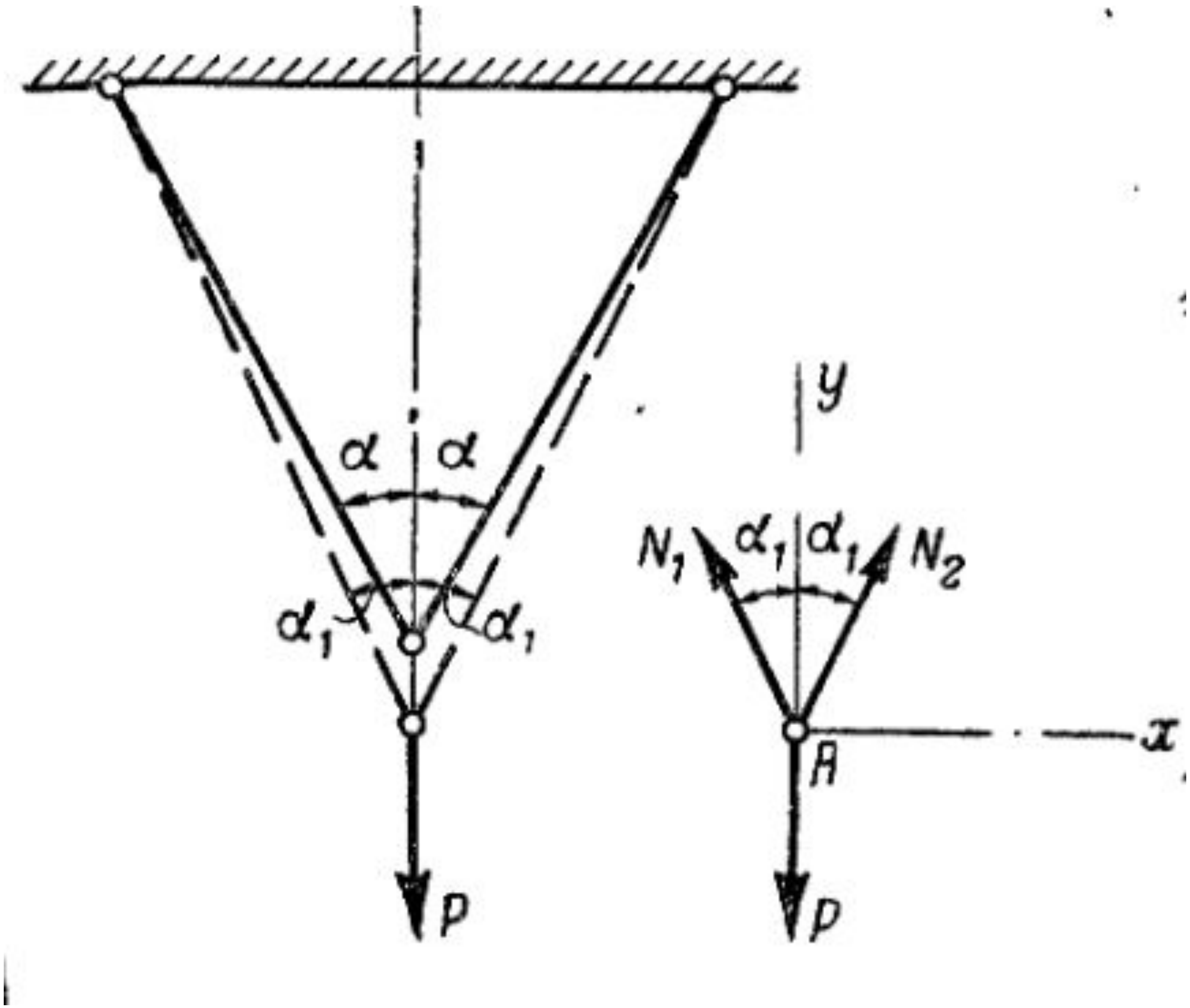
1. ***Материал однороден*** т. е. свойства любых сколь угодно малых его частиц совершенно тождественны.
2. ***Материал сплошной,*** т.е. материал *тела полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот* т. е. тело рассматривается как сплошная среда.
3. ***Материал изотропен****; т. е. физико-механические свойства его по всем направлениям одинаковы. Материалы, не обладающие указанным свойством, называют* ***анизотропными***

*4. В известных пределах нагружения материал обладает **идеальной (совершенной) упругостью**, т. е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.*

Допущения, связанные с характером деформаций элементов конструкций

*1. Перемещения точек тела (конструкции), обусловленные его упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами самого тела (**принцип начальных размеров**)*

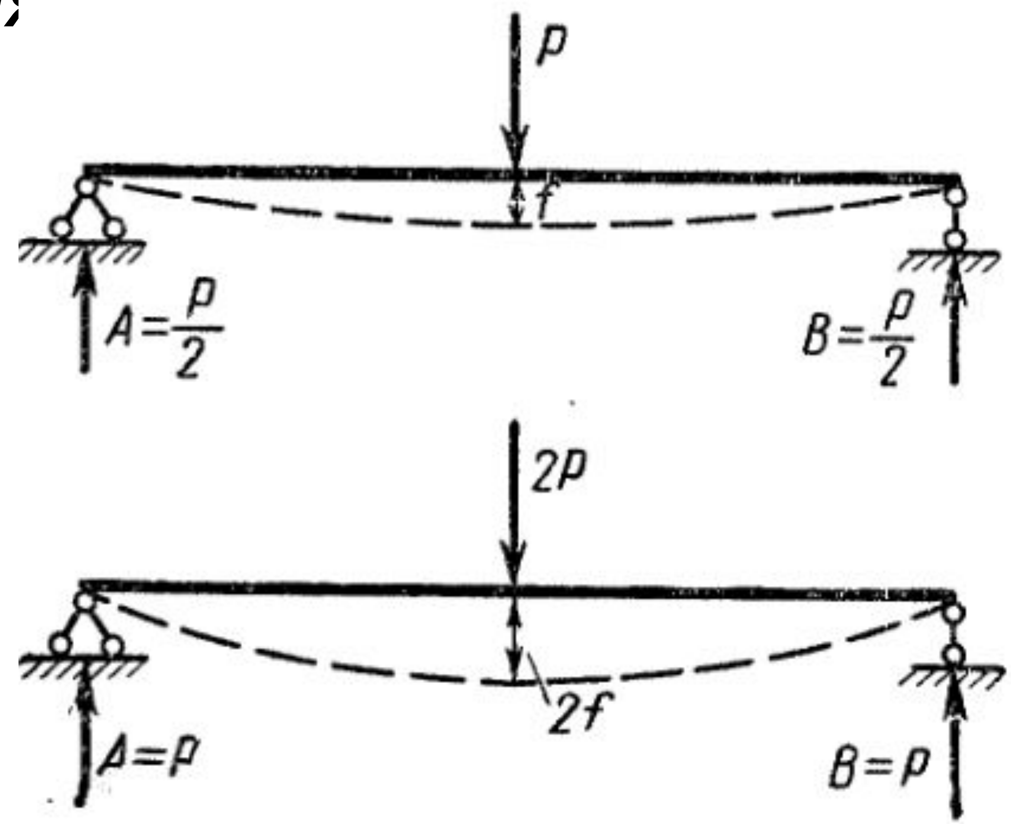
Из этого допущения следует, что изменения в расположении сил, происходящие при деформации конструкции, не следует учитывать при составлении уравнений равновесия (при определении реакций связей), а также и при определении внутренних сил



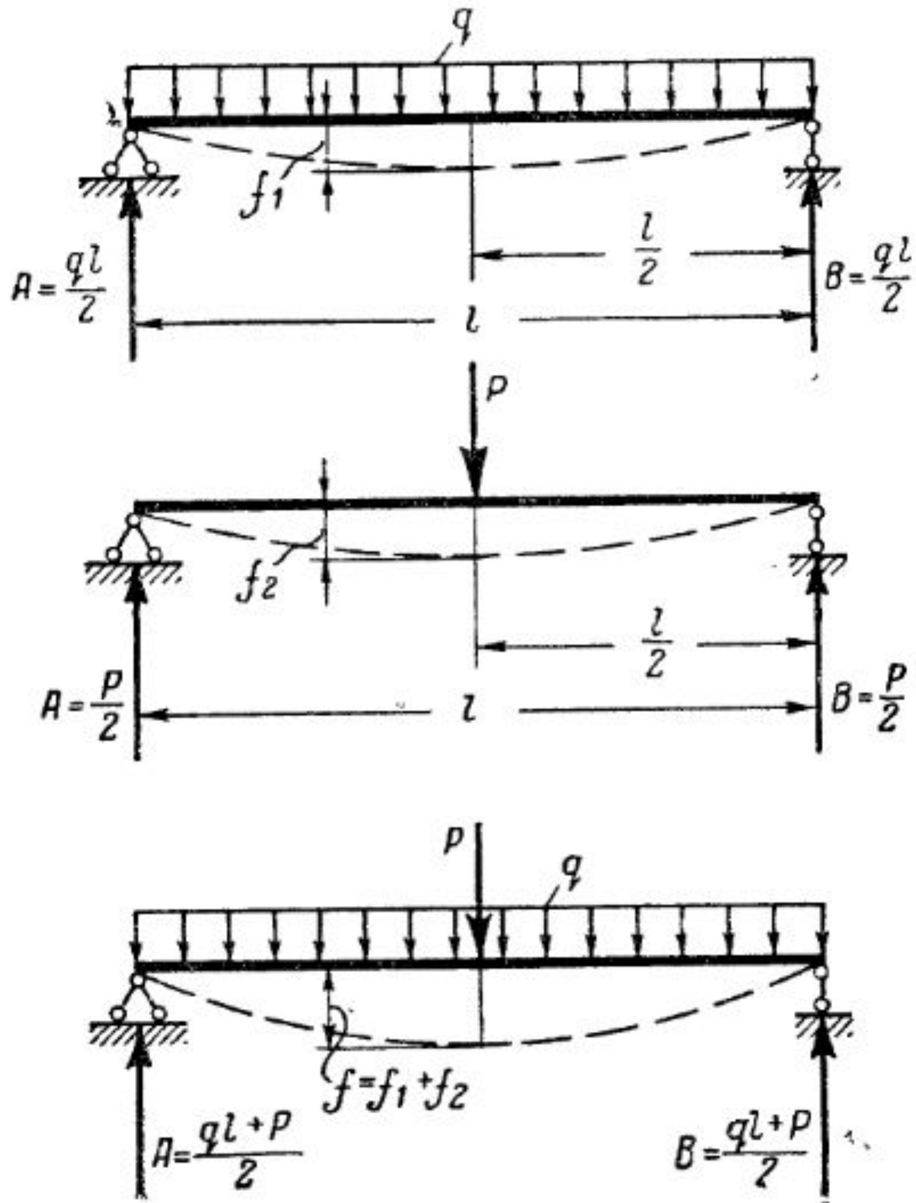
y
α
α
N_1
α_1
α_1
N_2
α_1
α_1
x
A
P
P

2. *Перемещения точек упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещени*

Конструкции (часто говорят системы), для которых справедлива указанная прямая пропорциональность между силами и соответствующими перемещениями, называют **линейно деформируемыми**



3. ***Принцип независимости действия сил***, который можно сформулировать следующим образом: *результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения ими конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности.* Сформулированное положение называют также принципом сложения действия сил, или **принципом суперпозиции**



q
f_1
$\frac{l}{2}$
$A = \frac{ql}{2}$
$B = \frac{ql}{2}$
l
P
f_2
$\frac{l}{2}$
$A = \frac{P}{2}$
$B = \frac{P}{2}$
l
P
q
$f = f_1 + f_2$
$A = \frac{ql + P}{2}$
$B = \frac{ql + P}{2}$

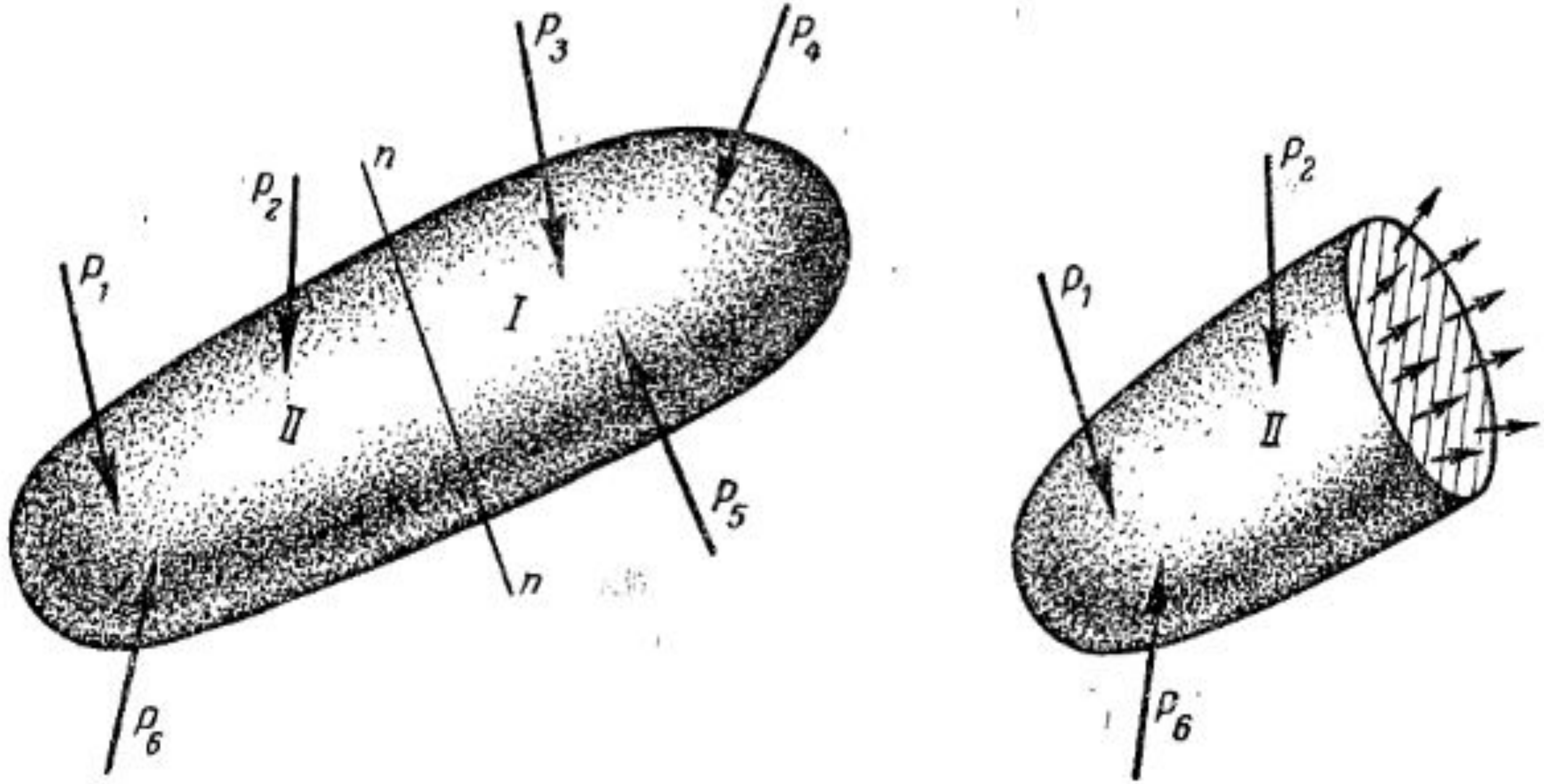
МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Прочность твердого тела обусловлена силами сцепления между отдельными его частицами. При деформации тела, вызванной действием приложенных к нему внешних сил, величины внутренних сил изменяются. В дальнейшем при определении внутренних сил будем подразумевать не их абсолютные значения, а только те изменения, которые вызваны действующими на тело

При возрастании внешних сил увеличиваются и внутренние силы, но лишь до определенного предела, при превышении которого наступает разрушение. Это предельное значение внутренних сил зависит от физико-механических свойств материала данного тела.

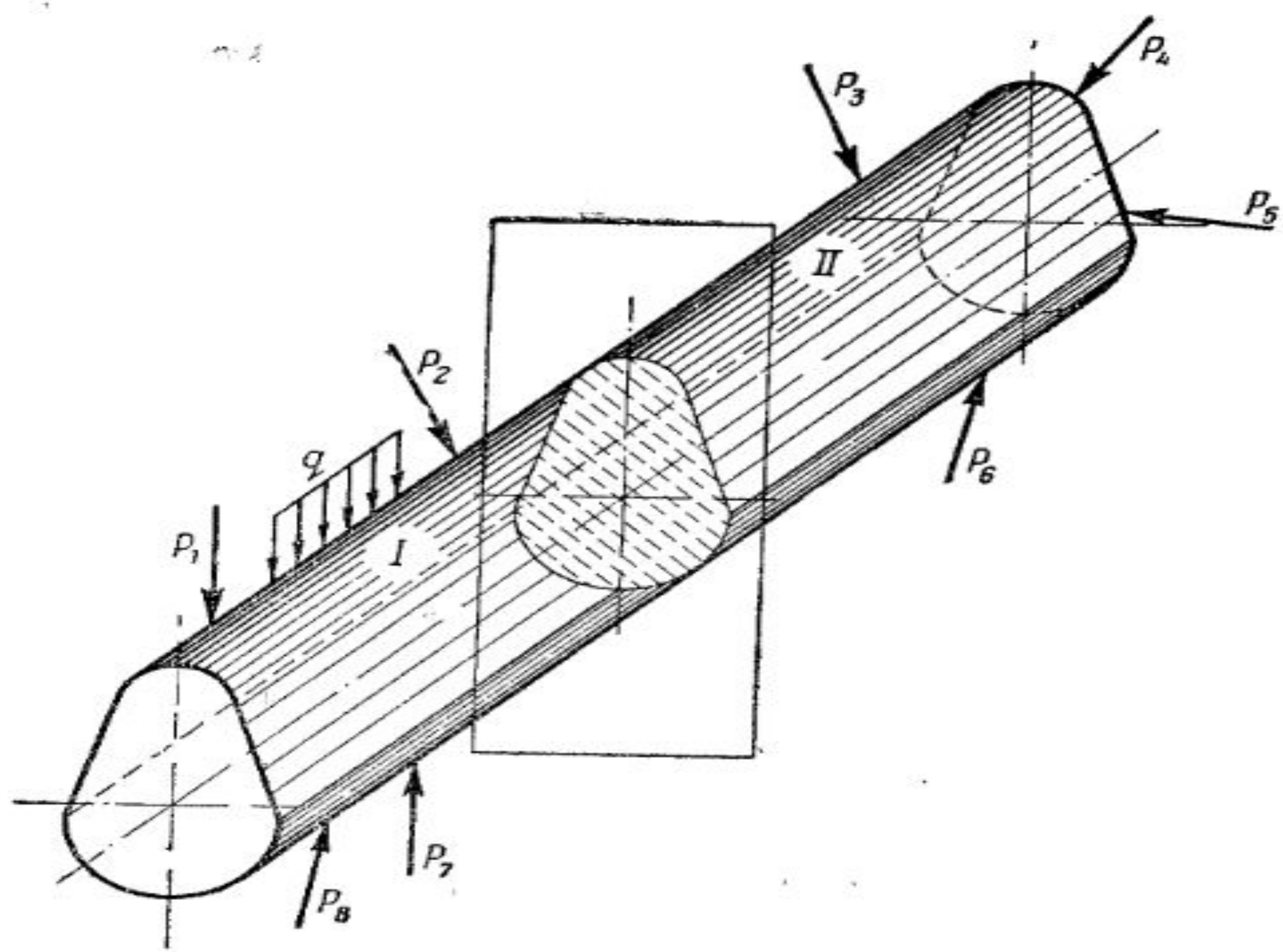
Для расчета на прочность необходимо иметь возможность определять внутренние силы по заданным нагрузкам. Основу для решения этой задачи дает ***метод сечений***.

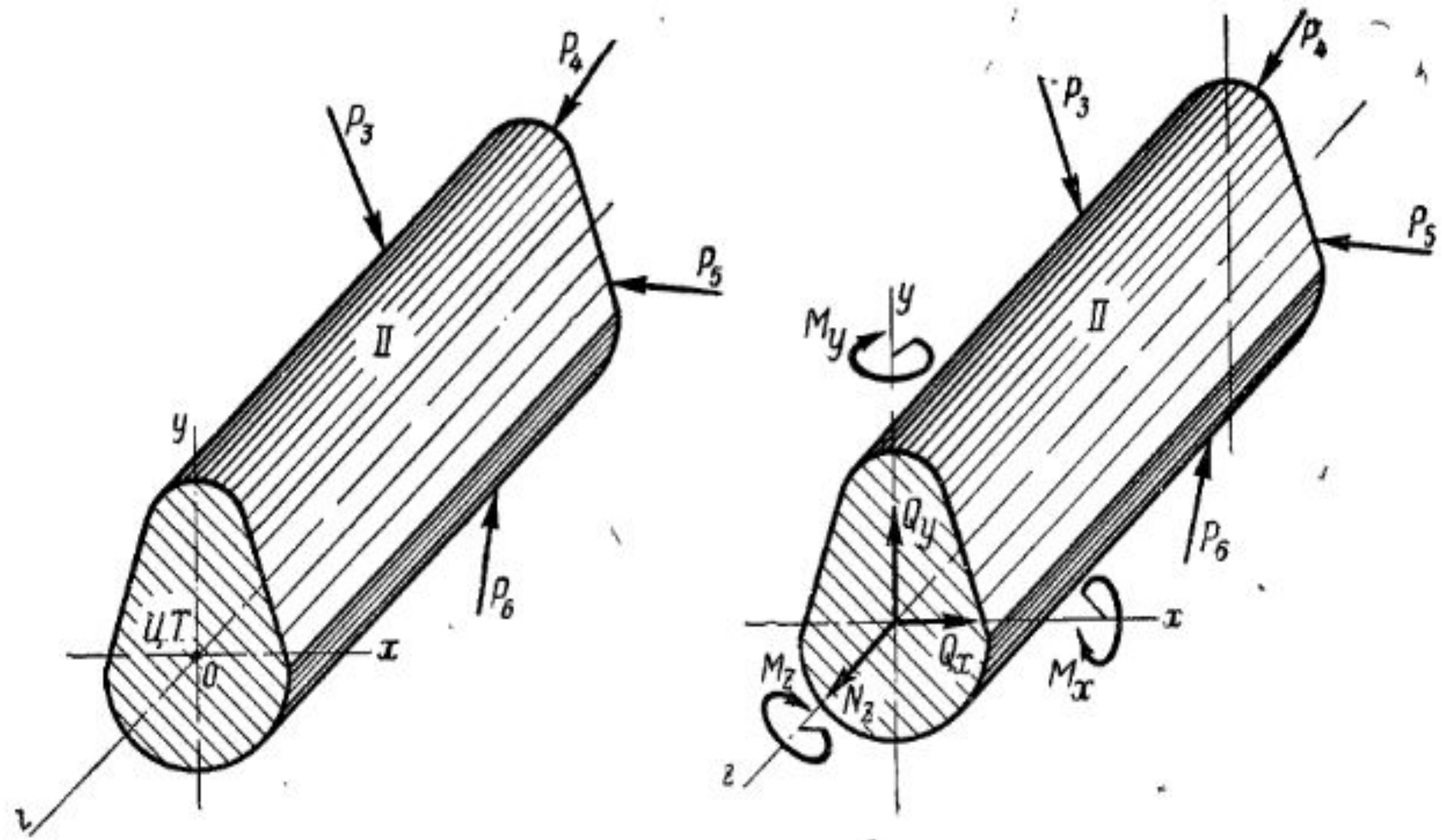
Метод сечений



1. Мысленно рассекают тело плоскостью в том месте, где нужно определить внутренние силы;
2. Отбрасывают одну из частей тела;
3. Заменяют действие отброшенной части на оставленную внутренними силами;
4. Составляют уравнения равновесия для сил, действующих на оставленную часть тела; решая эти уравнения, находят главный вектор и главный момент внутренних сил, возникающих в рассматриваемом сечении.

Внутренние силовые факторы





P_3
P_4
P_5
P_6
II
y
x
z
Ц.Т.
0
M_y
M_x
M_z
Q_y
Q_x
N_z

N_z — продольная (или нормальная) сила;
Q_x, Q_y — поперечные силы;
M_z — крутящий момент;
M_x, M_y — изгибающие моменты.

$$\sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} Z = N_z + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} P_{zi} = 0; \qquad \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} Y = Q_y + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} P_{yi} = 0;$$

$$\sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} X = Q_x + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} P_{xi} = 0; \qquad \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_z = M_z + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_z(P_i) = 0;$$

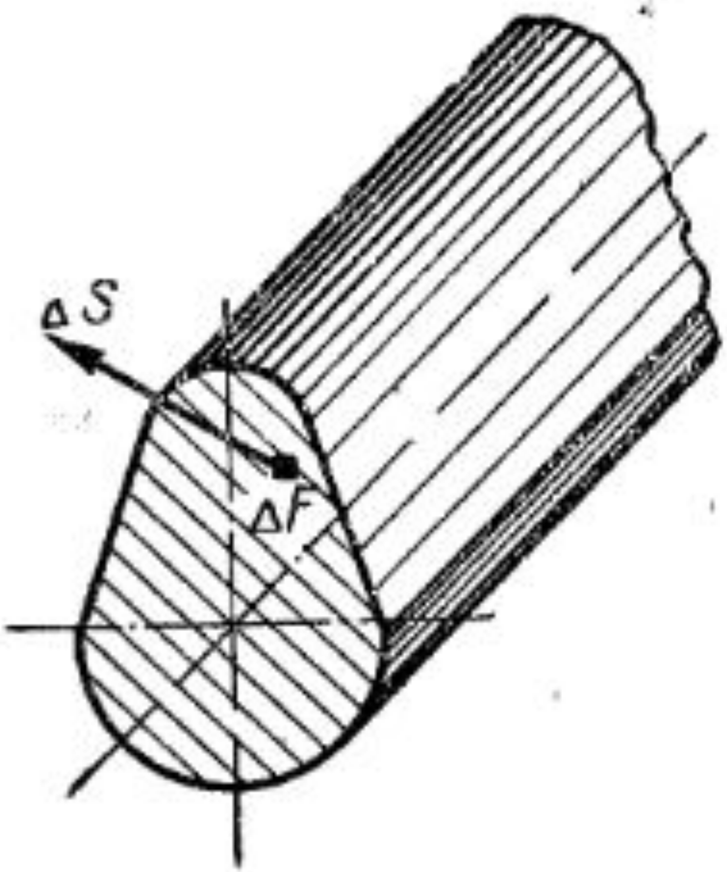
$$\sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_x = M_x + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_x(P_i) = 0;$$

$$\sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_y = M_y + \sum_{\substack{\text{ост.}\\ \text{части}}} m_y(P_i) = 0.$$

Напряжения

Внутренние силы, распределены по сечению тела (в частности, бруса) сплошным образом, при этом в общем случае их величина и направление в отдельных точках сечения различны.

Для суждения об интенсивности внутренних сил в определенной точке данного сечения введено понятие о **напряжении**.



ΔS - внутренняя сила

ΔF - малая площадка

Среднее напряжение в рассматриваемой точке по проведенному сечению

$$p_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta F}$$

Истинное напряжение в данной точке рассматриваемого сечения

$$p = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta F}$$

Размерность напряжения

$$\frac{H}{м^2} = Па(Паскаль)$$

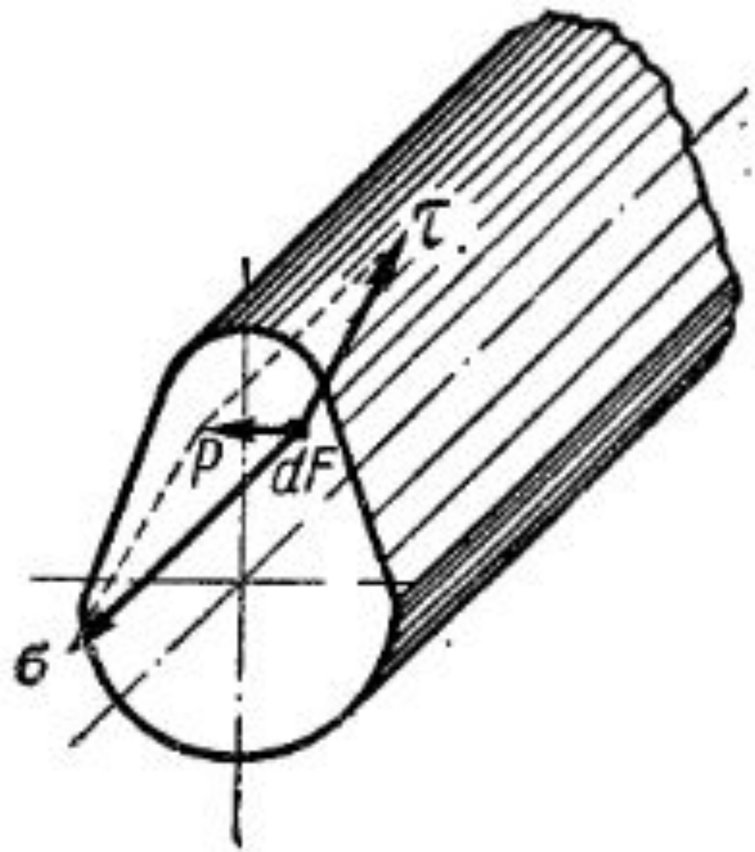
Через данную точку тела можно провести бесчисленное множество сечений, различно ориентированных в пространстве, и, конечно, в общем случае возникающие на них напряжения будут различны. Поэтому *нельзя говорить о напряжении в данной точке, не указывая площадки (сечения), на которой это напряжение возникает.*

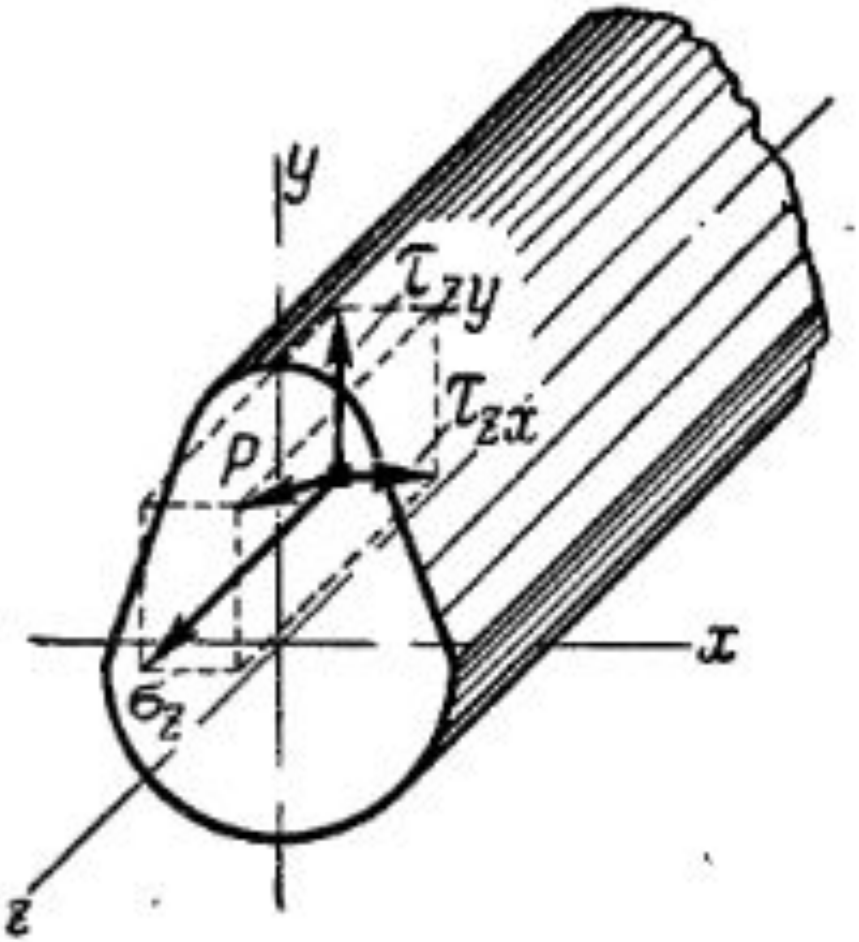
Разложим вектор напряжения *p* на две составляющие: одну — направленную по нормали к сечению, вторую — лежащую в плоскости сечения

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

σ - Нормальное напряжение

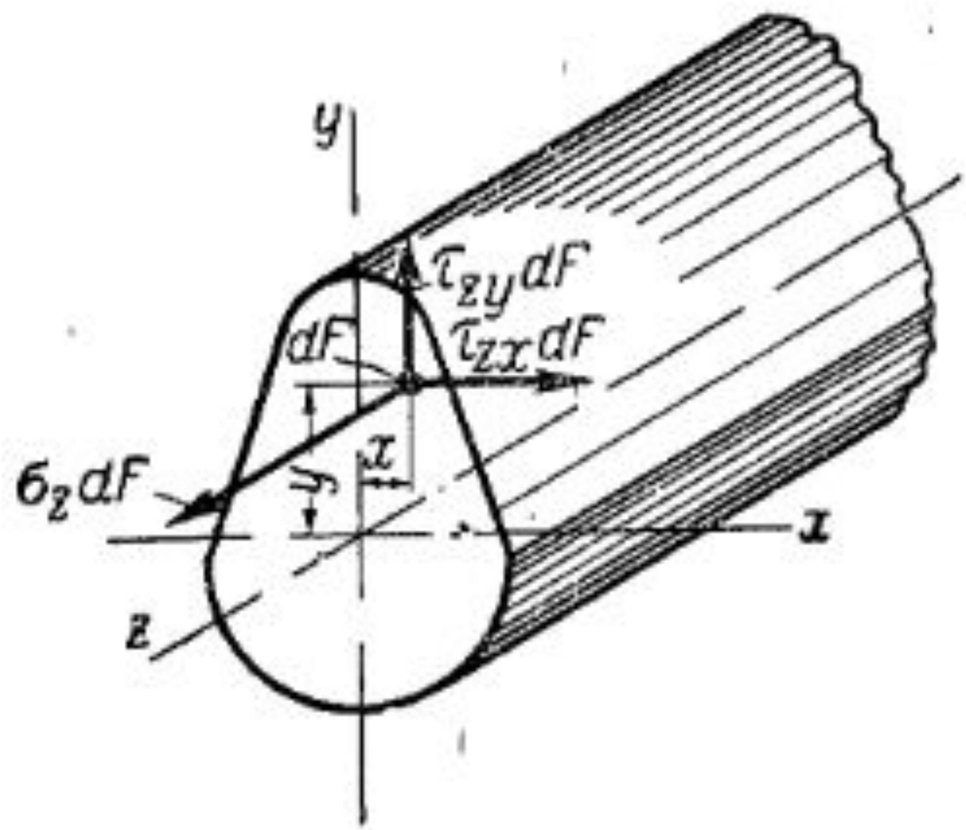
τ - Касательное напряжение





$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}$$

Установим связь между напряжениями и внутренними силовыми факторами в поперечном сечении бруса.



$$dN_z = \sigma_z dF$$

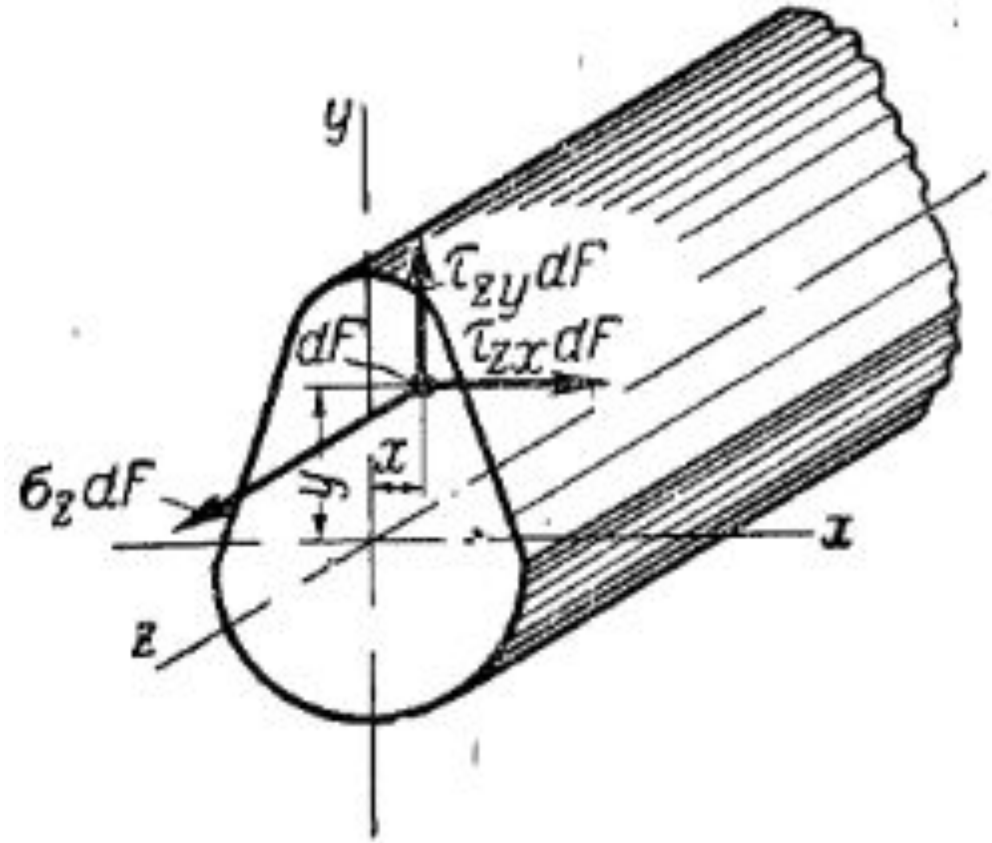
$$dQ_x = \tau_{zx} dF$$

$$dQ_y = \tau_{zy} dF$$

$$N_z = \int_F \sigma_z dF$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} dF$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$$



$$dM_x = (\sigma_z dF)y$$

$$dM_y = (\sigma_z dF)x$$

$$dM_z = (\tau_{zx} dF)y - (\tau_{zy} dF)x$$

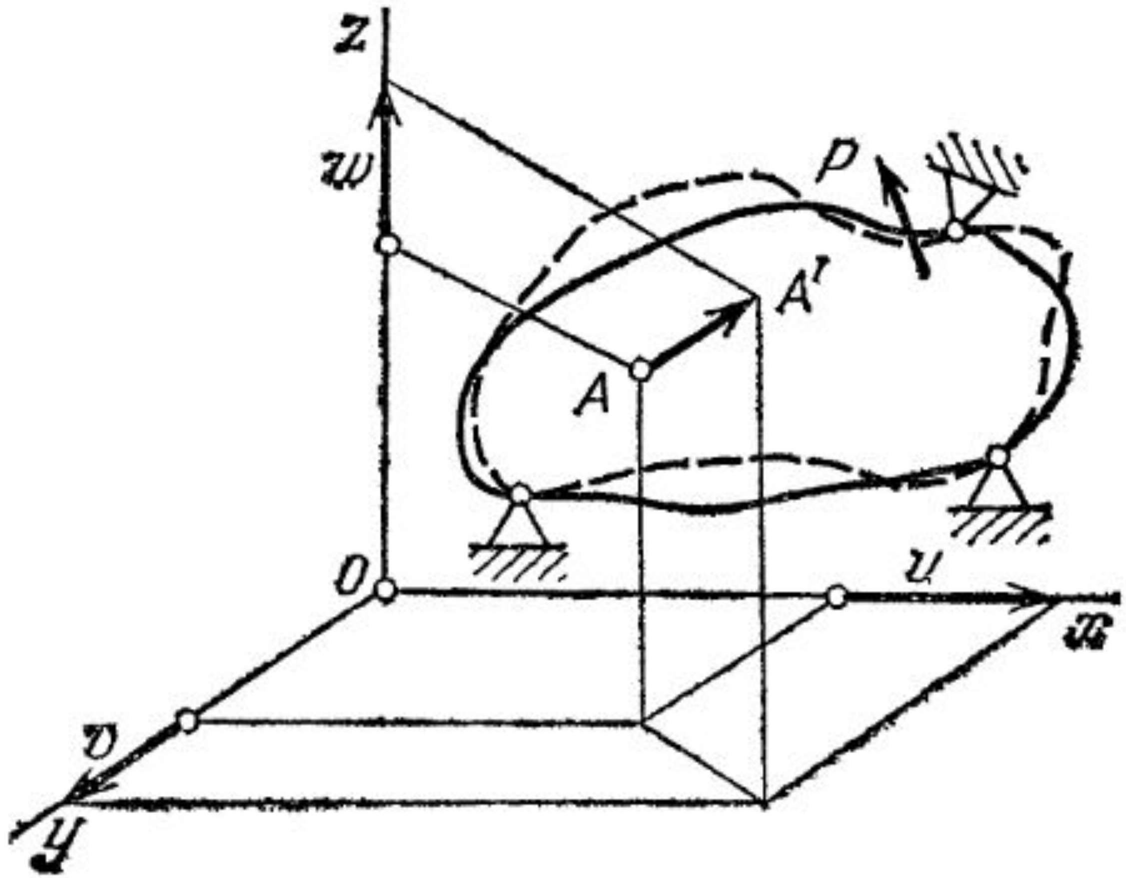
$$M_x = \int\limits_F \sigma_z y dF$$

$$M_y = \int\limits_F \sigma_z x dF$$

$$M_z = \int\limits_F (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dF$$

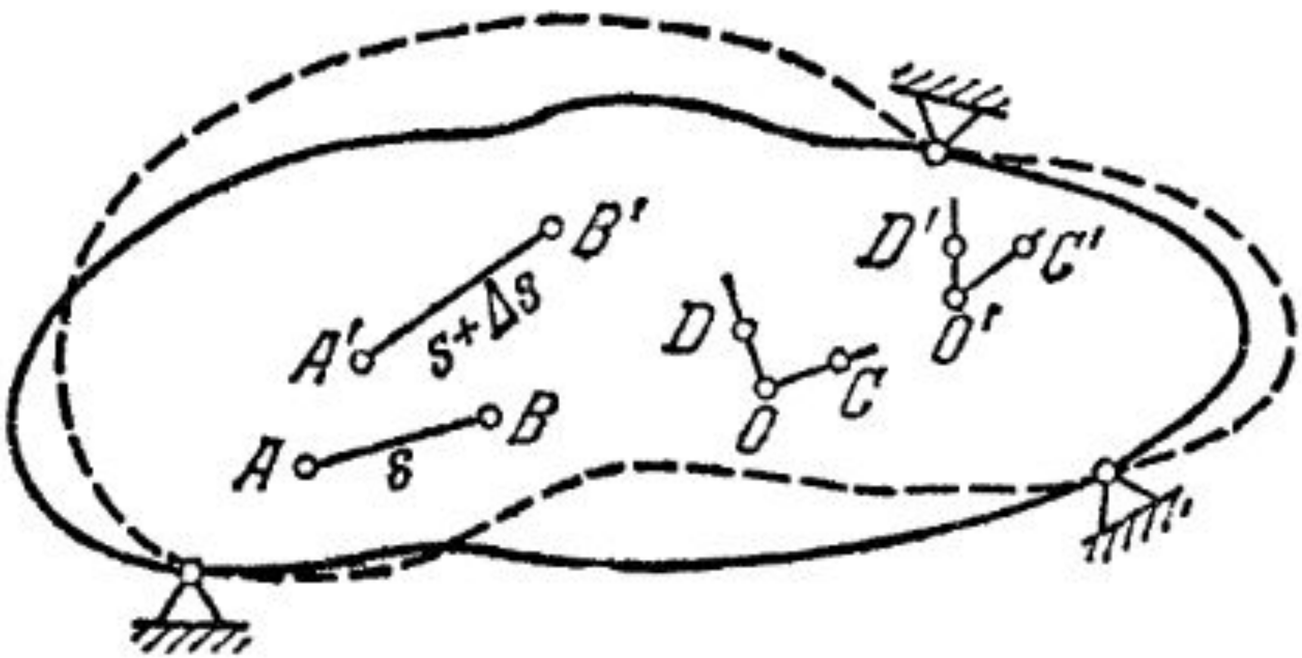
Перемещения и деформации

Под действием внешних сил все тела меняют свою форму (деформируются). Под действием внешних сил точки тела меняют своё положение в пространстве. Вектор, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец – в соответствующей точке деформированного, называется вектором ***полного перемещения точки***. Его проекции на оси координат носят название ***перемещений по осям***. Они обозначаются через *u, v* и *w* соответственно осям *x, y u z.*

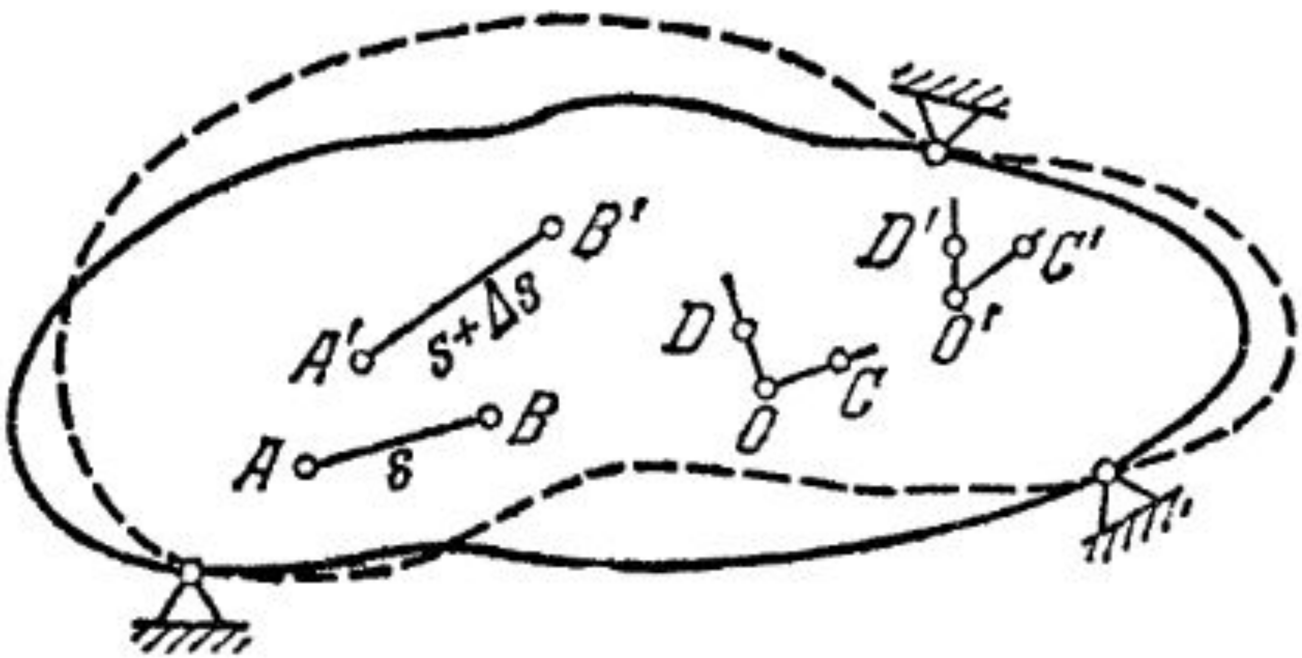


Кроме линейного перемещения, введем понятия *углового перемещения.*

Если рассмотреть отрезок прямой между двумя близкими точками до и после изменения формы тела, то легко установить, что этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол. Этот угол поворота также характеризуется вектором, который может быть разложен по осям *x, y и z*



Для того чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров, рассмотрим точки *A* и *B* недеформированного тела, расположенные друг от друга на расстоянии s. Пусть в результате изменения формы тела это расстояние Δs увеличится на .



Отношение приращения длины отрезка Δs к его первоначальной длине назовем ***средним удлинением на отрезке*** *s*

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta s}{s}$$

Будем далее, уменьшать отрезок *s*, приближая точку *B* к точке *A.* В пределе получим

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{AB}$$

Величина ε_{AB} называется ***линейной деформацией*** в точке *A* по направлению *AB*

В той же точке в другом направлении, деформация будет другой. Если рассматриваются деформации в направлении координатных ε осей *x, y и z,* в обозначение вводятся соответствующие индексы. ε_x ε_y ε_z

Кроме линейной деформации вводится и понятие *угловой деформации*. Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками *OD* и *OC*. После нагружения тела внешними силами этот угол изменится и примет значение $C'O'D'$ Будем уменьшать отрезки *OC* и *OD*, приближая точки *C* и *D* к точке *O* и оставляя при этом угол *COD* прямым.

Предел разности углов COD $C'O'D'$ и

$$\gamma_{COD} = \lim_{\substack{OC \to 0 \\ OD \to 0}} (\angle COD - \angle C'O'D')$$

называется ***угловой деформацией*** или ***углом сдвига*** в точке *O* в плоскости *COD. В координатных плоскостях углы сдвига обозначаются* *через* γ_{yz} γ_{zx} γ_{xy}

Совокупность линейных деформаций по различным направлениям и угловых деформаций в различных плоскостях для одной точки образует ***деформированное состояние*** в точке.

Закон Гука

Многочисленные наблюдения за поведением твердых тел показывают, что в большинстве случаев деформации в определенных пределах пропорциональны действующим напряжениям . Эта закономерность была установлена Гуком.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), единица измерения – Паскаль (Па)

G - модуль упругости второго рода (модуль сдвига), единица измерения – Паскаль (Па)