Поверхности второго порядка

Презентация

Тема: Поверхности 2-го порядка

Предмет: Математика

Студент: Максимов Артур
Группа: 17 ДМ
Преподаватель: Сытенкова Татьяна Викторовна

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка S называется геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

где по крайней мере один из коэффициентов отличен от нуля. Это уравнение называют *общим уравнением* поверхности второго порядка *S* (обозначим это ур-е 1), а систему координат *Oxyz* называют *общей системой координат.*

<u>Теорема:</u> Для произвольной поверхности *S*, заданной общим уравнением существует такая декартова прямоугольная система координат что в этой системе поверхность *S* имеет уравнение одного из следующих семнадцати канонических видов.

1) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид,

2) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$ — мнимый эллипсоид,

3) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид,

4) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид,

5) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$ — конус,

6) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$ — мнимый конус (точка),

7) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z$ — эллиптический параболоид,

8) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$ — гиперболический параболоид,

9) $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр,

10) $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптический цилиндр,

11) $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$ — две мнимые пересекающиеся плоскости (ось *O'Z*),

12) $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр,

13) $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$ — две пересекающиеся плоскости,

14) $Y^2=2pX$ — параболический цилиндр,

15) $Y^2=a^2$ — две параллельные плоскости,

16) $Y^2=-a^2$ — две мнимые параллельные плоскости,

17) $Y^2=0$ — две совпадающие плоскости (плоскость *XOZ*).

В выше перечисленных уравнениях *a*, *b*, *c*, *p* — положительные параметры. Систему координат называют *канонической.*

Поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется, если от данной декартовой прямоугольной системы координат перейти к другой декартовой системе координат. Отметим, что исходное уравнение (1) и уравнение, полученное после преобразования координат, алгебраически эквивалентны.

$$\left.\begin{aligned} &I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},\quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \\ &I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad u \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Классификация центральных поверхностей. Пусть S — центральная поверхность второго порядка. Перенесем начало координат в центр этой поверхности, а затем произведем стандартное упрощение уравнения этой поверхности. В результате уравнение поверхности примет вид: a11x2 + a22y2 + a33z2 + a44 =0 (2)

Так как инвариант I3 для центральной поверхности отличен от нуля и его значение, вычисленное для уравнения (2) , равно a11 • a22 • a33 , то коэффициенты a11,a22, a33 удовлетворяют условию :

$$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$$

Возможны следующие случаи :

1. Коэффициенты a11 ,a22 , a33 одного знака, а коэффициент a44 отличен от нуля. В этом случае поверхность S называется эллипсоидом.

Обычно уравнение эллипсоида записывают в канонической форме: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

2. Если из четырех коэффициентов a11 ,a22 , a33 , a44 два одного знака, а два других— противоположного. В этом случае поверхность S называется однополостным гиперболоидом.

3. Если знак одного из первых трех коэффициентов a11, a22, a33, a44 противоположен знаку остальных коэффициентов. В этом случае поверхность S называется двуполостным гиперболоидом.

Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Свойства эллипсоида:

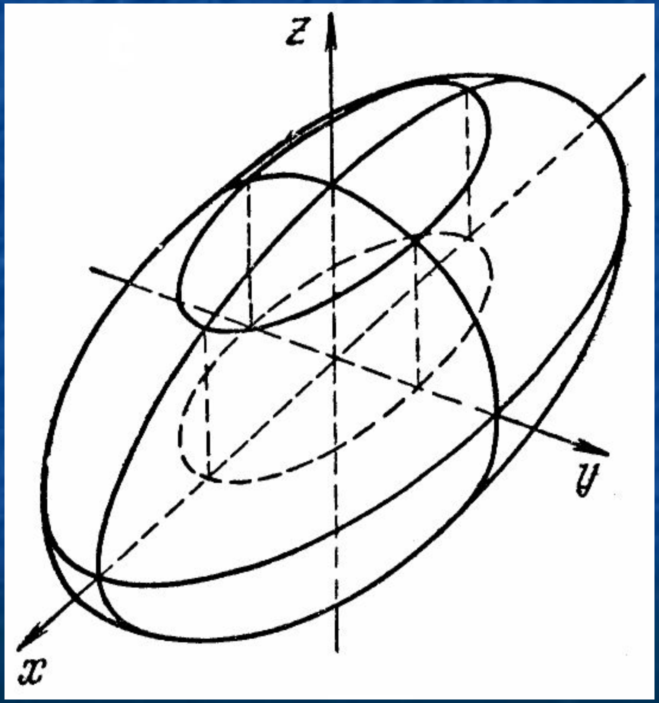
Эллипсоид обладает

1) Центральной симметрией относительно начала координат,

2) Осевой симметрией относительно координатных осей,

3) Плоскостной симметрией относительно начала координат.

В сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной любой из координатных осей, получается эллипс.



Гиперболоиды

1. ***Однополостный гиперболоид.***

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Свойства гиперболоида:

Однополостный гиперболоид обладает

1) Центральной симметрией относительно начала координат,

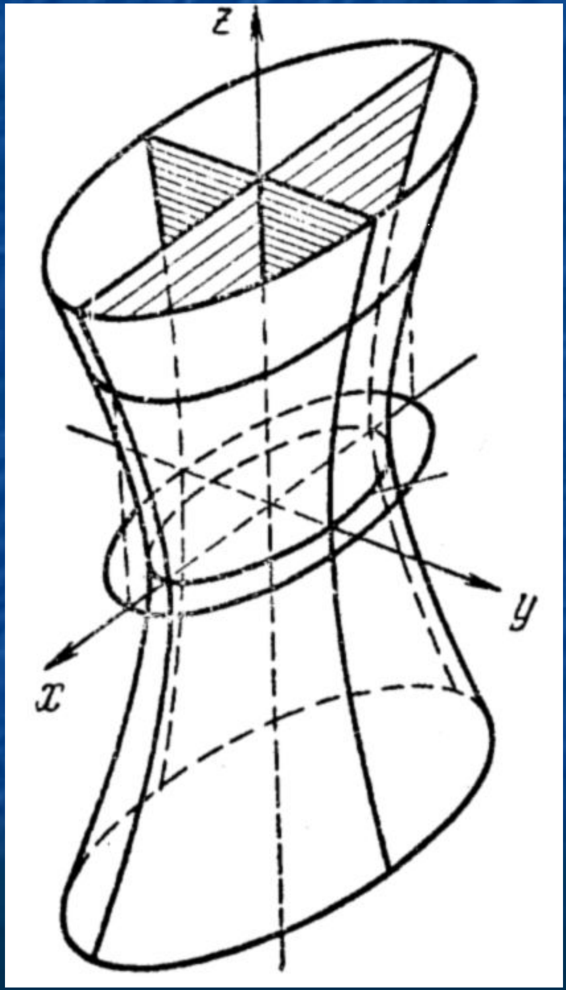
2) Осевой симметрией относительно координатных осей,

3) Плоскостной симметрией относительно начала координат.

В сечении однополостного гиперболоида плоскостью,

перпендикулярной оси координат Oz , получается эллипс,

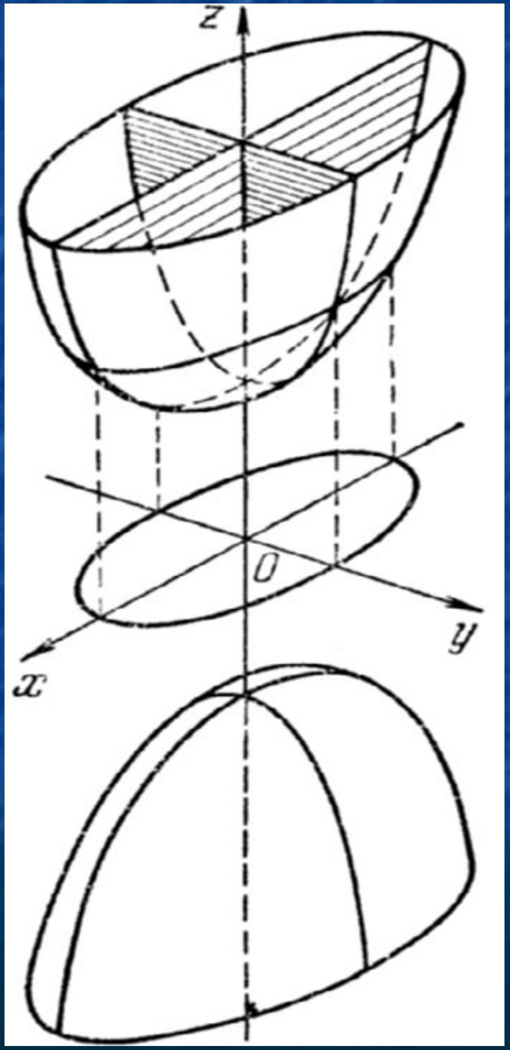
а плоскостями, ортогональными осям Ox и Oy – гипербола.



Гиперболоиды

2. ***Двуполостный гиперболоид.***

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



Свойства двуполостного гиперболоида:

Двуполостный гиперболоид обладает

1) Центральной симметрией относительно начала координат,

2) Осевой симметрией относительно координатных осей,

3) Плоскостной симметрией относительно начала координат.

В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси координат Oz, при |z| > c получается эллипс, при |z| = c – точка, а в сечении плоскостями, перпендикулярными осям Ox и Oy, – гипербола.

Параболоиды

1. ***Эллиптический параболоид.***

Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

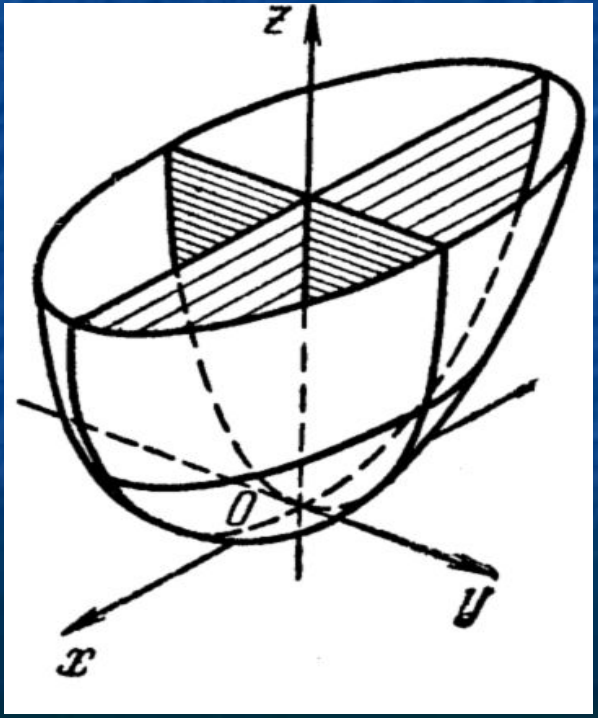
Свойства эллиптического параболоида:

Эллиптический параболоид обладает

1) Осевой симметрией относительно оси *Oz*,

2) Плоскостной симметрией относительно координатных осей *Oxz* и *Oyz*,

В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Ох и Оу – парабола.



Параболоиды

2. ***Гиперболический параболоид.***

Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

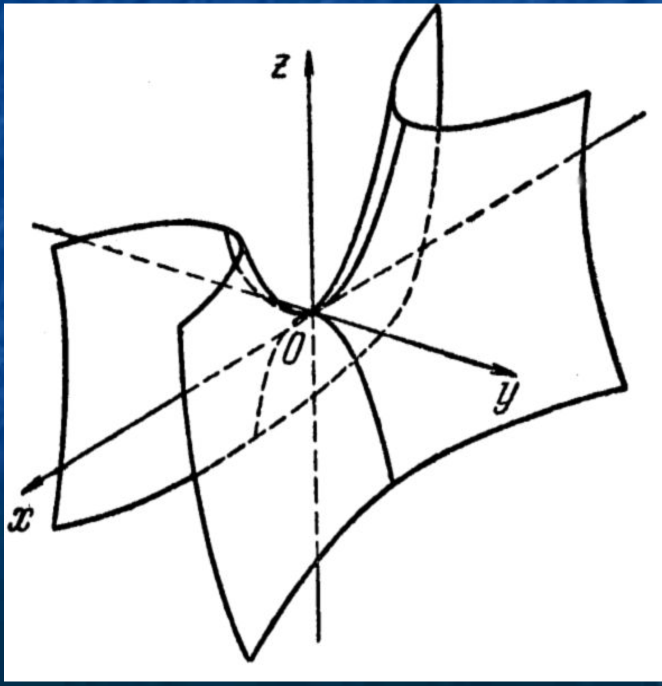
Свойства гиперболического параболоида:

Гиперболический параболоид обладает

1) Осевой симметрией относительно оси *Oz*,

2) Плоскостной симметрией относительно координатных осей *Oxz* и *Oyz*,

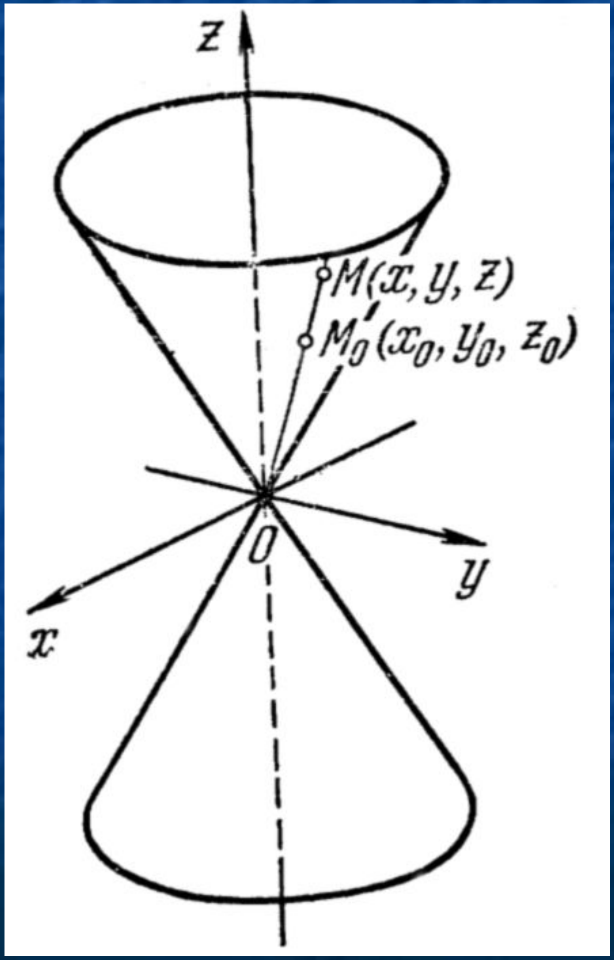
В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz , получается гипербола, а плоскостями, ортогональными осям Ox и Oy – парабола.



Конус и цилиндры второго порядка

1. К*онус.*

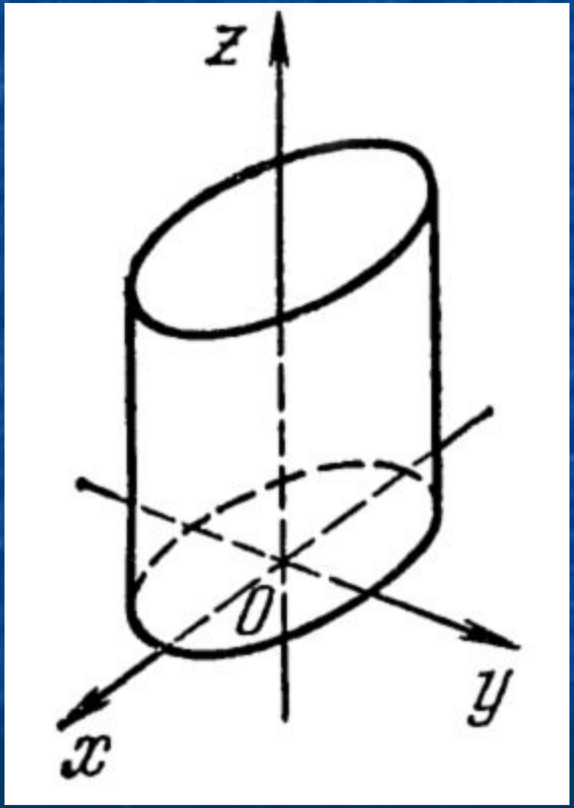
Конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



Конус и цилиндры второго порядка

2. ***Эллиптический цилиндр.***

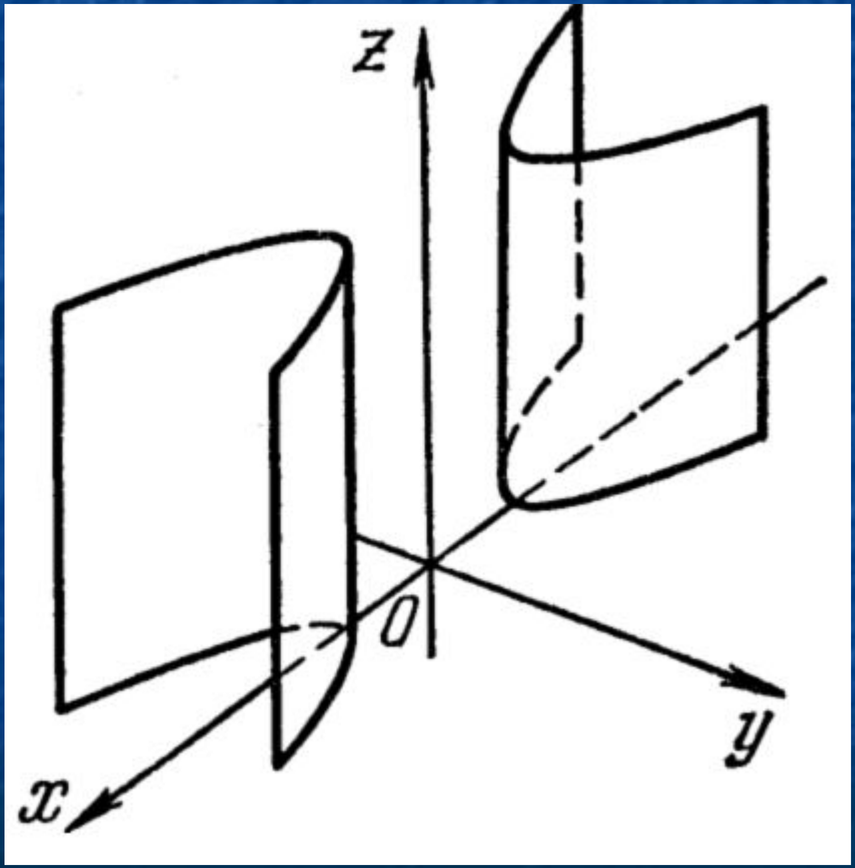
Каноническое уравнение эллиптического цилиндра имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Конус и цилиндры второго порядка

3. ***Гиперболический цилиндр.***

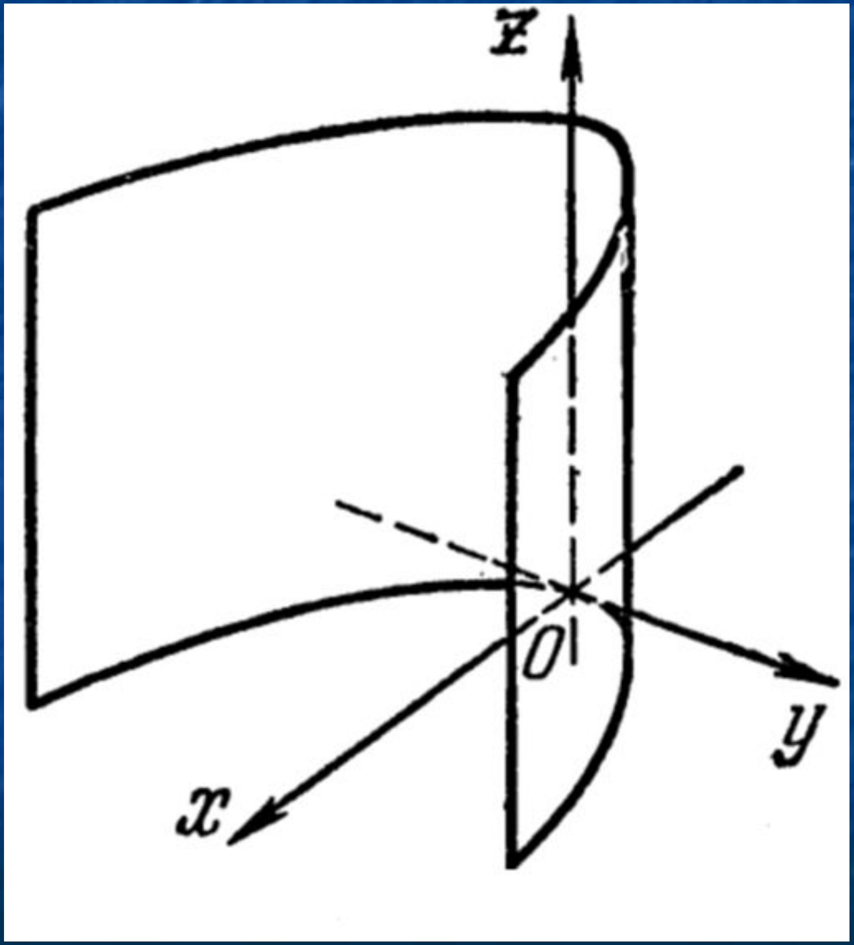
Каноническое уравнение гиперболического цилиндра имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Конус и цилиндры второго порядка

4. *Параболический цилиндр.*

Каноническое уравнение параболического цилиндра имеет вид: $y^2 = 2px$



Задачи

Определите вид цилиндрической поверхности F, найдите уравнение её направляющей γ, направление образующих и изобразите эту поверхность, если в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ поверхность F задана уравнением $2x^2+\frac{9}{2}z^2=18$

Решение: **Приведем уравнение поверхности F к каноническому виду :**

$$\frac{2x^2}{18}+\frac{9z^2}{36}=1;\ \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Следовательно, F – эллиптический цилиндр. Его направляющая γ задается

уравнением γ: $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$ **(Она лежит в плоскости *Oxz*), а образующие паралле**

координатному вектору . Поверхность F изображена на рисунке 1.

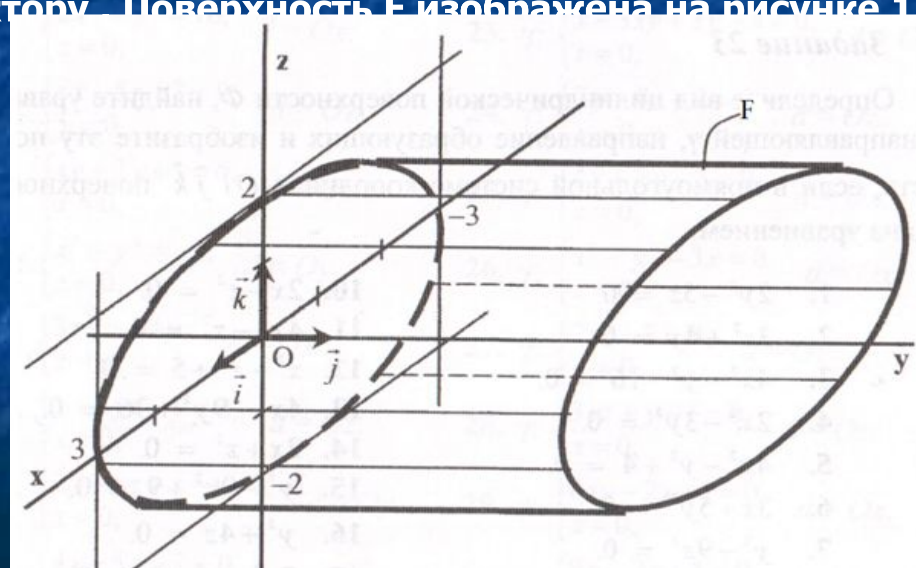


Рис. 1

Определите вид цилиндрической поверхности F, найдите уравнение её направляющей γ, направление образующих и изобразите эту поверхность, если в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ поверхность F задана уравнением F: $4x^2 - y^2 - 16 = 0$

Решение: Приведем уравнение поверхности F к каноническому виду $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Следовательно, F – гиперболический цилиндр. Его направляющая γ задается

уравнением γ: $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (Она лежит в плоскости *Oxy*). γ – гипербола с мнимой осью *Ox*.

Поверхность F изображена на рисунке 2.

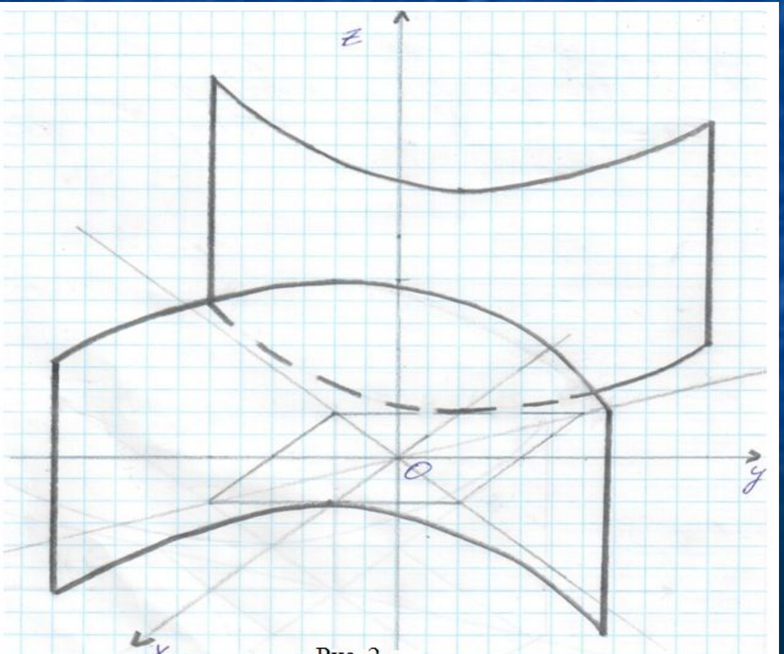


Рис. 2

3. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$ и $$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$$

Решение: $$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}=t$$ $$\begin{cases} x=3t+3 \\ y=-6t+4 \\ z=4t-2 \end{cases}$$

Полученную систему подставим в исходное уравнение.

$\frac{26}{9}t^2-\frac{26}{9}t+1=1$ или $t^2-t=0$ отсюда $t_1=0, t_2=1$ $\Rightarrow M_1(3;\ 4;\ -2), M_2(6;-2;\ 2)$.