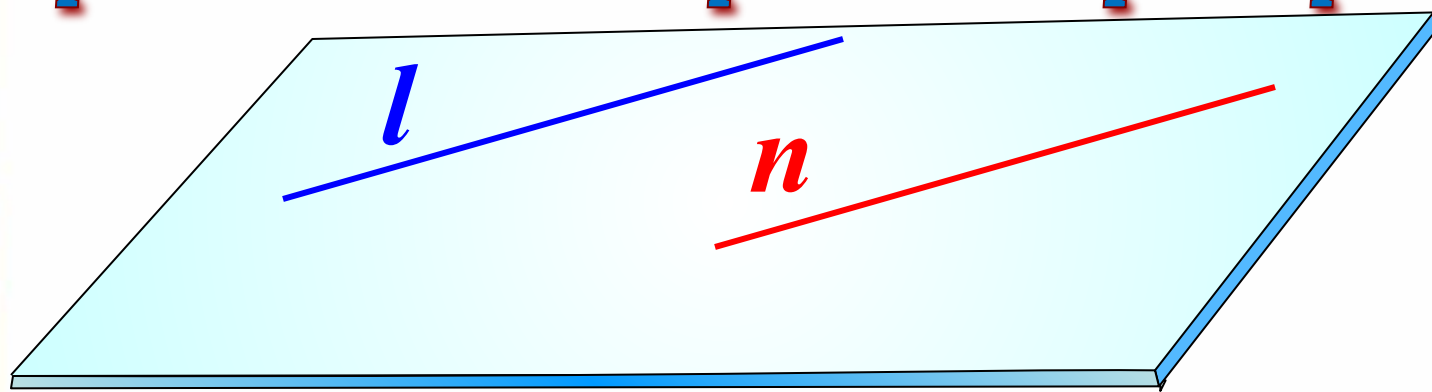


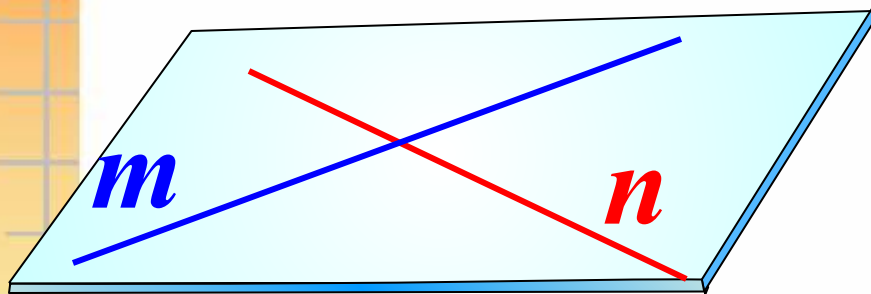


# Параллельность прямых в пространстве

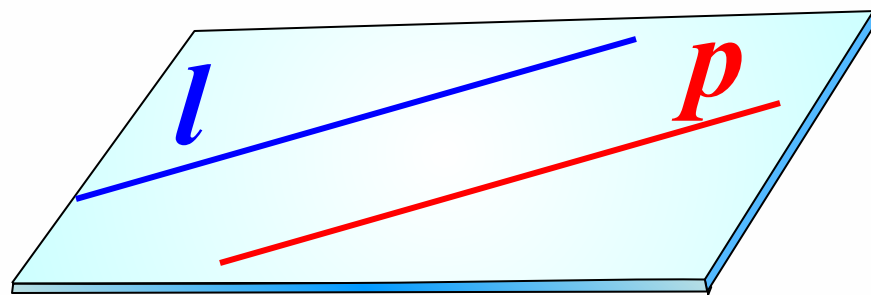




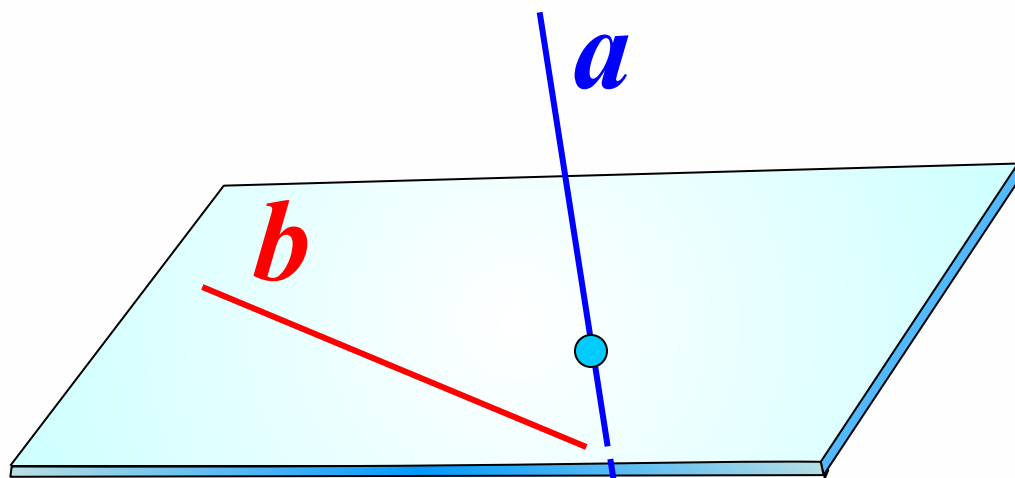
# четыре случая взаимного расположения прямых в пространстве



$$n \cap m$$



$$l \parallel p$$



$$a \perp b$$



## Планиметрия

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

**allb**

## Стереометрия

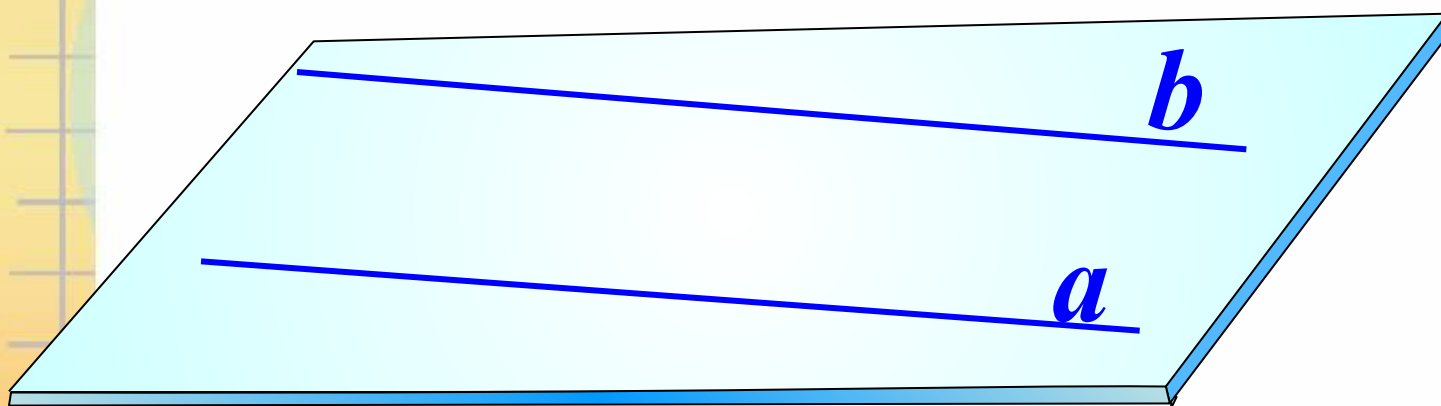
Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**allb**

## Определение

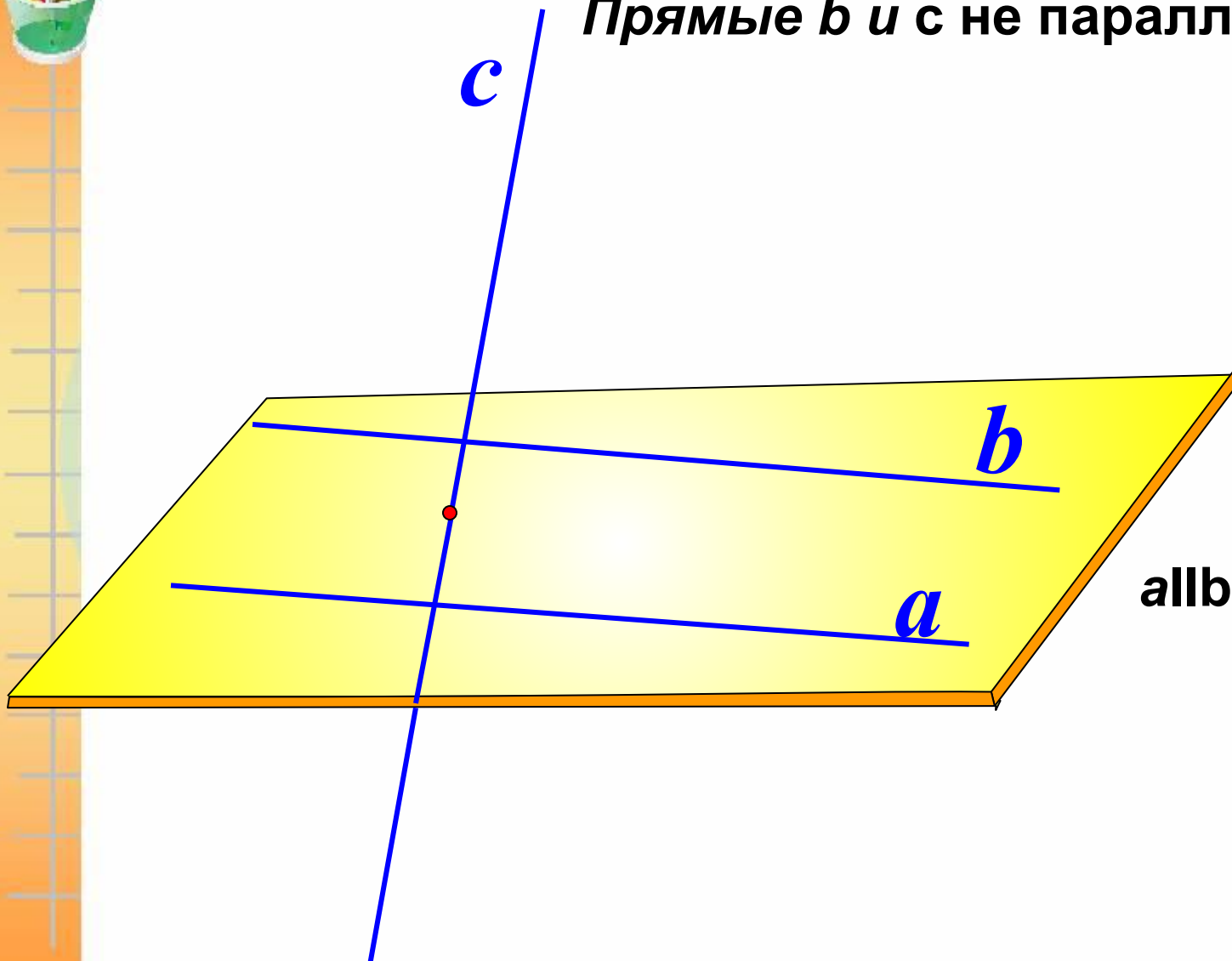
Две прямые в пространстве называются параллельными, если

- 1) они лежат в одной плоскости и
- 2) не пересекаются



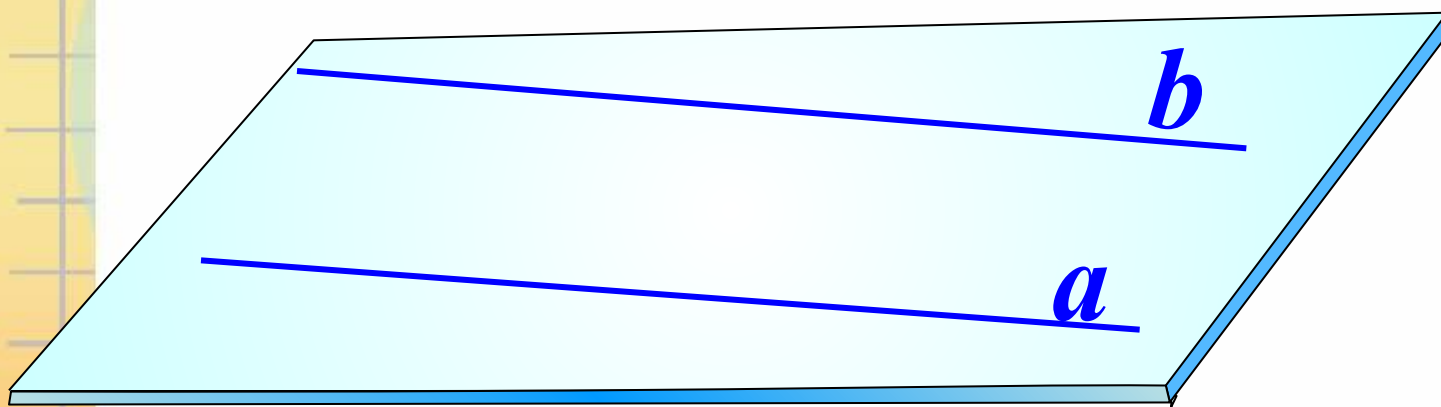
**Прямые  $a$  и  $c$  не параллельны**

**Прямые  $b$  и  $c$  не параллельны**





Две параллельные прямые определяют плоскость.  
(определение параллельных прямых)



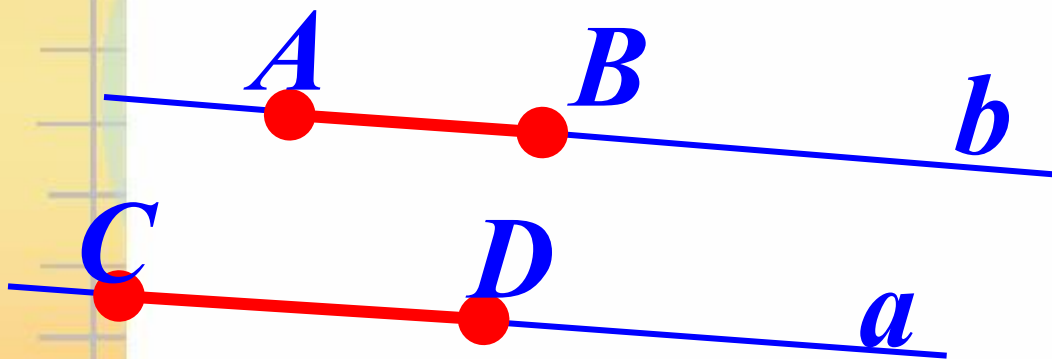
Показать (1)



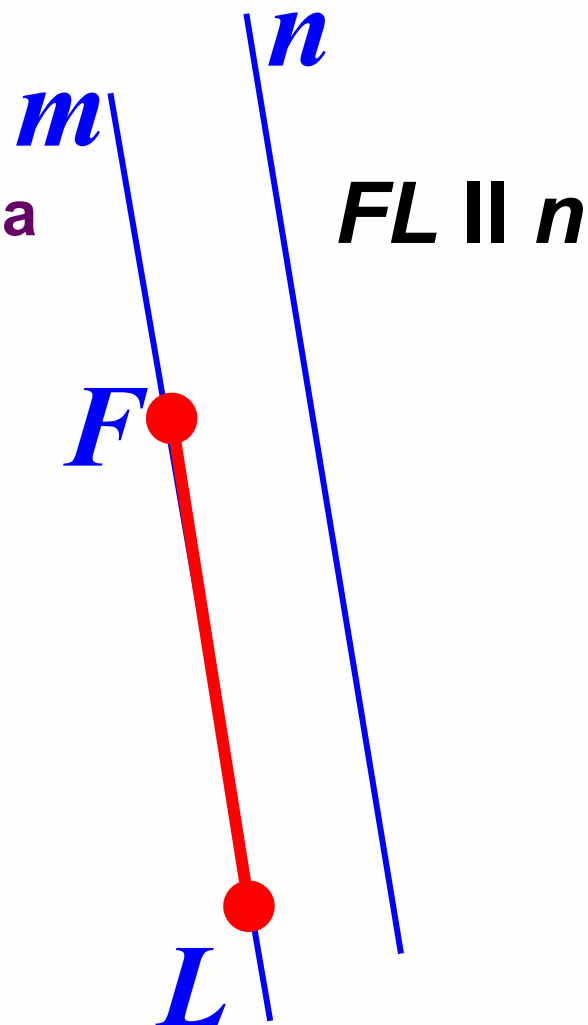
## Определение

Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

$AB \parallel CD$



Отрезки  $AB$  и  $CD$   
параллельны

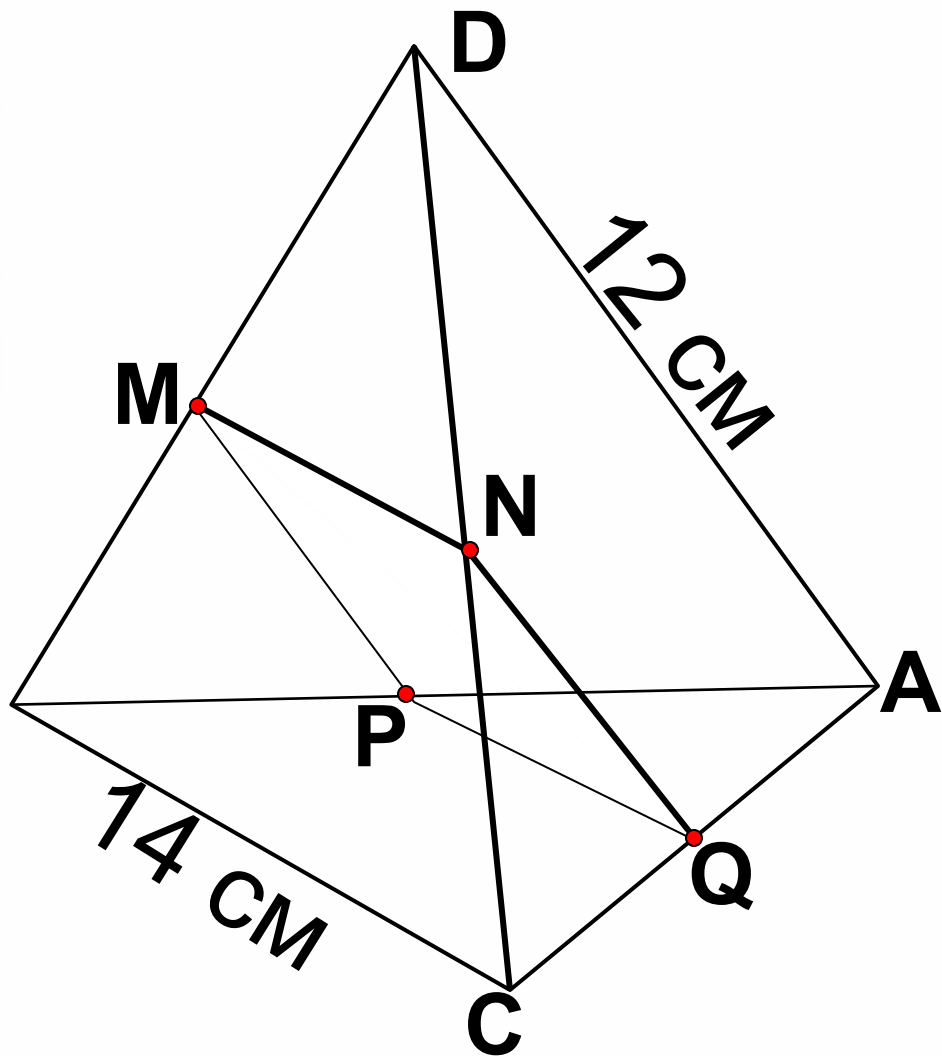


Отрезок  $FL$  параллелен  
прямой  $n$



**Задача:** Точки M, N, P и Q – середины отрезков BD, CD, AB и AC.

$P_{MNQP} - ?$

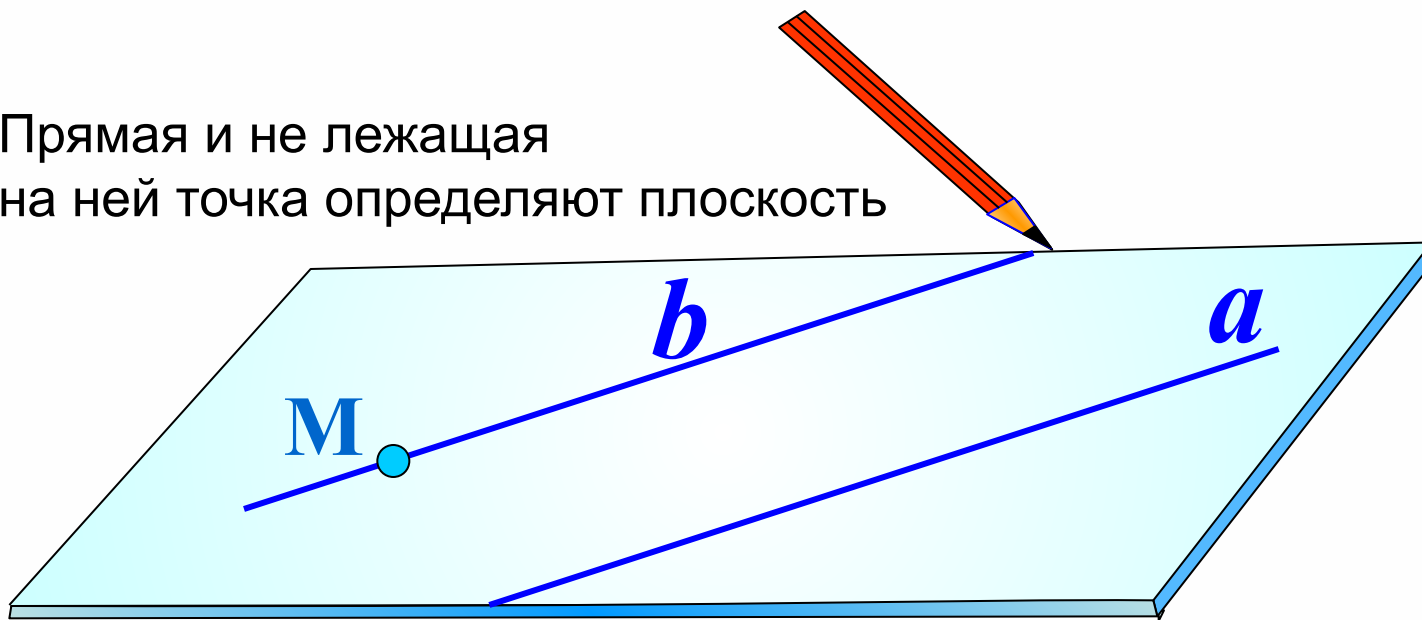




## Теорема

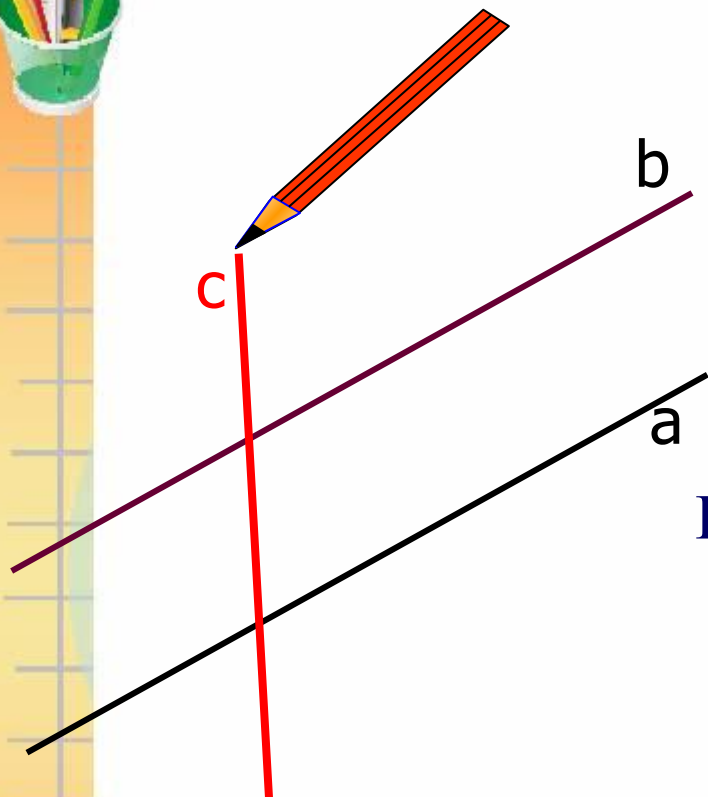
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Прямая и не лежащая на ней точка определяют плоскость



Повторим.

Следствие из аксиомы параллельности.



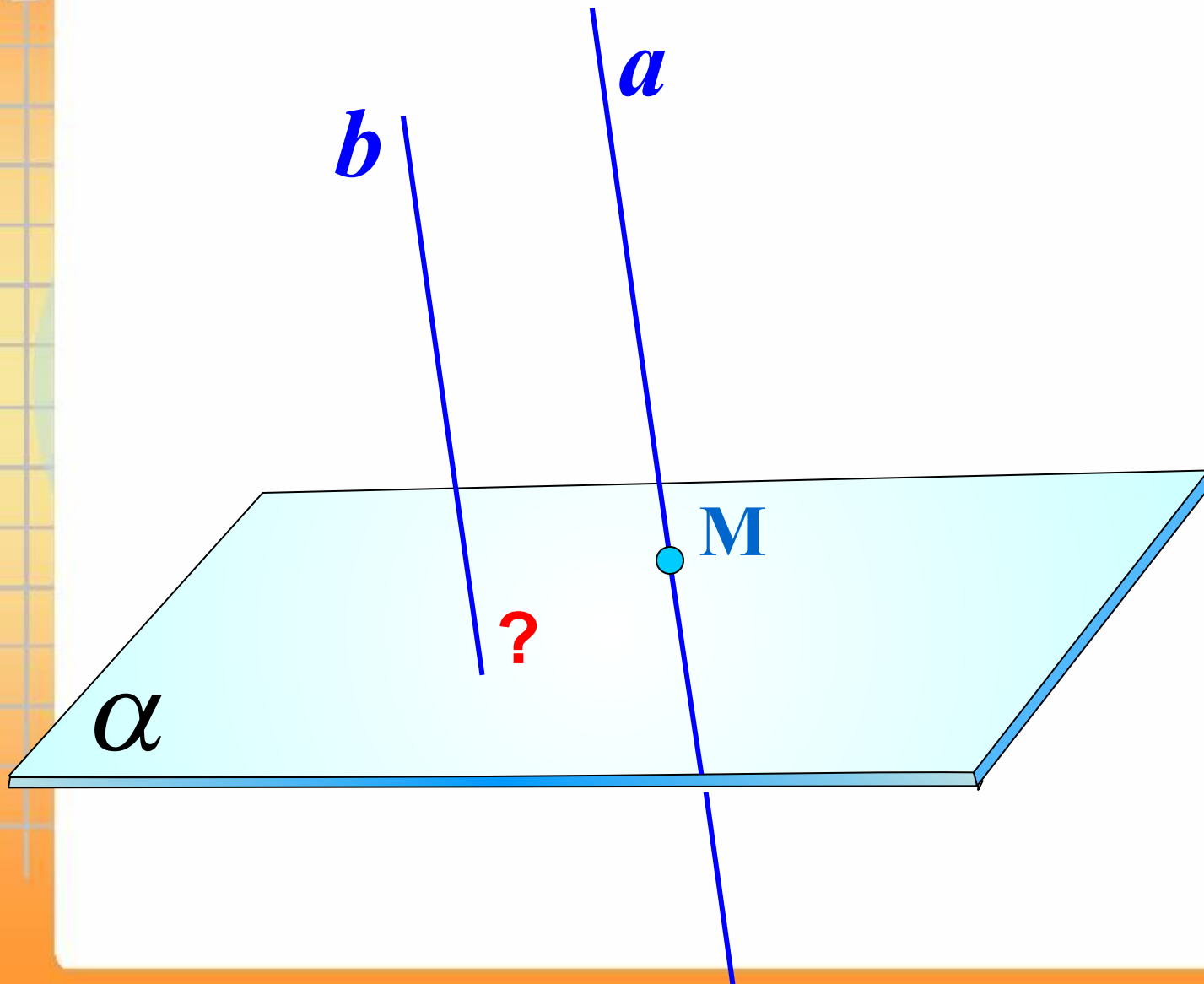
Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

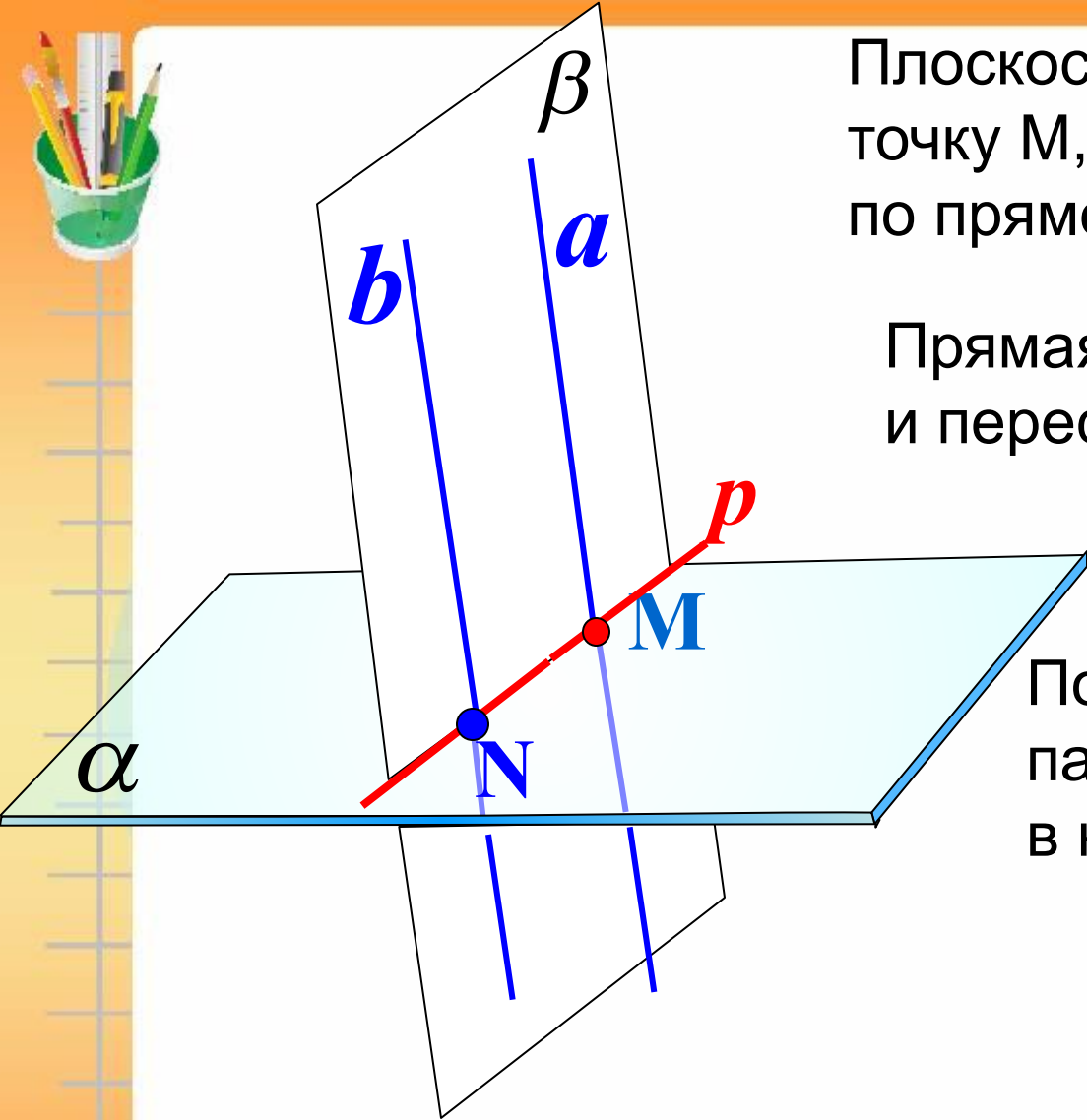
$$a \parallel b, c \cap b \implies c \cap a$$

Это следствие из аксиомы параллельности поможет доказать лемму о параллельных прямых

## Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает данную плоскость.





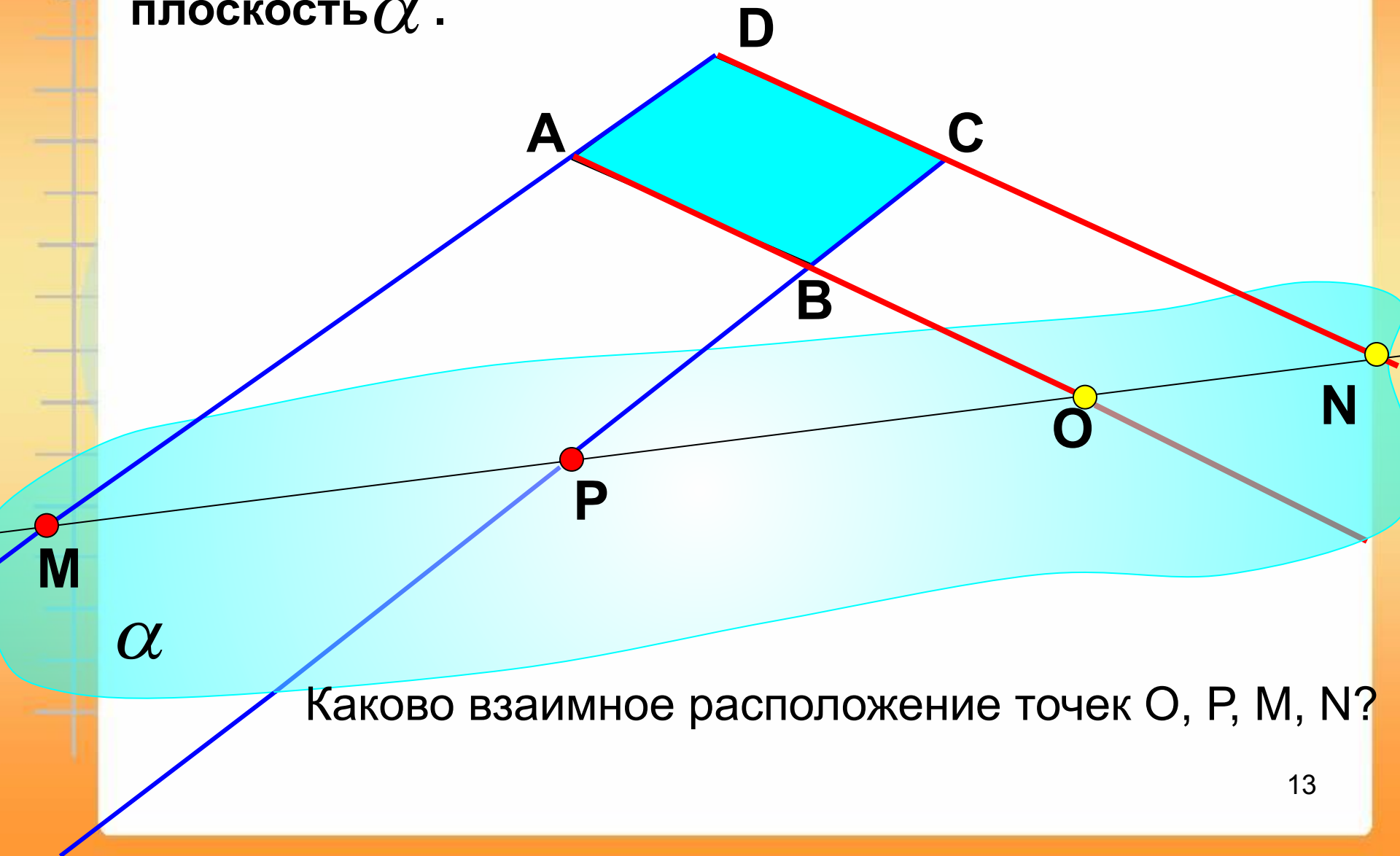
Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $M$ , значит они пересекаются по прямой ( $A_3$ )

Прямая  $r$  лежит в плоскости  $\beta$  и пересекает прямую  $a$  в т.  $M$ .

Поэтому она пересекает и параллельную ей прямую  $b$  в некоторой точке  $N$ .

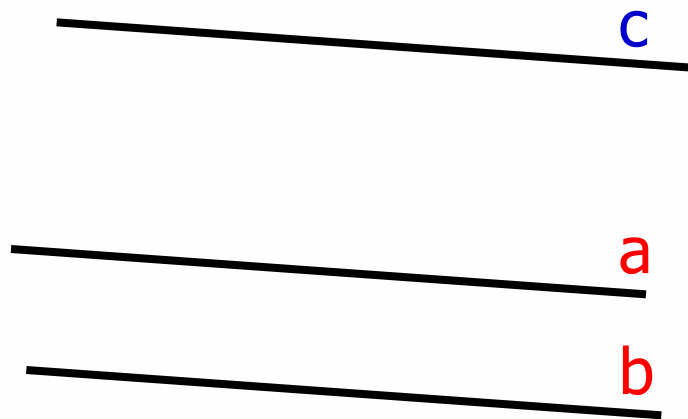
Прямая  $r$  лежит также в плоскости  $\alpha$ , поэтому  $N$  – точка плоскости  $\alpha$ .  
Значит,  $N$  – общая точка прямой  $b$  и плоскости  $\alpha$ .

**Задача:** Прямые, содержащие стороны  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  пересекают плоскость  $\alpha$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $DC$  также пересекают плоскость  $\alpha$ .



Каково взаимное расположение точек  $O$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $N$ ?

Повторим. Следствие из аксиомы параллельности.



Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$$

Аналогичное утверждение имеет место и для трех прямых в пространстве.



## Теорема

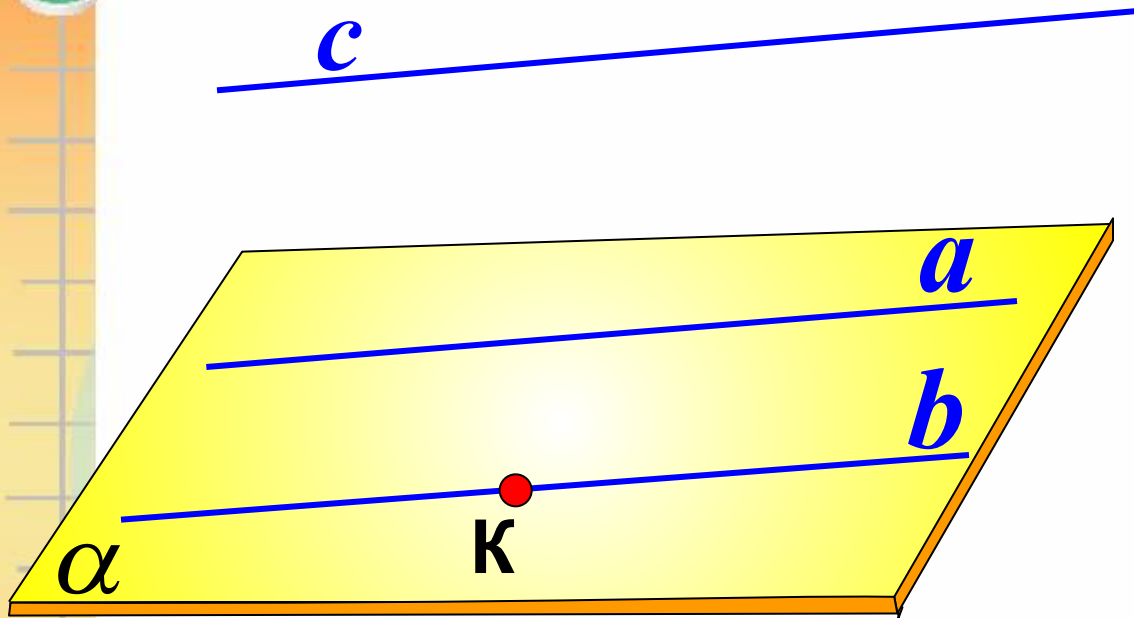
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

$a \parallel c, b \parallel c$

Докажем, что  $a \parallel b$

Докажем, что  $a$  и  $b$

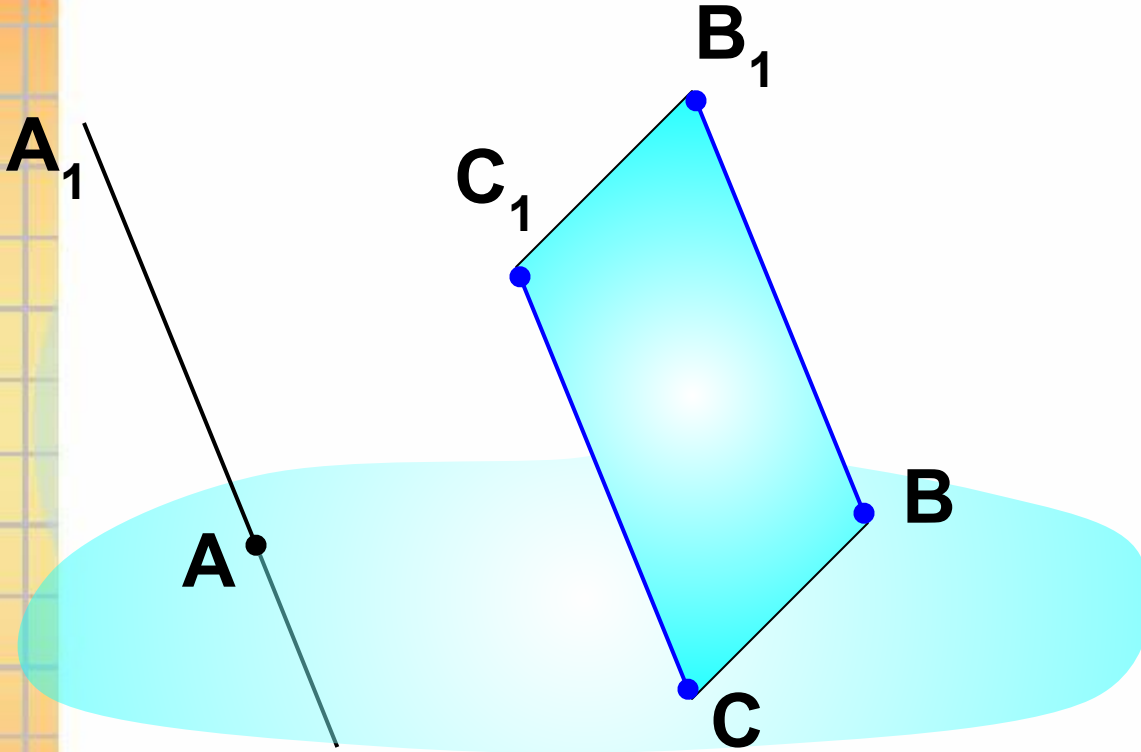
- 1) Лежат в одной плоскости
- 2) не пересекаются





**Задача:** Дано:  $AA_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $BB_1 = CC_1$

Доказать, что  $B_1C_1 = BC$

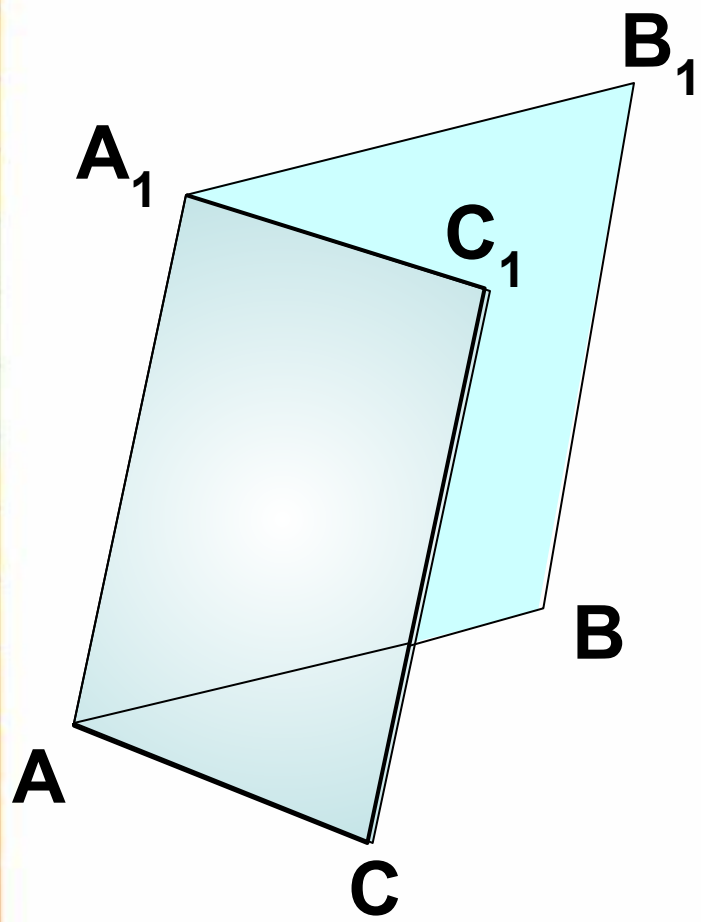






**Задача:** Дано:  $A_1C_1 = AC$ ,  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $A_1B_1 = AB$ ,  
 $A_1B_1 \parallel AB$

Доказать, что  $CC_1 = BB_1$

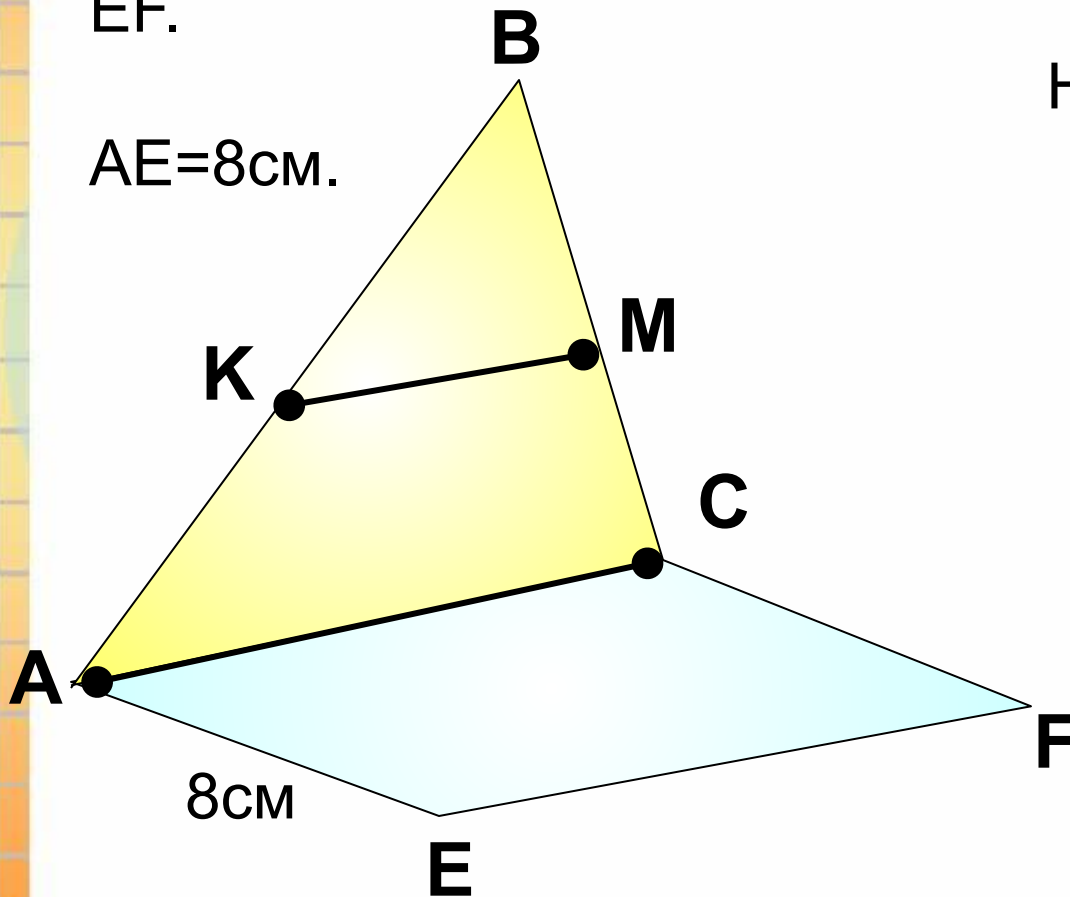




**Задача:** Треугольник  $ABC$  и квадрат  $AEFC$  не лежат в одной плоскости. Точки  $K$  и  $M$  – середины отрезков  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что  $KM \parallel EF$ .

Найдите  $KM$ , если

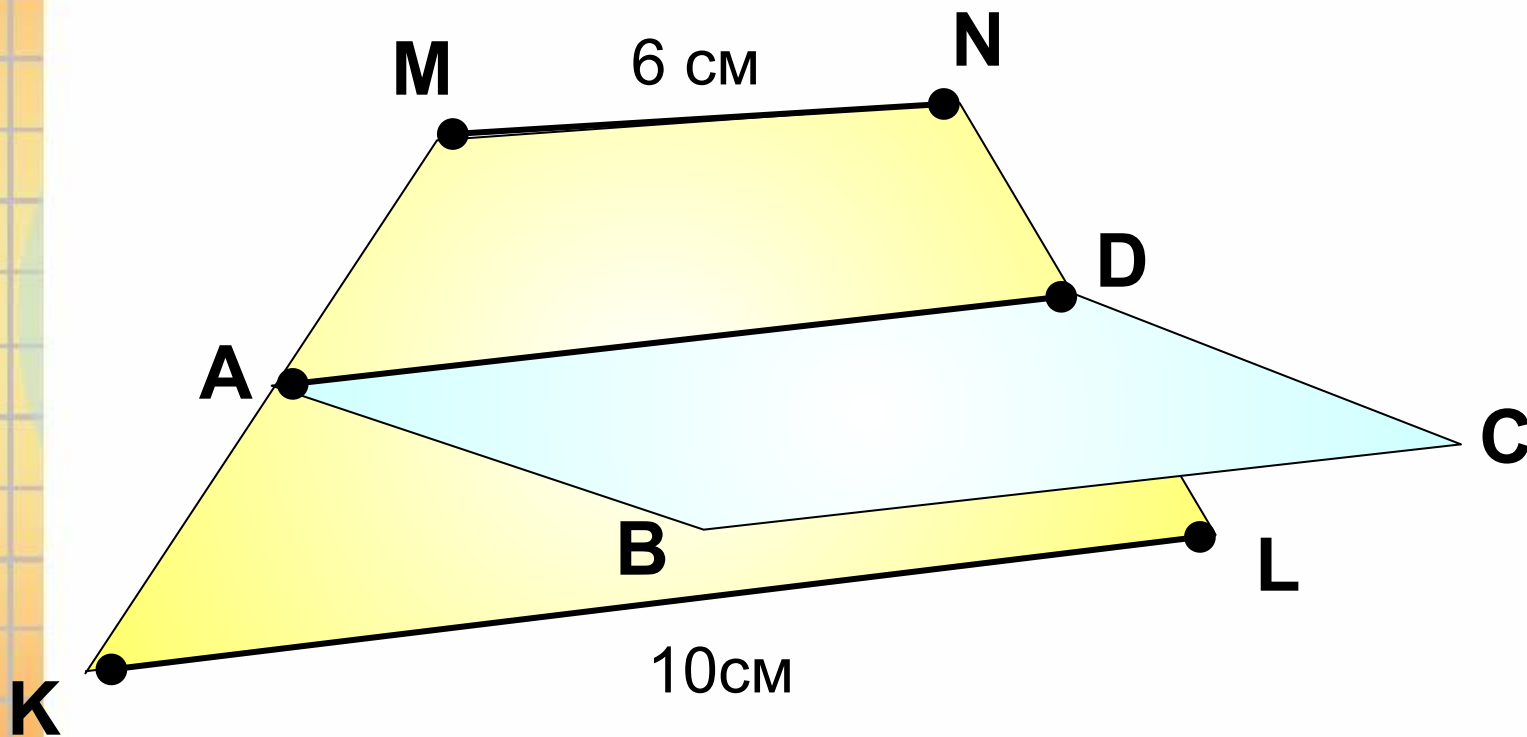
$AE = 8\text{ см.}$





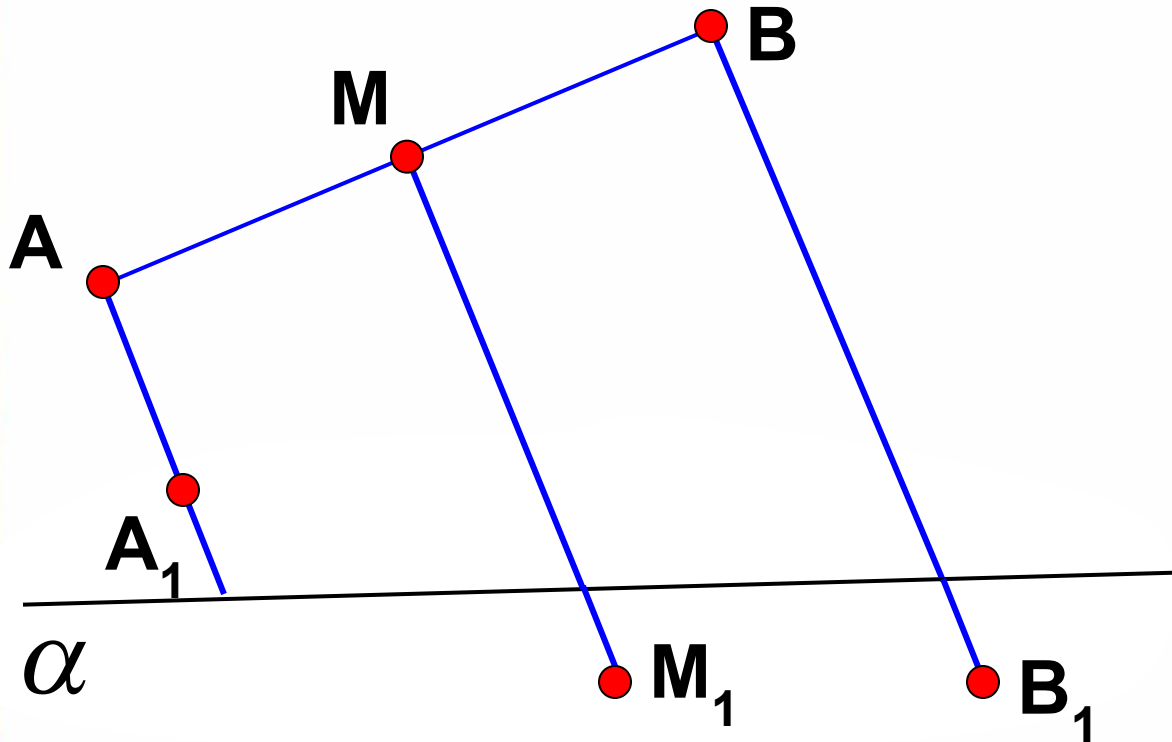
**Задача:** Квадрат  $ABCD$  и трапеция  $KMNL$  не лежат в одной плоскости. Точки  $A$  и  $D$  – середины отрезков  $KM$  и  $NL$  соответственно. Докажите, что  $KL \parallel BC$ .

Найдите  $BC$ , если  $KL=10$  см,  $MN=6$  см.





**Задача:** Отрезок  $AB$  не пересекается с плоскостью  $\alpha$ . Через концы отрезка  $AB$  и его середину (точку  $M$ ) проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$ . а) Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$  лежат на одной прямой. б) Найдите  $AA_1$ , если  $BB_1 = 12\text{см}$ ,  $MM_1 = 8\text{см}$ .





## Дома:

- 1). П.4,п.5, выучить определения, теоремы, знать их доказательства
- 2). №18, №21