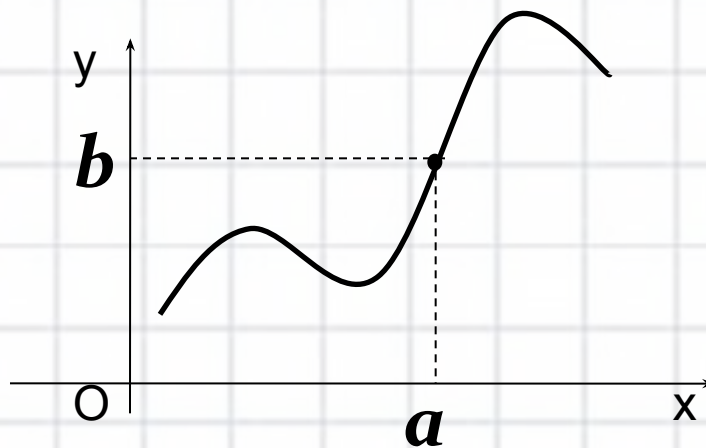


***Понятие предела
функции***

Предел функции в точке

- Пусть даны две переменные величины X и Y , связанные функциональной зависимостью $Y = f(X)$ которая определена в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, самой точки a .



Определение:

- Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a , если для всех значений x , достаточно близких к a и отличных от a , значение функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от b .

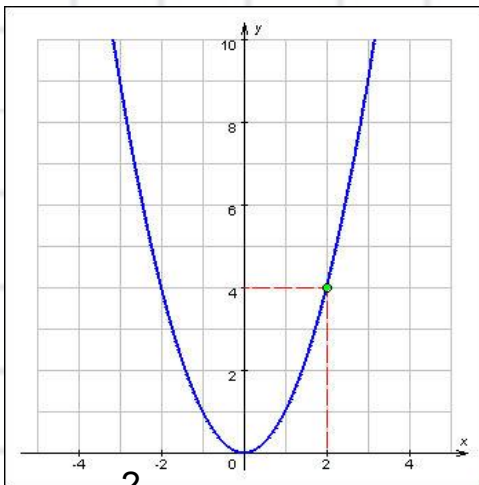
Обозначается предел:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

- Все основные элементарные функции:
постоянные, степенная функция (x^α),
показательная функция (a^x),
тригонометрические функции
($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$) и обратные
тригонометрические функции
($\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$) во всех
внутренних точках своих областей
определения имеют пределы,
совпадающие с их значениями в этих
точках.

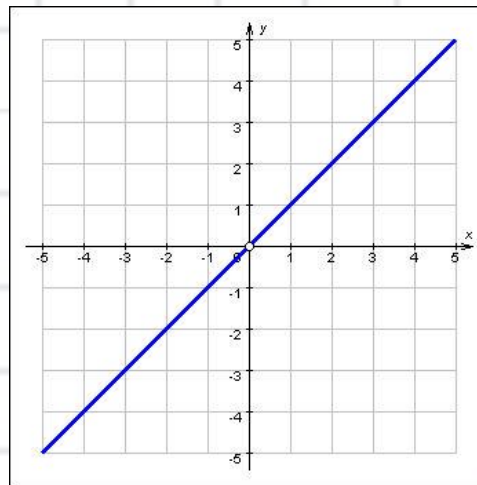
Примеры функций, имеющих предел в точке



$$y = x^2$$

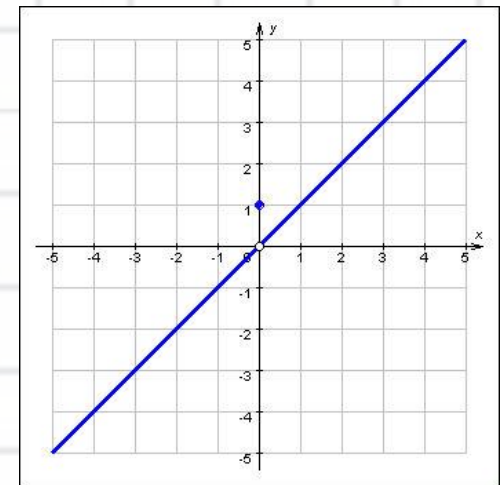
$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Предел функции
при $x \rightarrow 2$ равен 4
(при $x \rightarrow 2$ значения
функции $\rightarrow 4$).



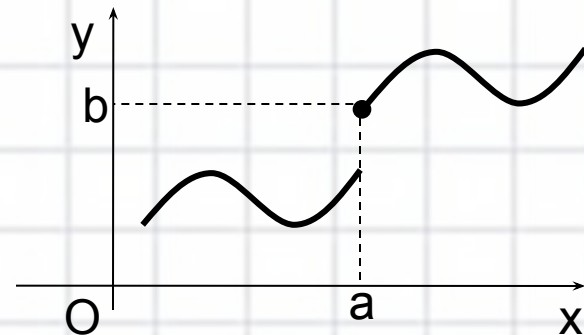
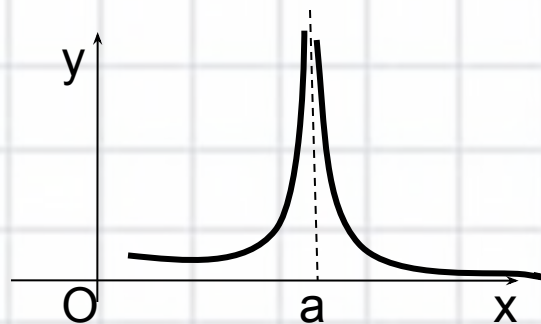
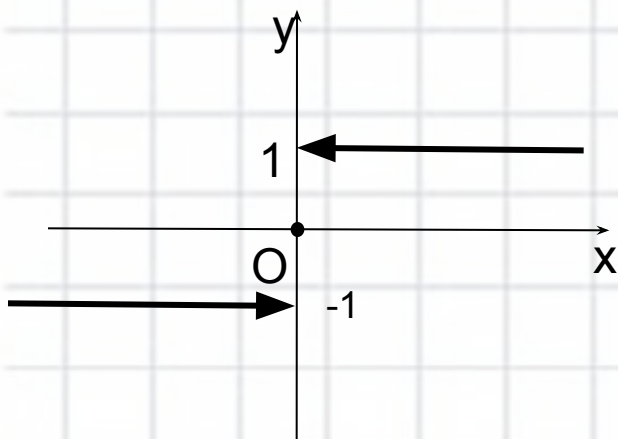
$$y = \frac{x^2}{x}$$

Предел функций при $x \rightarrow 0$ равен 0.



$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Примеры функций, не имеющих предел в точке



Свойства предела функции

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a ,
причем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

То

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B},$$

если $B \neq 0$ и если $g(x) \neq 0$ в окрестности точки a .

Примеры вычисления предела функции в точке:

Сначала просто пытаемся подставить число, к которому стремится x в функцию

1. Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$$

2. Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4}.$$

Предел числителя $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$

Предел знаменателя $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4) = 9 - 3 + 4 = 10$

Используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

3. Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3}.$$

Предел числителя $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя.

Величина $\frac{2}{x - 3}$ является бесконечно большой величиной

при $x \rightarrow 3$.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3} = \infty.$$

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с выражениями вида,

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^\infty), (0 \cdot \infty), (0^0)(\infty^0).$$

которые называются неопределенностями

- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

4. **Пример:** Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$

Сначала попробуем подставить **-1** в дробь: $\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*)$$

Очевидно, что числитель и знаменатель можно сократить на $(x + 1)$, получим:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем **-1** в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

5. **Пример:** Найти предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Сначала пробуем подставить **3** в выражение под знаком предела **это первое**, что нужно выполнять для **ЛЮБОГО** предела.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*) \text{ Получена неопределенность вида } \left(\frac{0}{0} \right), \text{ которую нужно устранять}$$

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - 10x + 21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x + 27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

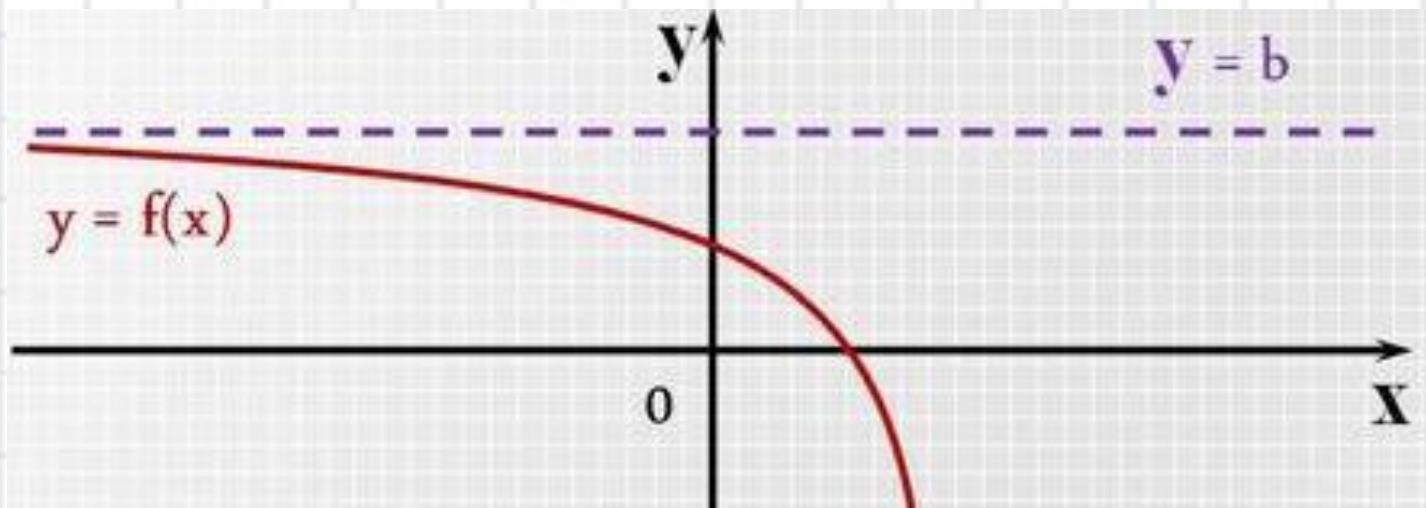
$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Предел функции на бесконечности

- **Определение:** Число b называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности (или при $x \rightarrow \infty$), если для всех достаточно больших по модулю значений x , соответствующее значение функции сколь угодно мало отличается от b .

Обозначение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$



СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

- $0 + C = C$
- $\infty + C = \infty$
- $0 \cdot C = 0$
- $\infty \cdot C = \infty$
- $\frac{0}{C} = 0$
- $\frac{\infty}{C} = \infty$
- $\frac{C}{1} = \infty$

1. Пример $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$

- Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.
- Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{1 \rightarrow 0}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

- Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^4$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7^{\rightarrow 0}}{x} + \frac{15^{\rightarrow 0}}{x^2} + \frac{9^{\rightarrow 0}}{x^3} + \frac{1^{\rightarrow 0}}{x^4}}{5 + \frac{6^{\rightarrow 0}}{x^2} - \frac{3^{\rightarrow 0}}{x^3} - \frac{4^{\rightarrow 0}}{x^4}} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0$$

- Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Замечательные пределы

- первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

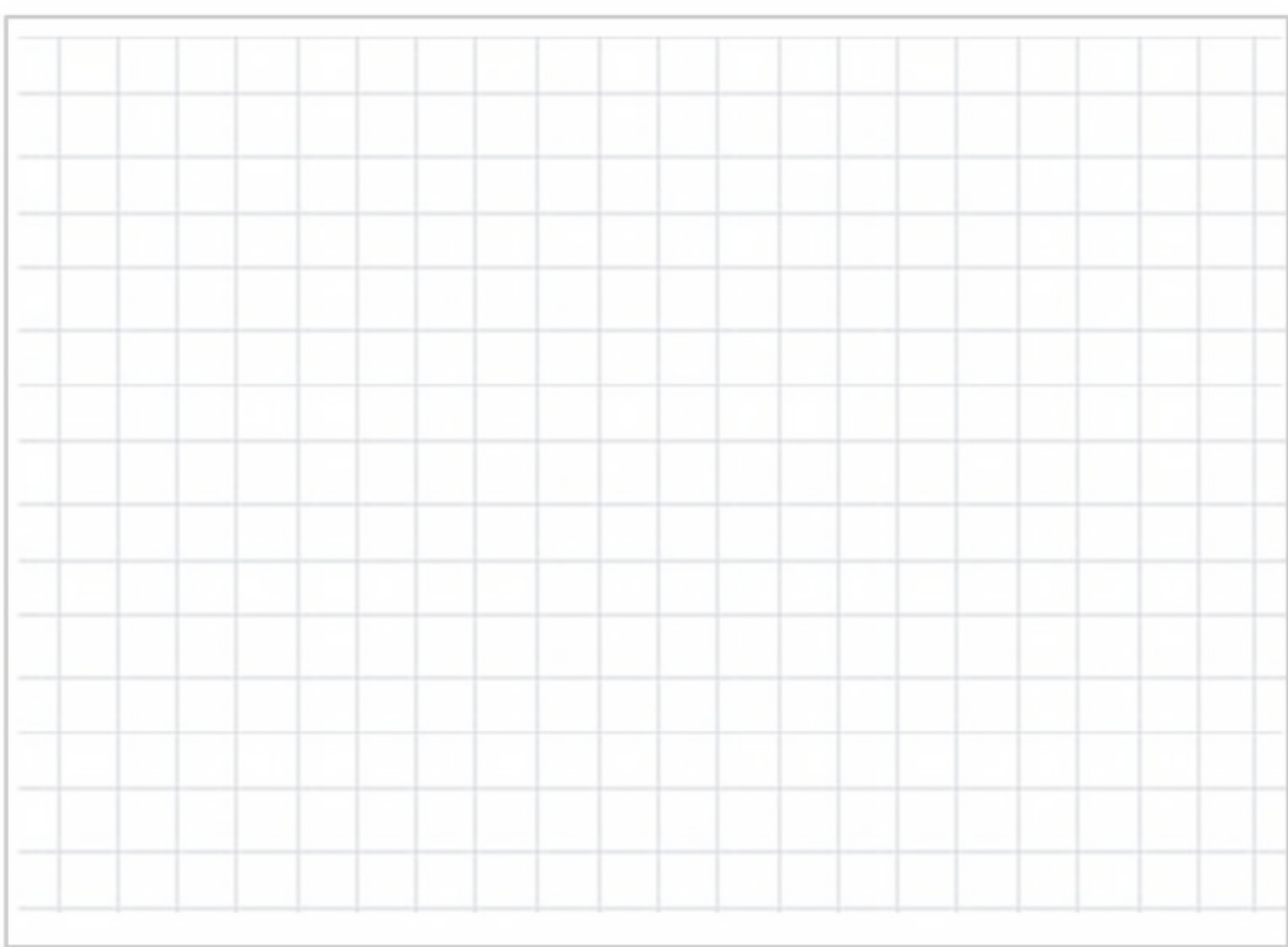
Примеры

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} =$$

$$= 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\frac{4}{3}}$$

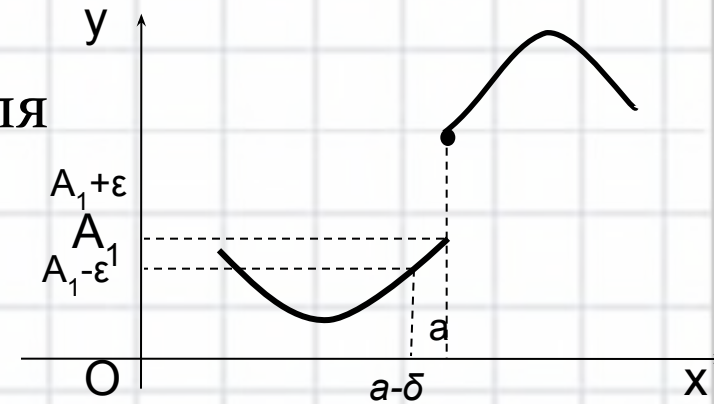


Односторонние пределы

Предел функции слева

- Число A_1 называется **пределом функции $f(x)$ слева** в точке a , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a - \delta; a)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon.$$



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$$

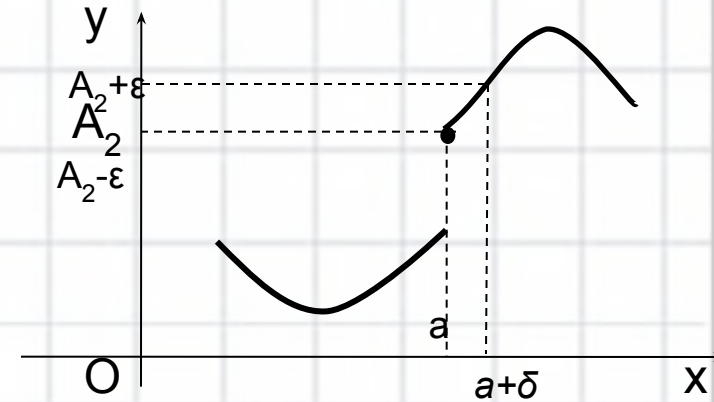
- При x приближающихся к a слева, значения функции стремятся к A_1

Предел функции справа

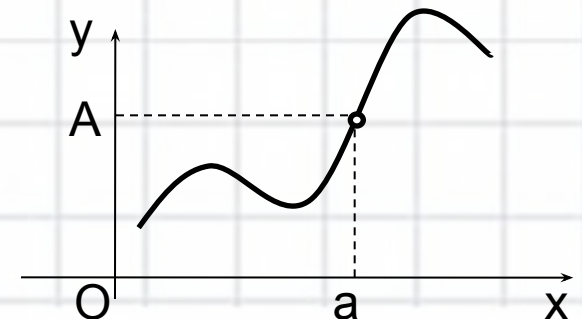
- Число A_2 называется **пределом функции $f(x)$ справа** в точке a , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

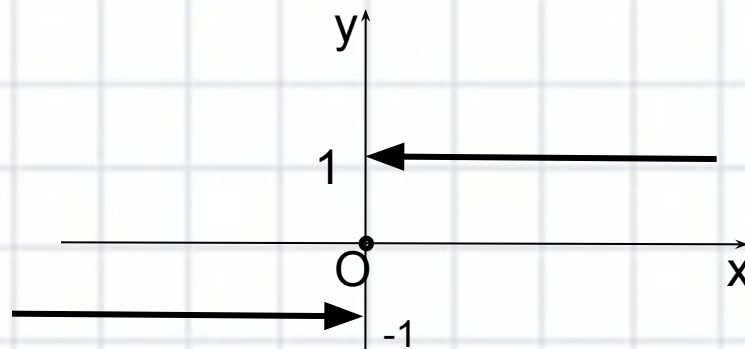
- При x приближающихся к a справа, значения функции стремятся к A_2
- Функция, определённая в некоторой окрестности точки, имеет предел в точке, если её предел справа равен пределу слева.



$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$$



$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} y = 1$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$$

