Основные понятия метрологии

Средством измерений (СИ) именуется техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины, размер которой принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени.

Погрешность СИ – разность между показанием СИ и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

Точность измерений — одна из характеристик качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности результата измерения. Это означает, что высокая точность измерений соответствует малым погрешностям, и наоборот. Количественно точность может быть выражена обратной величиной модуля относительной погрешности.

Воспроизводимостью (результатов) измерений считается близость результатов измерений одной и той же величины, полученных в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время, но приведенных к одним и тем же условиям измерений.

Сходимостью (результатов) измерений считается близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

Основные понятия метрологии

Единством измерений именуется их состояние, характеризующееся тем, что их результаты выражаются в узаконенных единицах, размеры которых в установленных пределах равны размерам единиц, воспроизводимых первичными эталонами, а погрешности результатов измерении известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные пределы.

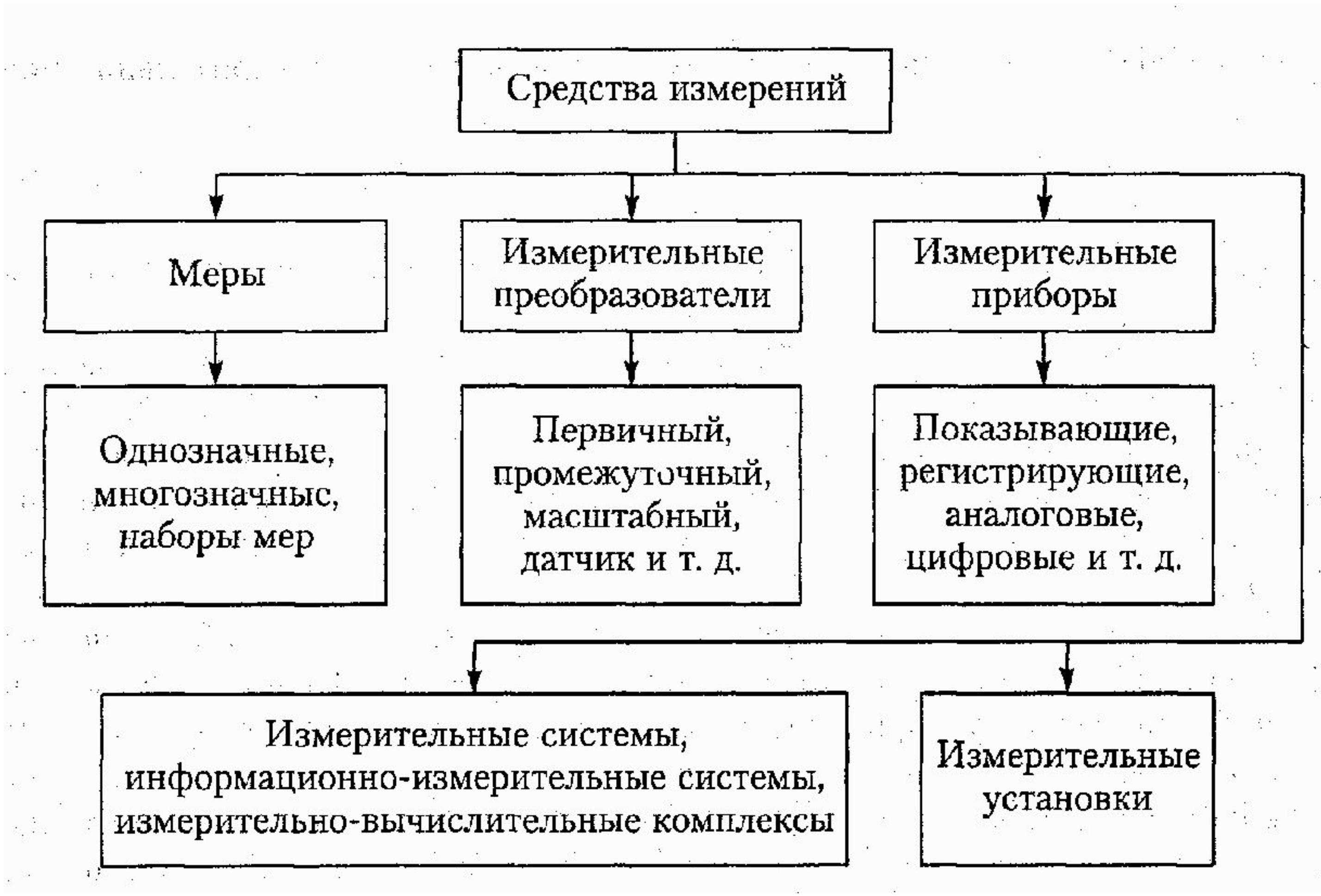
Диапазон измерений СИ – область возможных значений измеряемой величины для данного СИ.

Градуировка средства измерений представляет собой определение зависимости между значениями величин на выходе и входе СИ, составленной в виде таблицы, графика или формулы.

Поверкой средств измерений называется установление органом государственной метрологической службы (или другим официально уполномоченным органом, организацией) пригодности СИ к применению на основании экспериментально определяемых метрологических характеристик и подтверждения их соответствия установленным обязательным требованиям.

Калибровка СИ — это совокупность операций, устанавливающих соотношение между значением величины, полученным с помощью данного СИ, и соответствующим значением величины, полученным с помощью эталона, с целью определения действительных метрологических характеристик этого СИ.

Классификация средств измерения



Мера - средство измерений, предназначенное для воспроизведения и/или хранения физической величины одного или нескольких размеров, значения которых выражены в установленных единицах и известны с необходимой точностью.

Измерительный преобразователь - это средство измерений, предназначенное для преобразования сигналов измерительной информации в форму, удобную для дальнейшего преобразования, передачи, обработки, хранения

Измерительный прибор - это средство измерений, предназначенное для получения значений измеряемой физической величины в установленном диапазоне ее измерения и выработки сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия наблюдателем

Погрешности измерений

Результат измерения - значение величины, полученное путем ее измерения. Результат измерения представляет собой приближенную оценку истинного значения величины.

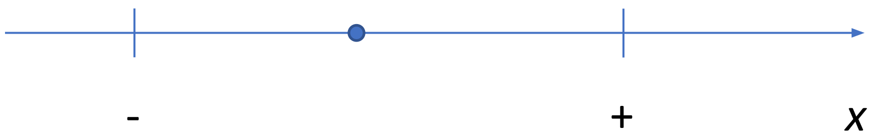
Погрешность результата измерения – разница между результатом измерения *X* и истинным (действительным) значением *Q* измеряемой физической величины

$\Delta = X - Q$ – абсолютная погрешность выражена в единицах измеряемой величины

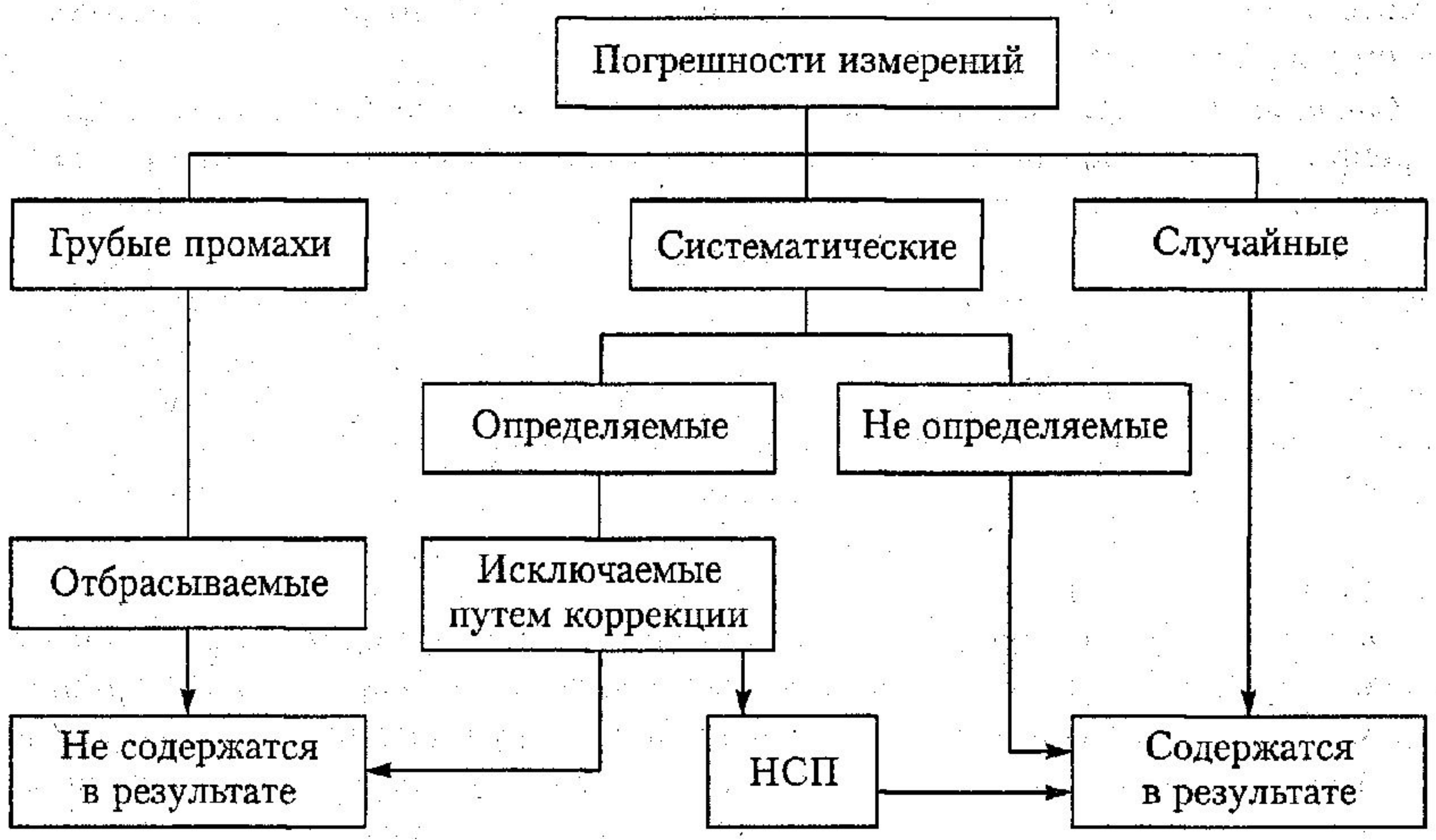
$\delta = \Delta / Q \cong \Delta / X$ – относительная погрешность

Возможные задачи:

1. Найти границы интервала (доверительного), в котором истинное значение измеряемой величины будет находится с заданной (доверительной) вероятностью
2. Выбрать метод и СИ, при которых погрешность измерения не выйдет за пределы заданных границ с заданной (доверительной) вероятностью



Классификация погрешностей измерений



Грубые погрешности (промахи) – это такие погрешности, которые при исправных средствах измерений и корректных действиях экспериментатора (оператора) не должны появляться

Систематическая погрешность – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной для данного ряда измерений или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях физической величины постоянного размера

Систематические погрешности

Методические погрешности – погрешности, обусловленные несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики

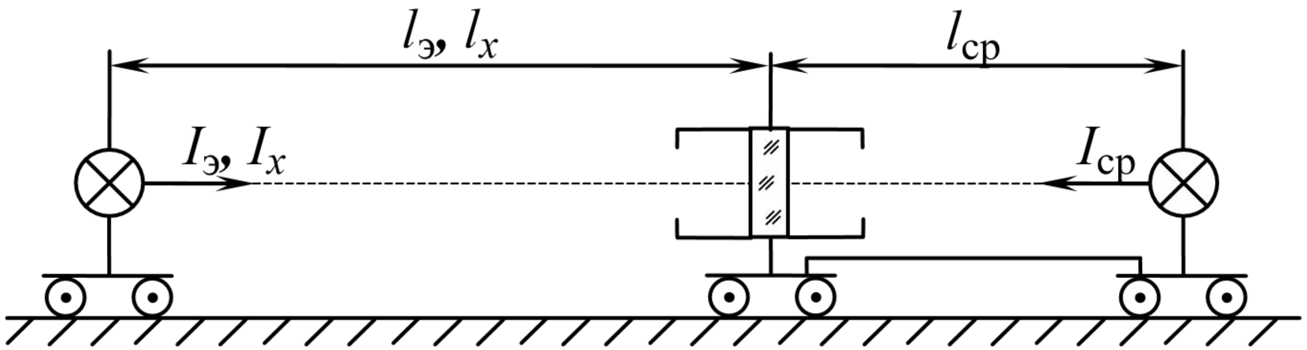
$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt} \qquad E_e = \frac{d\Phi_e}{dA} \qquad L = \frac{d\Phi}{dA_\perp d\omega} \qquad Y = \frac{dX}{dP} \qquad Y \cong \frac{\Delta X}{\Delta P}$$

Инструментальные (приборные) погрешности — погрешности, которые определяются погрешностями применяемых СИ и вызываются несовершенством принципа действия, неточностью градуировки шкалы, изменением свойств СИ в процессе хранения и эксплуатации и т. п.

Погрешности, связанные с **неправильной установкой элементов измерительных схем**, например, неточной юстировкой

Систематические погрешности

Некоторые способы уменьшения инструментальной погрешности
Метод замещения



1 $$L_э = L_{ср} \qquad \frac{E_э \beta_1}{\pi} = \frac{E_{ср} \beta_2}{\pi}$$

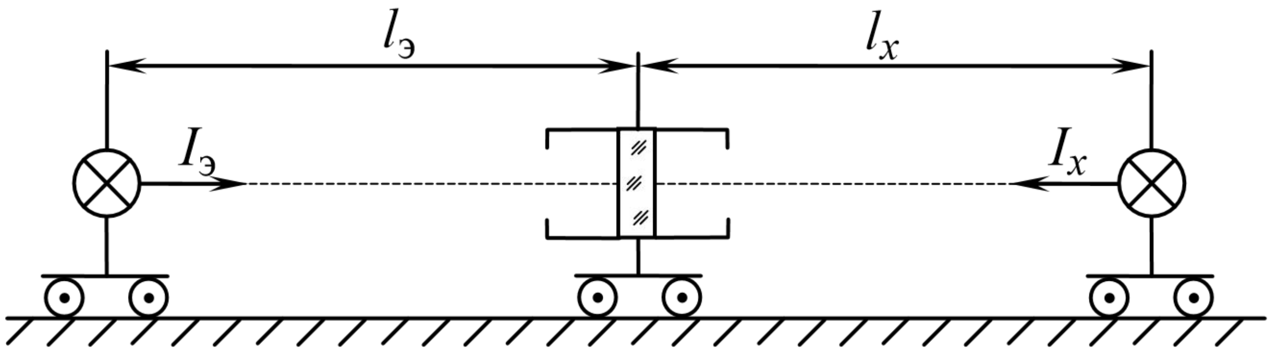
$$\frac{I_э \beta_1 \cos \varepsilon_э}{l_э^2} = \frac{I_{ср} \beta_2 \cos \varepsilon_{ср}}{l_{ср}^2} \qquad l_{ср} = \mathrm{const}$$

2 $$L_x = L_{ср} \qquad \frac{I_x \beta_1 \cos \varepsilon_x}{l_x^2} = \frac{I_{ср} \beta_2 \cos \varepsilon_{ср}}{l_{ср}^2}$$

3 $$I_x = I_э \frac{l_x^2 \cos \varepsilon_э}{l_э^2 \cos \varepsilon_x}$$

Систематические погрешности

Некоторые способы уменьшения инструментальной погрешности
Метод противопоставления (перестановки)



1 Рабочий эталон слева

$$I_{x1} = I_э \frac{l_{x1}^2 \beta_{лев} \cos \varepsilon_{лев}}{l_{э1}^2 \beta_{пр} \cos \varepsilon_{пр}}$$

2 Рабочий эталон справа

$$I_{x2} = I_э \frac{l_{x2}^2 \beta_{пр} \cos \varepsilon_{пр}}{l_{э2}^2 \beta_{лев} \cos \varepsilon_{лев}}$$

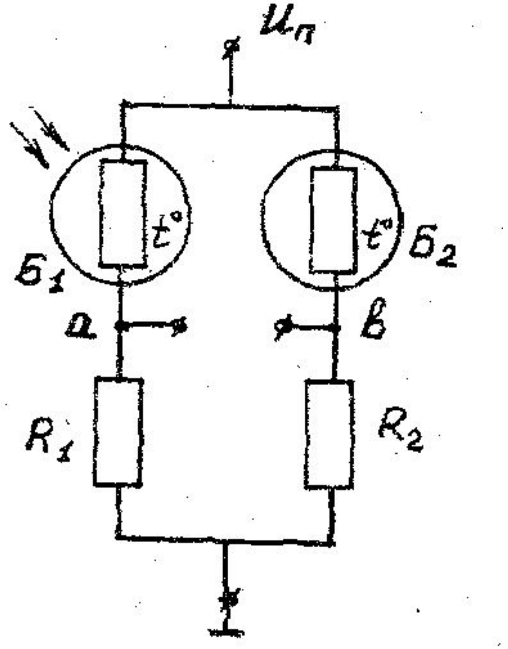
3

$$I_x = \sqrt{I_{x1} I_{x2}} = I_э \frac{l_{x1} l_{x2}}{l_{э1} l_{э2}}$$

Систематические погрешности

Погрешности за счет влияния внешних факторов обусловлены чувствительностью СИ к различным воздействиям, которые влияют на результаты измерений:

- посторонняя засветка;
- внешнее электромагнитное поле;
- влажность;
- изменение температуры СИ за счет температуры воздуха и источников теплового излучения (борьба – термостабилизация, термокомпенсация);
- радиация, вибрации и т. п.



Случайные погрешности

Случайная погрешность – составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений физической величины постоянного размера, проведенных с одинаковой тщательностью в одинаковых условиях

Некоторые возможные причины, вызывающие случайные погрешности:

- нестабильность выходных токов или напряжений стабилизированных источников питания, к которым подключены источники и приемники излучения;
- случайные погрешности СИ электрических величин;
- погрешности округления показаний СИ;
- конвекционные потоки вблизи нагретых источников излучения;
- флуктуации сигнала приемников излучения (темновой ток);
- погрешности вносимые органом зрения (в визуальной фотометрии).

Дискретные случайные величины

Случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить, называются прерывными, или **дискретными** случайными величинами.

Пример. При помощи цифрового люксметра с дискретностью отсчета 1 лк получены десять значений: 26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25 лк

Значение E_k, лк	23	24	25	26	27	28
Число реализаций n_k	1	3	2	3	0	1
	0,1	0,3	0,2	0,3	0	0,1

Среднее арифметическое значение

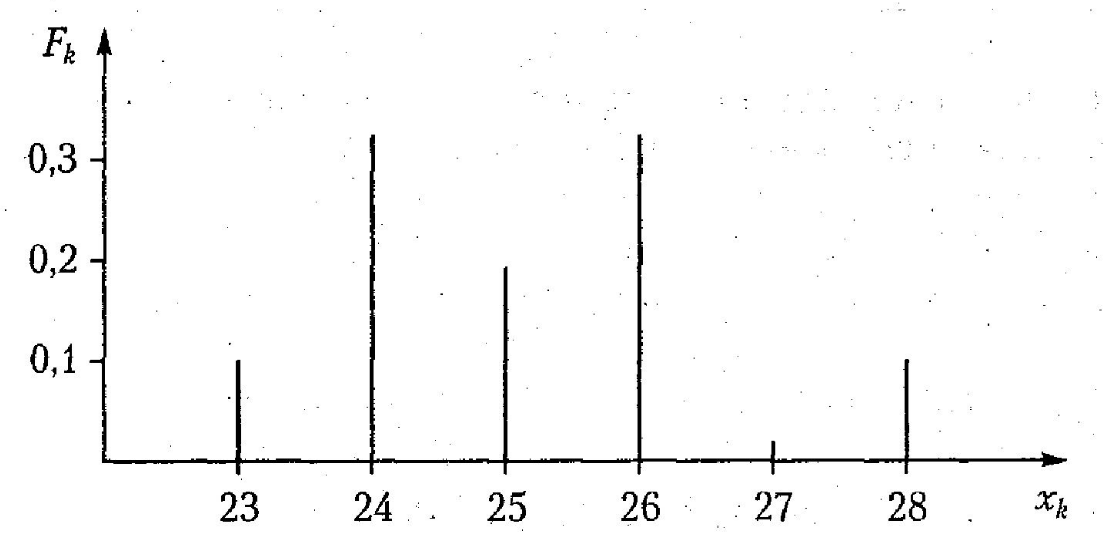
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k \qquad \sum_{k=1}^{m} n_k = N \qquad F_k = \frac{n_k}{N} \qquad N \uparrow \therefore F_k \to p_k \qquad \sum_{k=1}^{m} F_k = \sum_{k=1}^{m} p_k = 1$$

Дискретные случайные величины

Законом распределения (законом распределения вероятности) случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины

X	P
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
x_4	p_4
x_5	p_5
$\cdots$	$\cdots$



Параметры распределения дискретной случайной величины

Математическое
ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \qquad M(X) \cong \bar{x}$$

Дисперси
я

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{N} [x_i - M(X)]^2 p_i \qquad D(X) \cong \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

Среднее квадратическое отклонение
(СКО)

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}$$

Непрерывные случайные величины

Величины, возможные значения, которых не отделены друг от друга и непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются **непрерывными** случайными величинами.

Функция распределения случайной величины,
или интегральная функция распределения случайной величины,
или интегральный закон распределения случайной величины

$$F(x) = P(X < x)$$

Плотность вероятности,
или дифференциальная функция распределения вероятностей,
или дифференциальный закон распределения вероятностей

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Некоторые свойства функций распределения вероятности

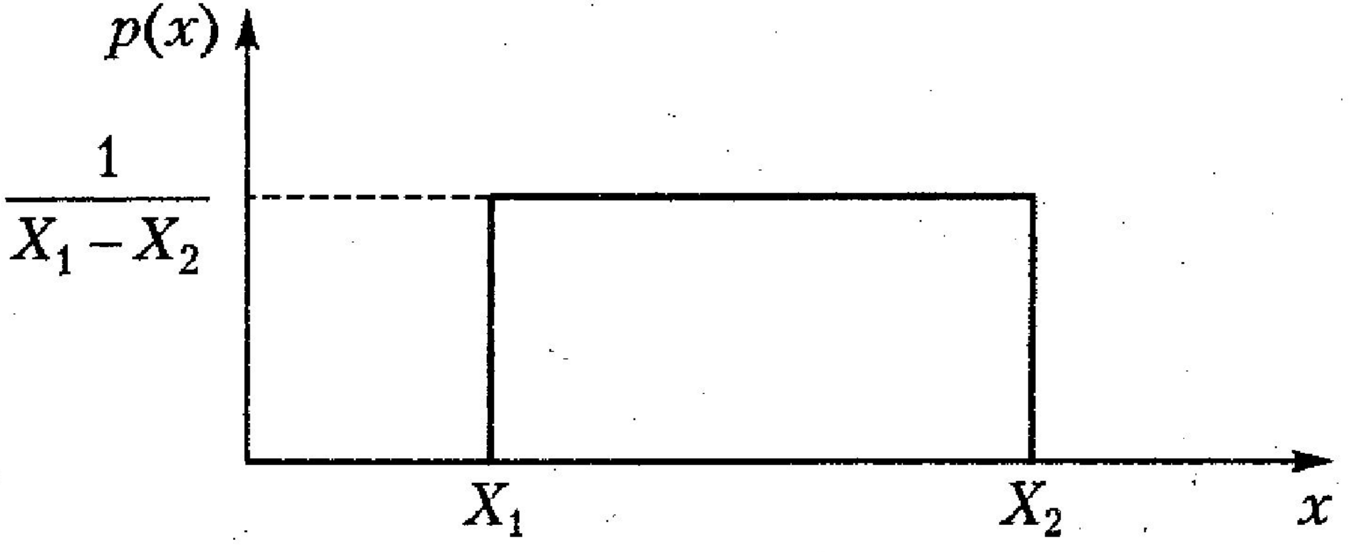
$$x_2 > x_1 \to F(x_2) > F(x_1)$$

$$x = -\infty \to F(x) = 0$$

$$x = \infty \to F(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

Равномерный закон распределения случайной величины

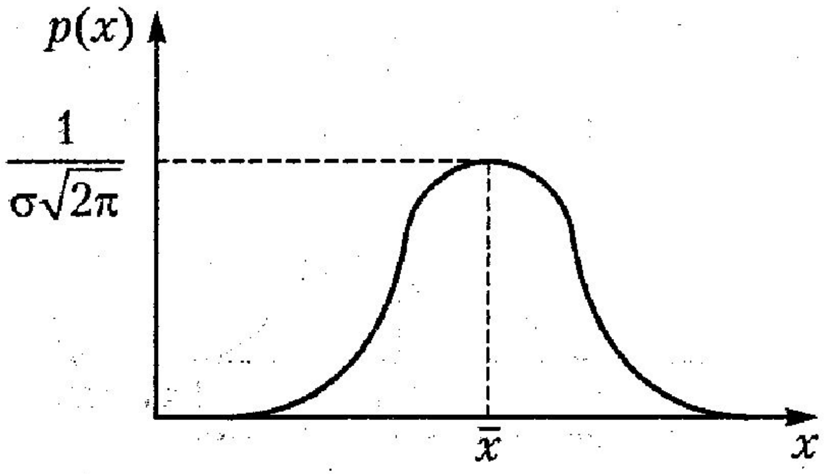


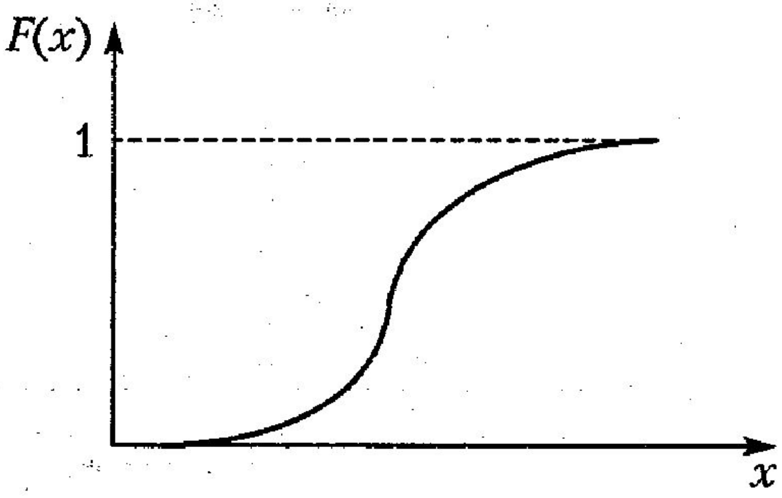
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{X_2 - X_1}, & X_1 \leq x \leq X_2 \\ 0, & x < X_1 \text{ и } x > X_2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < X_1 \\ \dfrac{x - X_1}{X_2 - X_1}, & X_1 \leq x \leq X_2 \\ 0, & x > X_2 \end{cases}$$

Нормальный закон распределения случайной величины

1. **Аксиома симметрии**: при очень большом числе отсчетов случайные отклонения от среднего значения, равные по величине, но различные по знаку, встречаются одинаково часто.
2. **Аксиома монотонного убывания плотности вероятностей**: чаще всего встречаются меньшие отклонения, а большие отклонения встречаются тем реже, чем они больше.





$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\bar{x})/\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$$

Моменты распределения случайных величин

Начальные моменты

$$\overline{x^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

Если $k = 1$ – математическое ожидание $M(x)$

Свойства

$$a = \text{const} \to M(a) = a$$

$$M(ax + by) = aM(x) + bM(y)$$

$$M(xy) = M(x)M(y)$$

$$M[x - M(x)] = 0$$

Центральные моменты

$$\overline{(x - \bar{x})^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^k p(x) dx$$

Если $k = 1 \to \overline{(x - \bar{x})} = 0$

Если $k = 2$ – дисперсия σ^2 или $D(x)$

Свойства

$$a = \text{const} \to D(a) = 0$$

$$D(ax + by) = a^2 D(x) + b^2 D(y)$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ – среднее квадратическое отклонение (СКО)

Примеры моментов распределения случайных величин для равномерного распределения

Математическое ожидание $M(x) = \frac{X_1 + X_2}{2}$

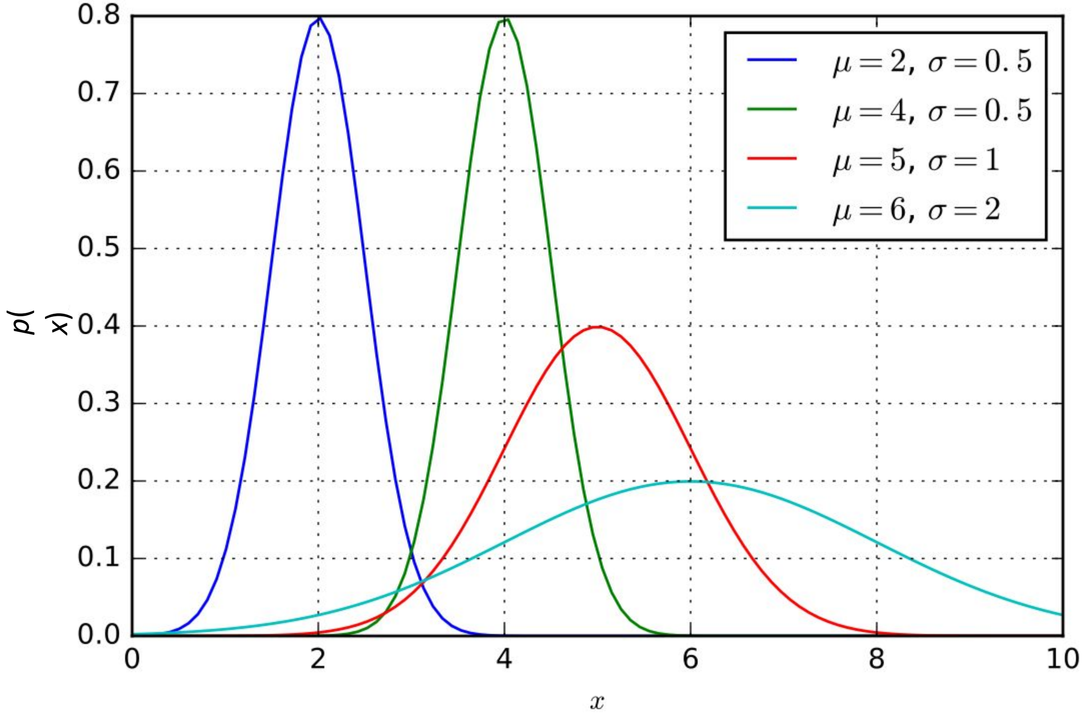
Дисперсия $D(x) = \frac{(X_2 - X_1)^2}{12}$

Квантильная оценка результатов измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

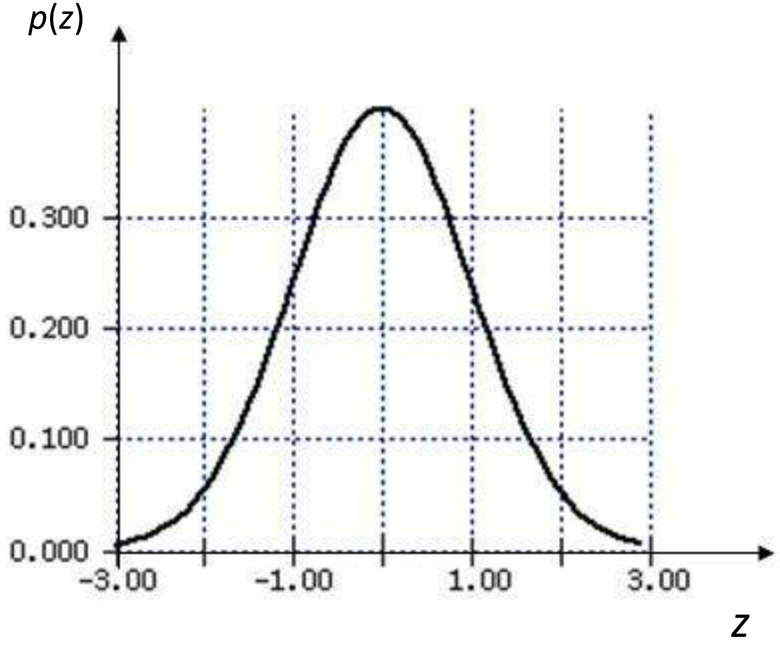
$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Квантиль — значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью



Квантили нормального

Примеры квантилей для разных уровней вероятности



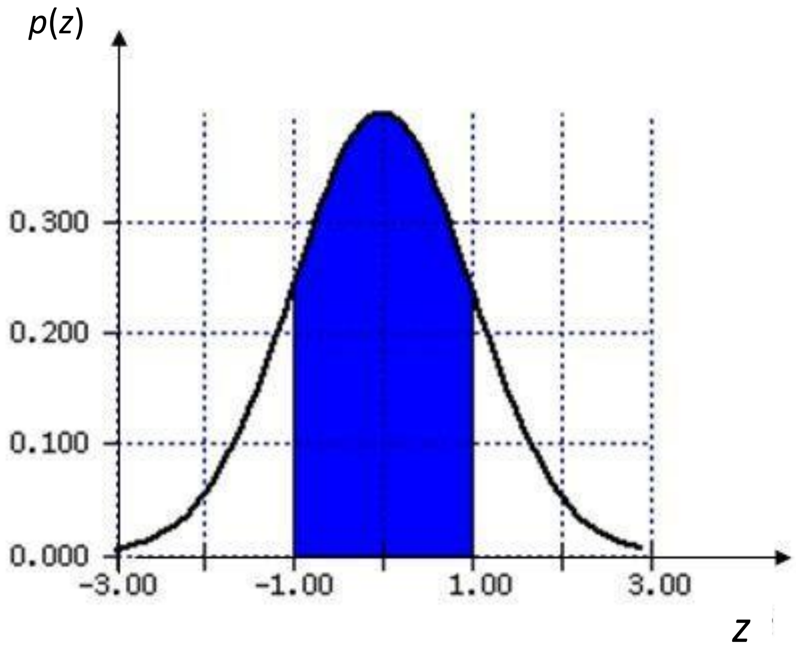
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \rightarrow$$

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \rightarrow$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Квантили нормального

Примеры квантилей для разных уровней вероятности:
вероятность попадания результата измерения *x* в интервал $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ ~68%



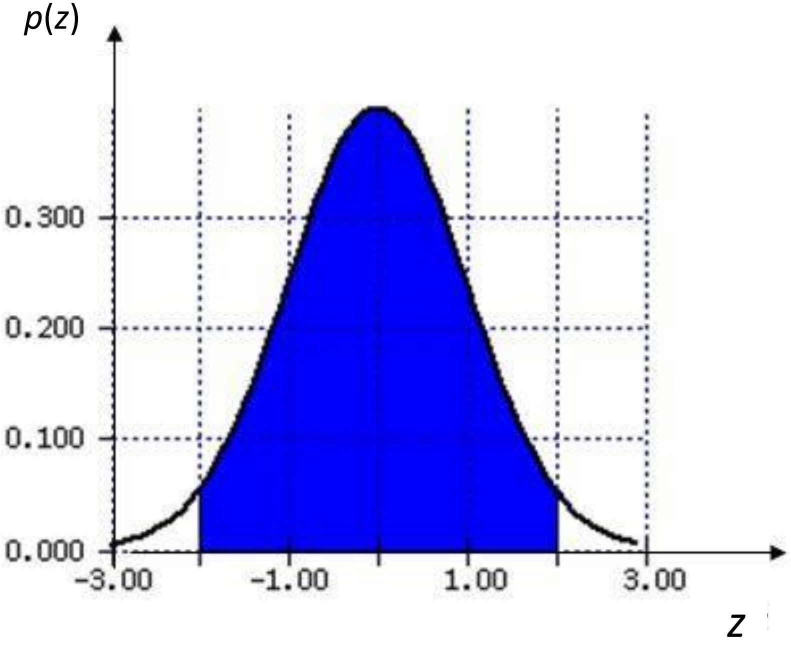
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \to$$

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \to$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Квантили нормального

Примеры квантилей для разных уровней вероятности:
вероятность попадания результата измерения *x* в интервал $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ ~68%:
вероятность попадания результата измерения *x* в интервал $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ ~95%



$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \rightarrow$$

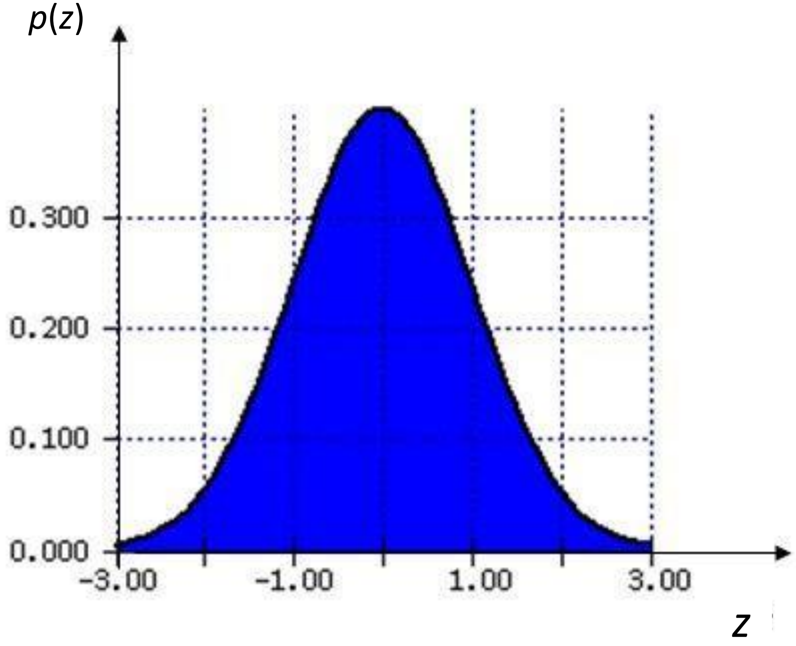
$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \rightarrow$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Квантили нормального

Примеры квантилей для разных уровней вероятности:
вероятность попадания результата измерения x в интервал $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ ~68%:
вероятность попадания результата измерения x в интервал $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ ~95%
вероятность попадания результата измерения x в интервал $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ ~99,7%

Доверительные вероятности

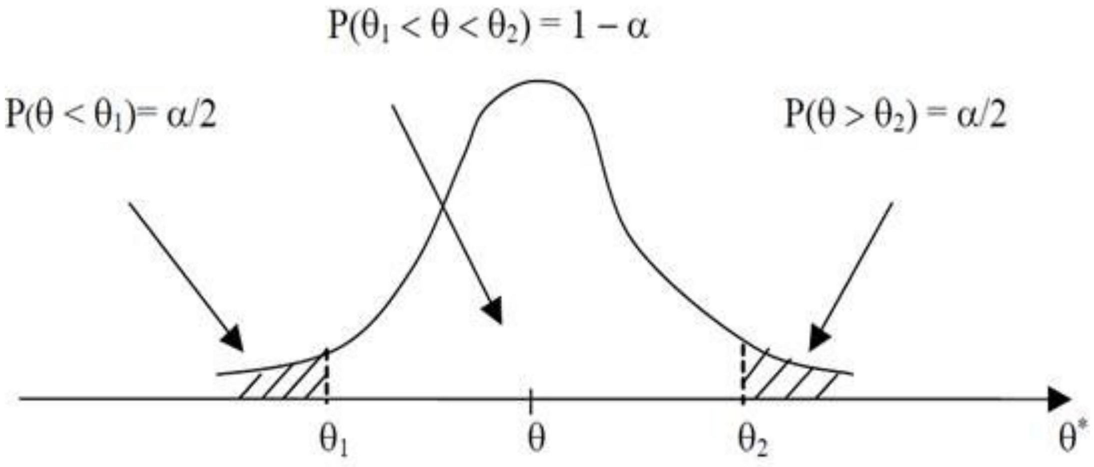


$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \rightarrow$$

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \rightarrow$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Доверительный интервал и доверительная вероятность



Результат измерения (случайная величина) θ является надежным с вероятностью 1-α, если попадает в интервал между квантилями (θ_1, θ_2) – в **доверительный интервал** с соответствующей **доверительной вероятностью**

Доверительные границы случайной погрешности

$$\theta_1 = \theta - tS, \theta_2 = \theta + tS$$

$$t = p^{-1}(\alpha/2)$$

Примеры значений *t* доверительной вероятности $P_д$ для нормального распределения

$P_д$	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99
t	0,67	1,28	1,64	1,96	2,58