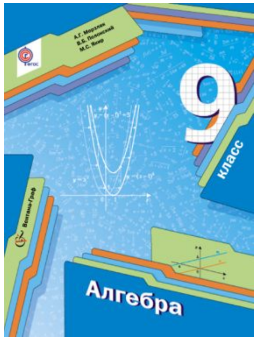
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

вентана граф

Развитие понятия функции в УМК «Алгебра 7-9 кл.»



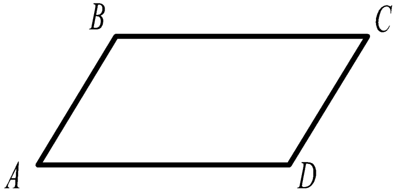
Якир Михаил Семенович,
автор УМК «Алгебра» 7-9 кл.

Понятие функции одно из самых сложных в школьном курсе алгебры

$$2a^2b^5c^4$$ одночлен

$$x^3y - 3xy^2 + 5x$$ многочлен

$$ax + b = 0$$ линейное уравнение



параллелограмм

Из истории развития понятия функции

Изучение зависимостей между переменными величинами.

1. Открытие формул для вычисления площадей и объёмов некоторых фигур.
2. Работы Пьера Ферма и Рене Декарта: исследование значения ординаты в зависимости от значения абсциссы.
3. Работы Исаака Ньютона: величина, изменяющее свое значение с течением времени.

Из истории развития понятия функции

4. Термин «функция» ввел Лейбниц. Иоганн Бернулли и Лейбниц под функцией понимали формулу, связывающую одну переменную с другой.
5. Многолетний спор между Эйлером и Д’ Аламбером.
6. Определение Лобачевского и Дирихле: *переменную величину у называют функцией переменной величины х, если каждому значению величины х ставится в соответствие единственное значение величины у.*

Из истории развития понятия функции

7. Более современный подход:

функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной.

Из истории развития понятия функции

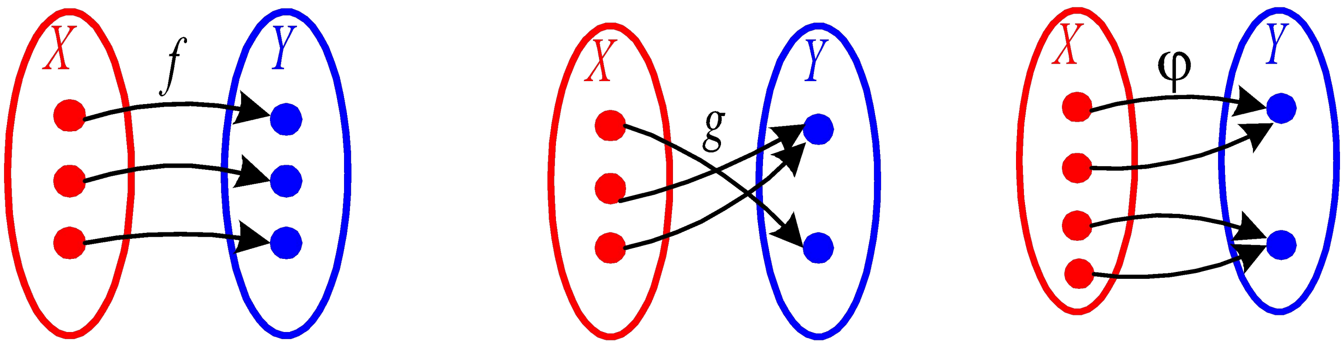
8. Определение на языке теории множеств:

пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной; функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

9. Функция и отображение — это синонимы.

Из истории развития понятия функции

10. Взаимно однозначное отображение множества *X* на множество *Y*.



Из истории развития понятия функции

11. Определение понятия функции без использования понятия «правила»:

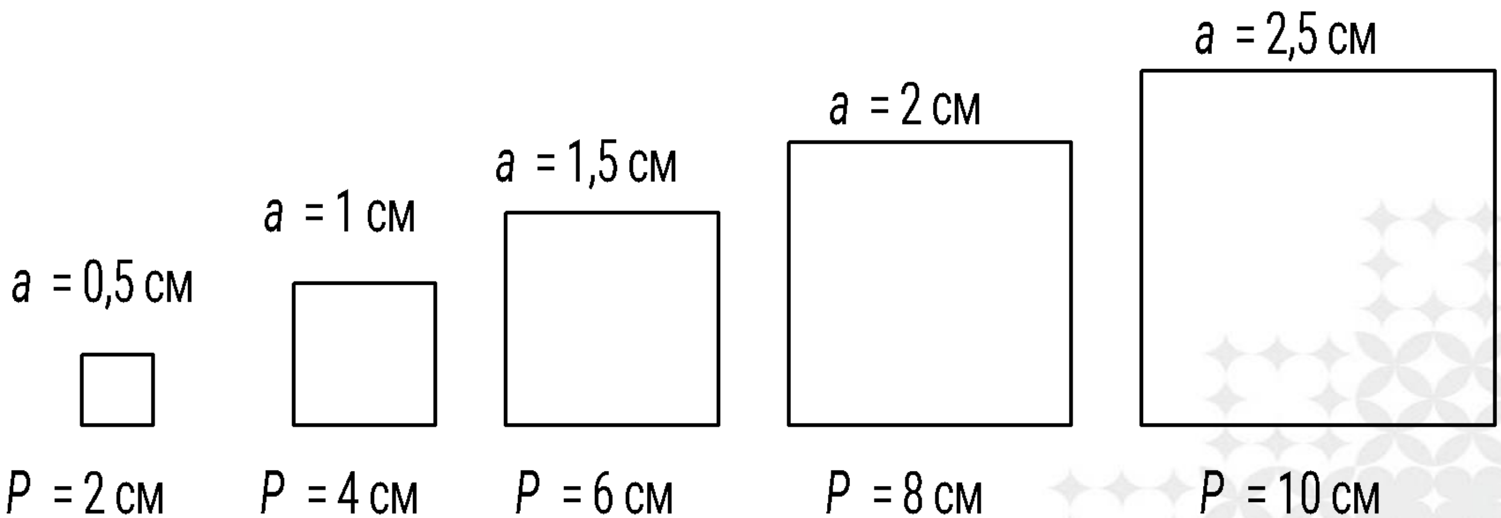
функция — это множество упорядоченных пар с различными первыми компонентами.

$$\{(x;\, y) \mid x \in X,\, y \in Y,\, y = f(x)\}.$$

$$f = \{(x;\, 2x - 1) \mid x \in R\}.$$

Пропедевтика понятия функции, 6 класс

Прямая и обратная пропорциональные зависимости



Пропедевтика понятия функции, 6 класс

Две переменные величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Две переменные величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из этих величин в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

688. Заполните таблицу, если величина y прямо пропорциональна величине x:

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

671. Поезд движется со скоростью 60 км/ч. Заполните таблицу, в первой строке которой указано время движения t, а во второй — пройденный путь s.

t (ч)	2	0,5		3,2		
s (км)			90		240	156

Задайте формулой зависимость s от t.

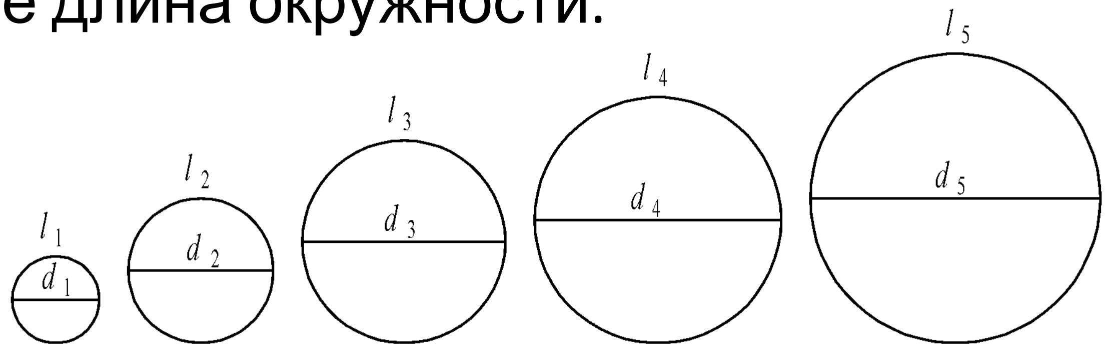
673. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Заполните таблицу, в первой строке которой указана площадь его основания, а во второй — высота.

S (см^2)	16		9,6	240	
h (см)		8			4,8

Задайте формулой зависимость h от S.

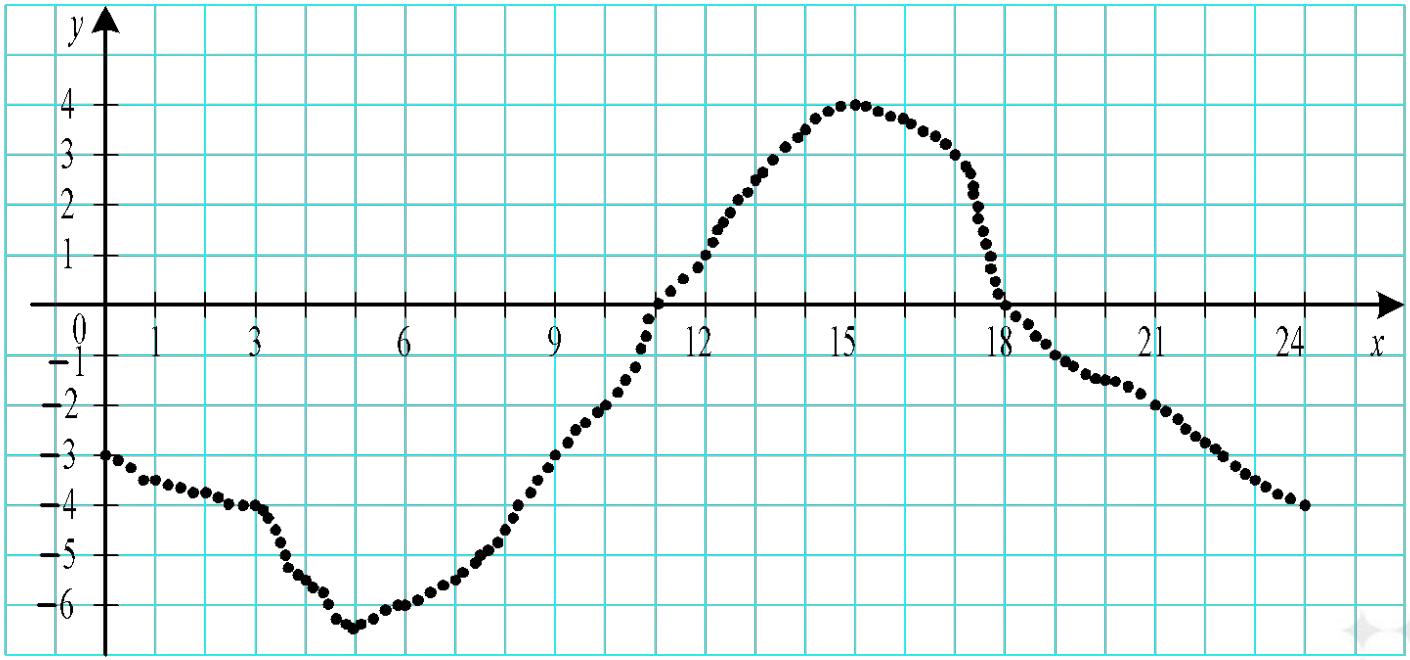
Длина окружности

Длина *l* окружности зависит от длины её диаметра *d*, а именно: чем больше диаметр, тем больше длина окружности.

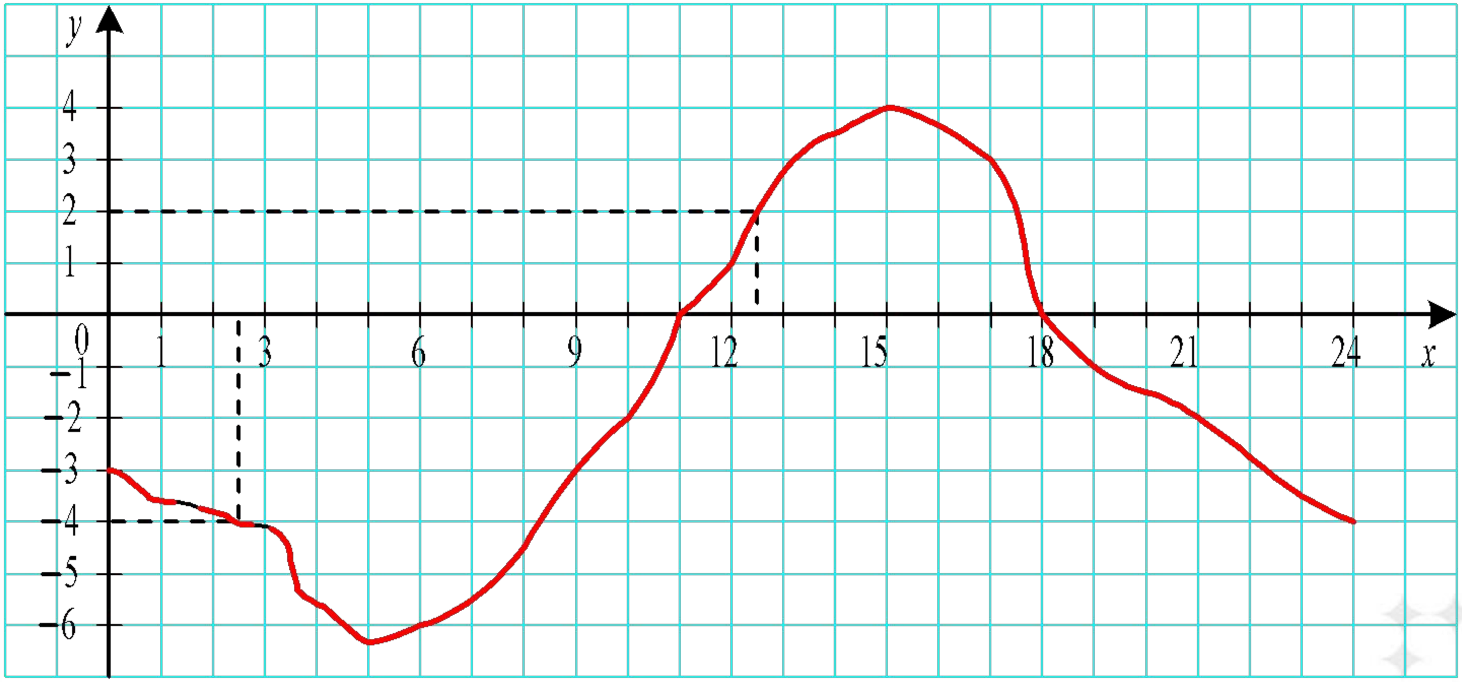


Возможно, интуиция вам подскажет, что если диаметр увеличить, например, в 2 раза, то и длина окружности увеличится в 2 раза; если, например, диаметр уменьшить в 5 раз, то же самое произойдет и с длиной окружности.

Графики. График температуры

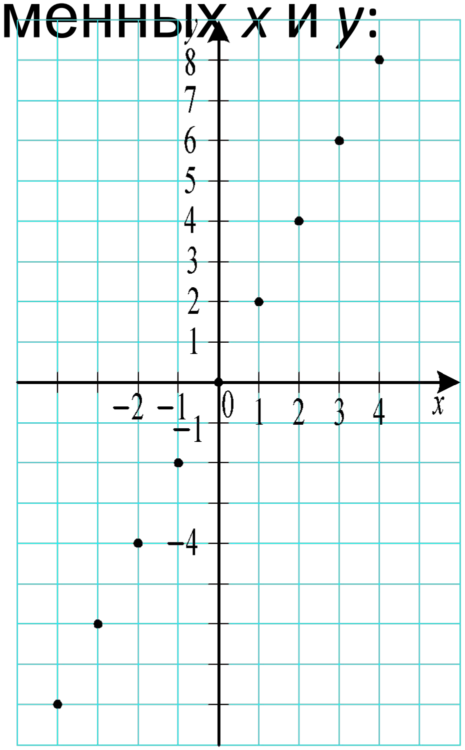


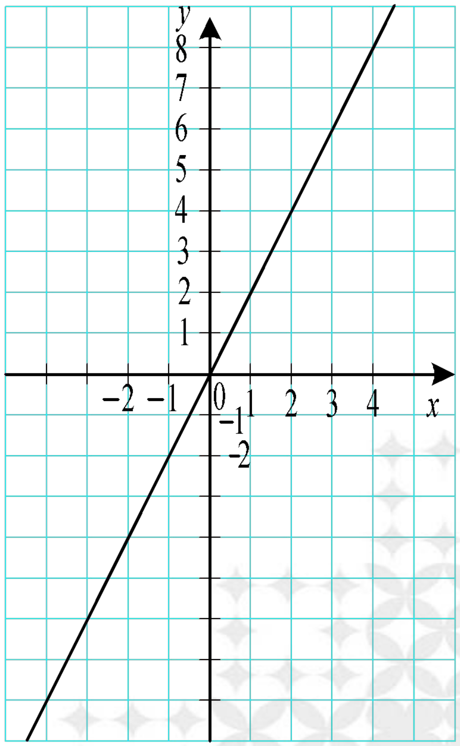
Графики. График температуры



Рассмотрим равенство $y = 2x$. Это равенство показывает, как значения переменной y зависят от соответствующих значений переменной x: значение переменной y равно соответствующему значению переменной x, умноженному на 2. Построим график этой зависимости.

Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y:





1386. Мотоциклист выехал из дома и через некоторое время вернулся назад. На рисунке 202 изображен изменения расстояния мотоциклиста от дома в зависимости от времени (график движения мотоциклиста).

1) Какое расстояние проехал мотоциклист за первый час движения?
2) На каком расстоянии от дома мотоциклист остановился для первого отдыха? для второго отдыха?
3) Сколько длился первый отдых? второй отдых?
4) На каком расстоянии от дома был мотоциклист через 5 ч после начала движения?
5) С какой скоростью двигался мотоциклист последние полчаса?

Введение понятия функции
7 класс

Связи между величинами. Функция

Учитель пишет на доске. При этом меняются длина мелового следа, масса, объём и даже температура кусочка мела.

Работает школьная столовая. В течение дня меняются количество посетивших её учеников, расходы электроэнергии и воды, денежная выручка и т. п.

Введение понятия функции
7 класс

Вообще, в происходящих вокруг нас процессах многие величины меняют свои значения. Понятно, что некоторые из этих величин связаны между собой, т. е. изменение одной величины влечёт за собой изменение другой.

Многие науки, такие как физика, химия, биология и другие, исследуют зависимости между величинами. Изучает эти связи и математика, конструируя **математические модели** реальных процессов.

- **Пример 1**. Изменяется сторона квадрата. Понятно, что при этом будет меняться и его периметр. Если длину стороны квадрата обозначить a, а периметр — P, то зависимость значения переменной P от значения переменной a (коротко говорят: зависимость переменной P от переменной a) задается формулой $P = 4a$.

С помощью этой формулы можно, выбрав произвольную длину стороны, найти соответствующее значение периметра квадрата. Поэтому в этой модели переменную a называют **независимой переменной**, а переменную P — **зависимой переменной**.

Подчеркнем, что эта формула задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

- **Пример 2**. Семья положила в банк 100 000 р. под 10 % годовых. Тогда через год величина M — сумма денег на счете — станет равной 110 000.

Подчеркнем, что эта таблица задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

Количество лет, n	1	2	3	4	5
Сумма денег на счете, M, р.	110 000	121 000	133 100	146 410	161 051

- **Пример 3**. На рисунке 8 изображен график зависимости температуры воздуха от времени суток.

Подчеркнем, что этот график задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

Выводы из рассмотренных примеров

- Несмотря на существенные различия приведенных трех примеров, им всем присуще следующее: *указано правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*. Такое правило называют **функцией**, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — **функциональной**.
- Итак, правила, описанные в примерах 1, 2 и 3, являются функциями.

Система заданий по теме «Функция»

760. В вашем классе была проведена контрольная работа по математике.

1) Каждому ученику поставили в соответствие оценку, которую он получил.
2) Каждой оценке поставили в соответствие ученика, который ее получил.

Какое из этих правил является функцией?

761. Рассмотрим правило, согласно которому каждому натуральному числу соответствует противоположное ему число. Является ли такое правило функцией?

Система заданий по теме «Функция»

762. Каждому неотрицательному числу поставили в соответствие само это число, а каждому отрицательному числу — число, ему противоположное. Является ли такое правило функцией?

769. Каждому числу поставили в соответствие расстояние от точки, изображающей это число на координатной прямой, до начала отсчета. Поясните, почему описанное правило является функцией. Найдите её область определения и область значений. Обозначив эту функцию буквой f, найдите $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

Система заданий по теме «Функция»

770. Рассмотрим правило, по которому каждому однозначному натуральному числу поставили в соответствие последнюю цифру его квадрата. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа обозначьте эту функцию буквой g и найдите:
1) область определения и область значений функции;
2) $g(7)$, $g(3)$, $g(1)$, $g(9)$, $g(4)$.

771. Рассмотрим правило, по которому числу 0 ставятся в соответствие все четные числа, а числу 1 — все нечетные числа. Является ли это правило функцией?

Система заданий по теме «Функция»

772. Придумайте функцию f, областью определения которой являются все натуральные числа, а областью значений — три числа: 0, 1, 2. Найдите $f\,(7)$, $f\,(15)$, $f\,(101)$.

773. Рассмотрим правило, по которому каждому натуральному числу поставили в соответствие остаток при делении его на 7. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа найдите область определения и область значений этой функции.

Способы задания функции

797. Каждому натуральному числу, которое больше, чем 10, но меньше, чем 20, поставили в соответствие остаток при делении этого числа на 6.

1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию таблично.

798. Область определения некоторой функции — однозначные натуральные числа, а значения функции в 2 раза больше соответствующих значений аргумента.

1) Каким способом задана эта функция?
2) Задайте эту функцию формулой и таблично.

Способы задания функции

799. Задайте формулой функцию, если значения функции:

1) противоположны соответствующим значениям аргумента;
2) равны утроенным соответствующим значениям аргумента;
3) на 4 больше квадратов соответствующих значений аргумента.

800. Задайте формулой функцию, если значения функции:

1) на 3 меньше соответствующих значений аргумента;
2) на 5 больше удвоенного значения соответствующего аргумента.

Способы задания функции

813*. Функция f задана описательно: значение функции равно наибольшему целому числу, которое не превышает соответствующего значения аргумента. Найдите f (3,7), f (0,64), f (2), f (0), f (– 0,35), f (–2,8).

8 класс

$$y=\frac{k}{x},\ y=x^2,\ y=\sqrt{x},$$

Область определения

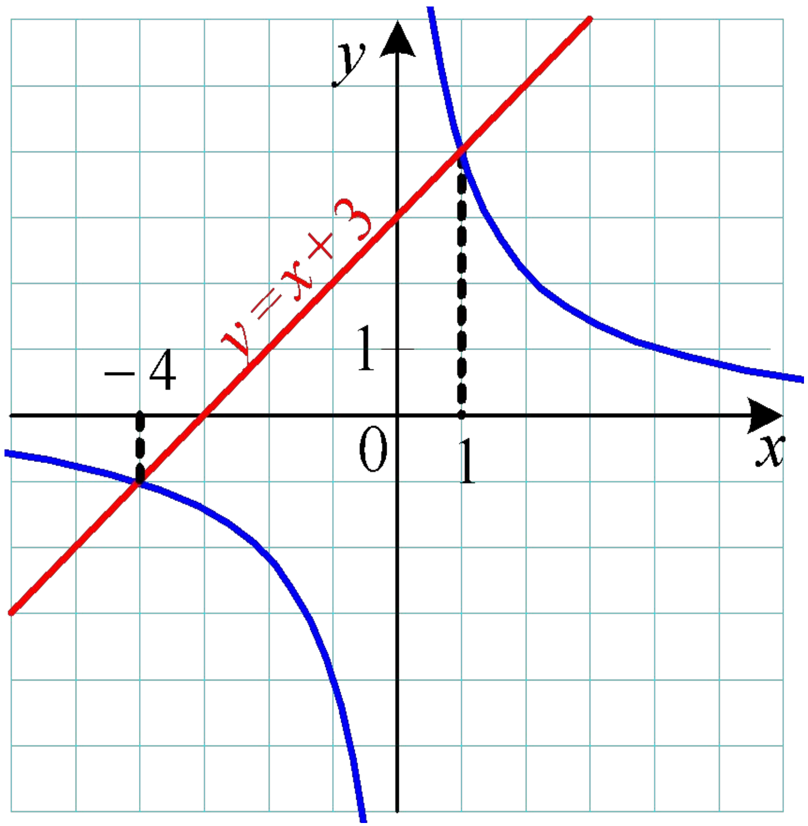
Область значений

График

Свойство графика

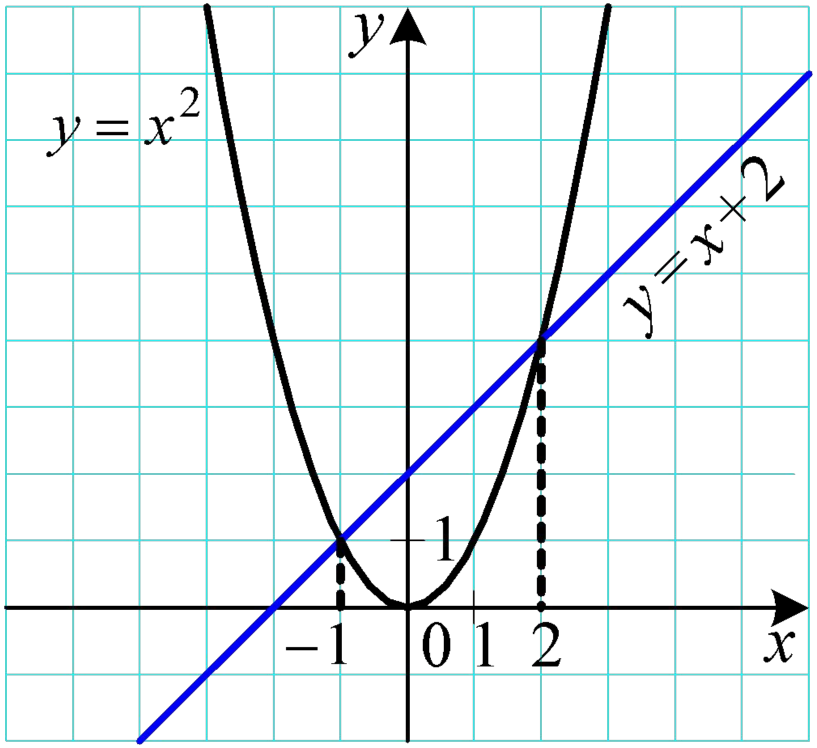
Графический способ решения уравнений

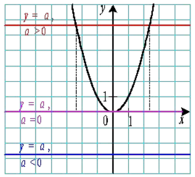
Пример. Решите уравнение $\dfrac{4}{x} = x + 3$



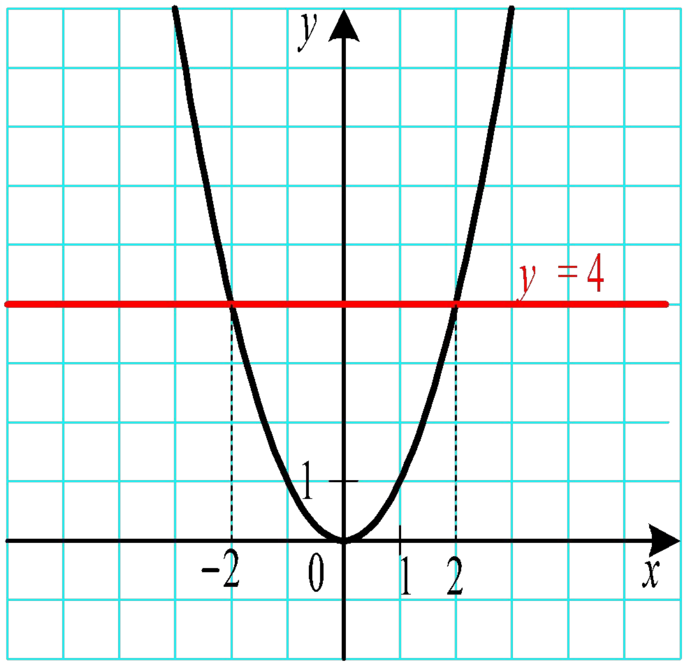
Пример. Решите графически уравнение

$$x^2 = x + 2$$





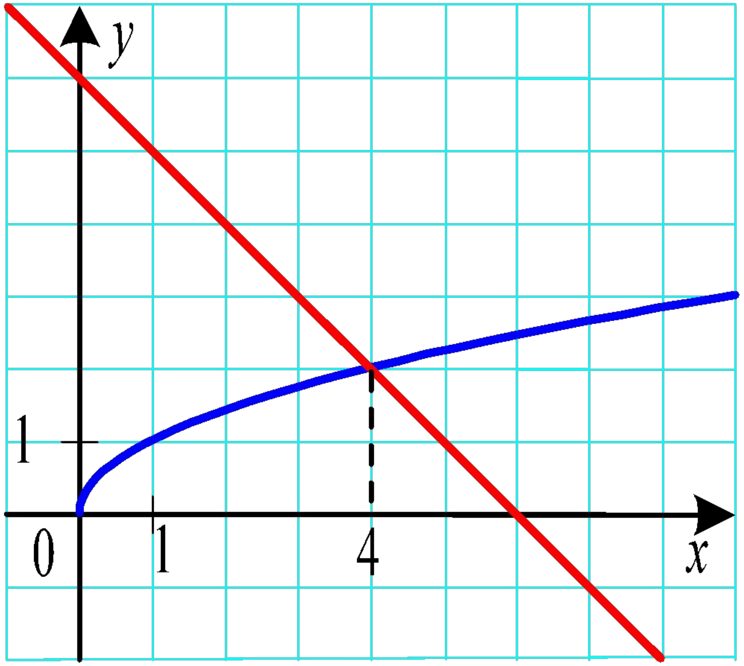
y = a,
a > 0
y = a,
a = 0
y = a,
a < 0
y
x
0
1
1



y
y = 4
1
-2
0
1
2
x

Пример. Решите графически уравнение

$$\sqrt{x} = 6 - x$$



9 класс

Повторение и расширение сведений
о функции

Определение функции на языке теории множеств.

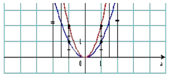
Свойства функции

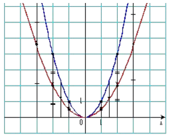
1. Нули функции.
2. Промежутки знакопостоянства.
3. Возрастание и убывание функции.

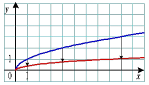
Пример. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

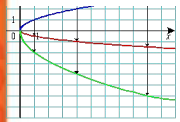
Преобразование графиков функций

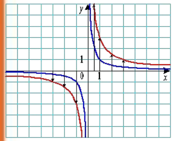
Как построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$

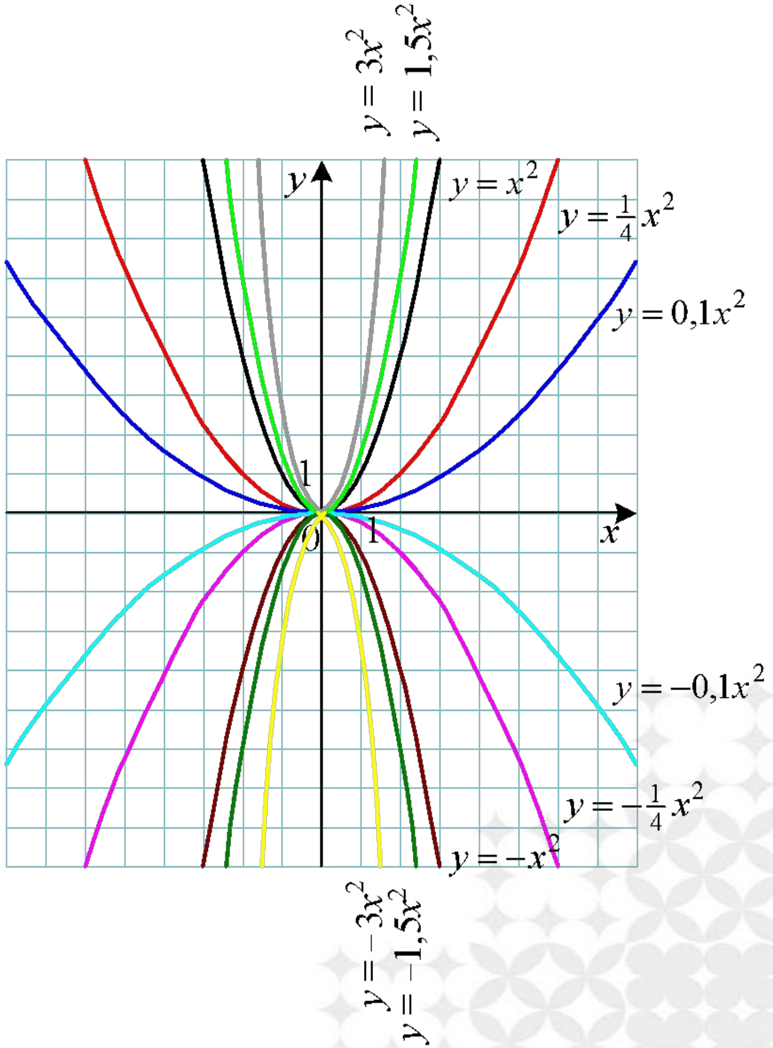




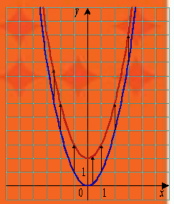


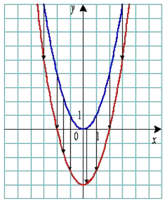


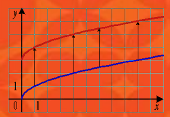


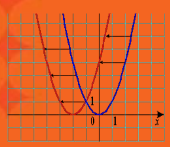

y = 3x^2
y = 1,5x^2
y = x^2
y = 1/4 x^2
y = 0,1x^2
y = −0,1x^2
y = −1/4 x^2
y = −x^2
y = −3x^2
y = −1,5x^2
y
x
1
0
1

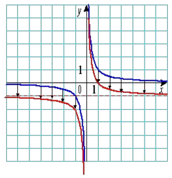
Как построить графики функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$, если известен график функции $y = f(x)$

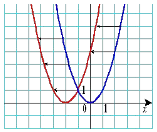





y
1
0
1
x


1
0
1
x

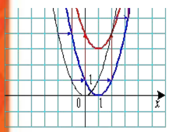

y
1
0
1
x

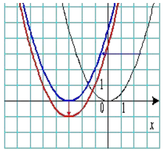

1
0
1
x

Описание алгоритма преобразования в виде схемы

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{на 1 ед.}]{\text{вправо}} y = (x-1)^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{вверх}} y = (x-1)^2 + 3$$

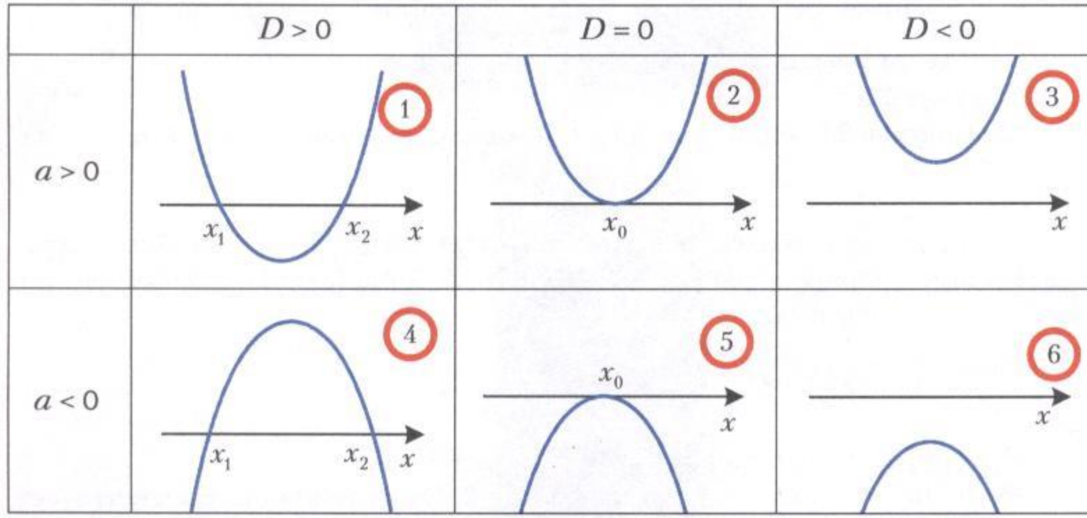
$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{влево}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{на 1 ед.}]{\text{вниз}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$


0
1
x


1
0
1
x

Решение квадратичных неравенств

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел a и D отображено в таблице (x_1 и x_2 – нули функции, x_0 – абсцисса вершины параболы):



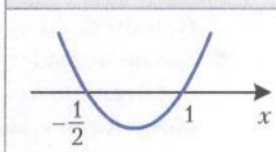
Разъясним, как эту таблицу можно использовать для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a < 0$ и $D > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 4 таблицы. Тогда ясно, что ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график соответствующей квадратичной функции расположен над осью абсцисс.

Пример 1. Решите неравенство $2x^2 - x - 1 > 0$.

Решение. Для квадратного трёхчлена $2x^2 - x - 1$ имеем: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 1 таблицы. Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Получим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тогда схематически график функции $y = 2x^2 - x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 73.

Рис. 73



Из рисунка 73 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

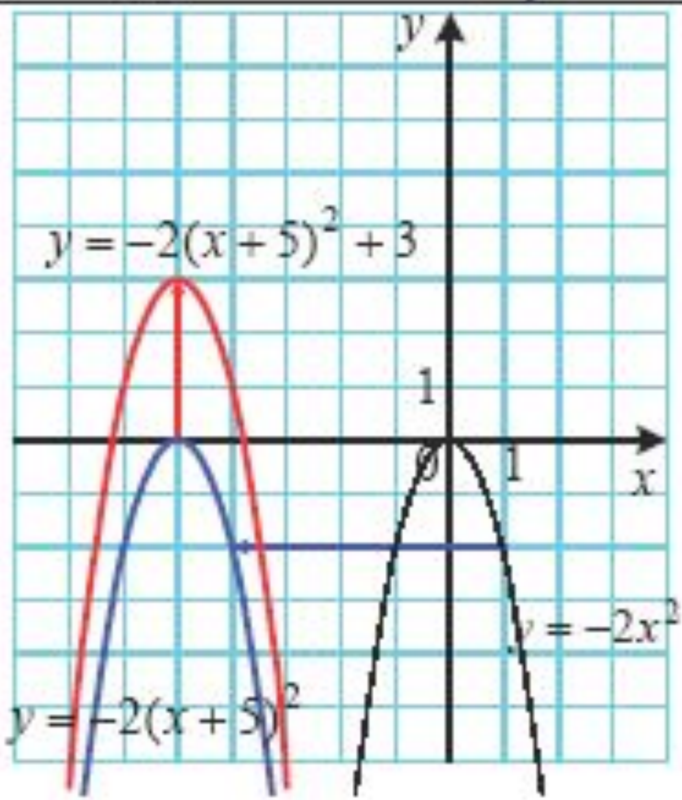
Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Пример 3. Постройте график функции $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Решение. Имеем: $-2x^2 - 20x - 47 =$

$= -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3$.

$$y = -2x^2 \xrightarrow{\text{влево на 5 ед.}} y = -2(x+5)^2 \xrightarrow{\text{вверх на 3 ед.}} y = -2(x+5)^2 + 3$$

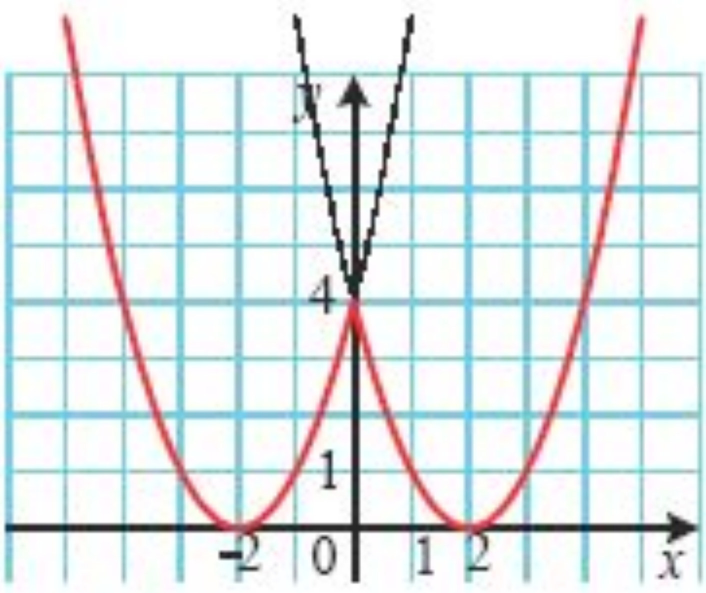


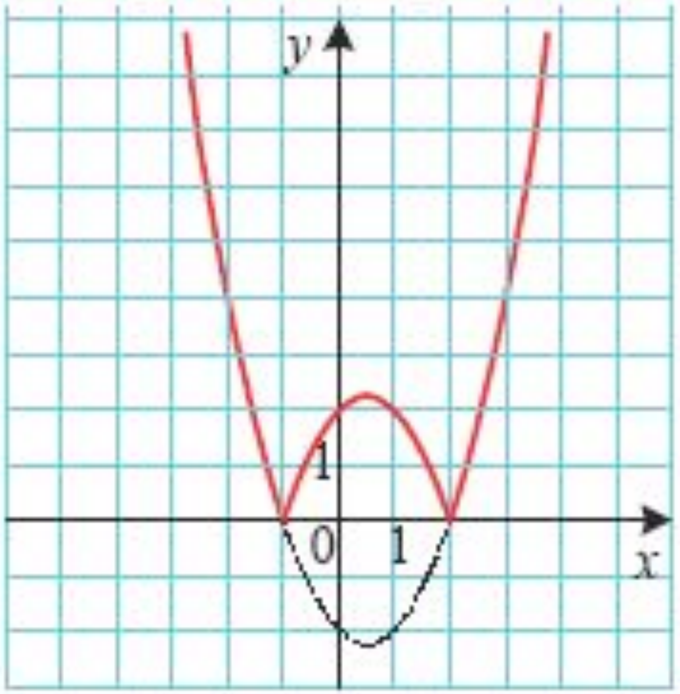
Как построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$

На рисунке 68 показано, как с помощью графика функции $y = (x-2)^2$ построен график функции $y = (|x| - 2)^2$.

Как построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$

На рисунке 69 показано, как с помощью графика функции $y = x^2 - x - 2$ построен график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

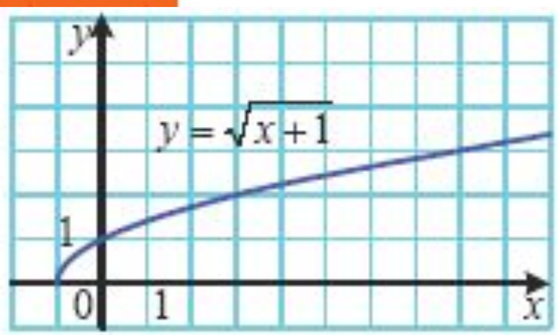




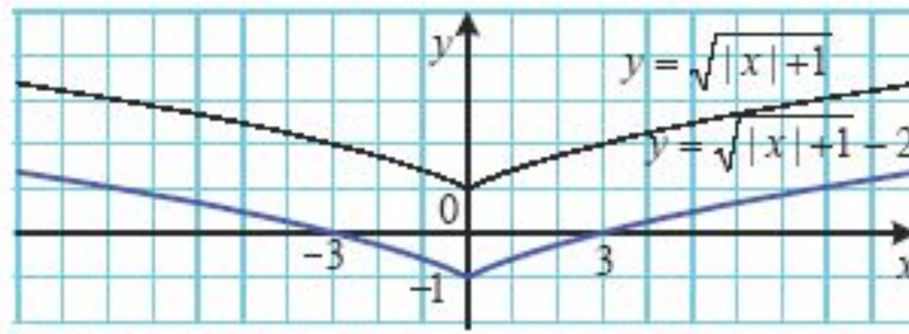
Пример 1. Постройте график функции $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$.

Решение. Схема построения искомого графика имеет такой вид:

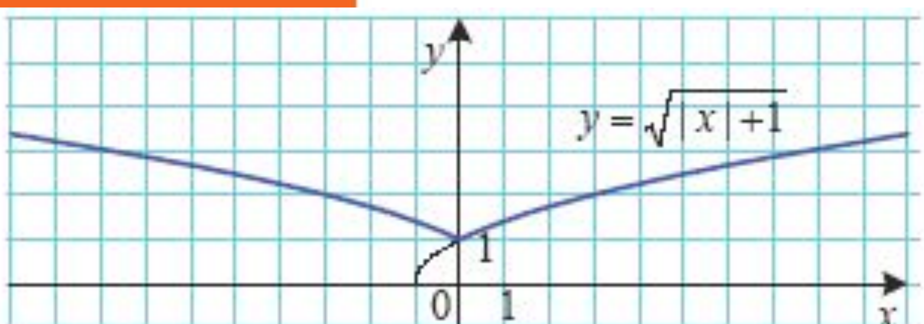
$$y=\sqrt{x+1}\rightarrow y=\sqrt{|x|+1}\rightarrow y=\sqrt{|x|+1}-2\rightarrow y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$



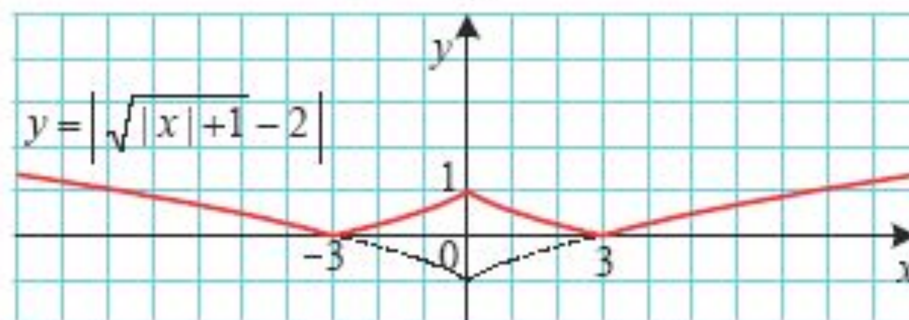
а)



в)



б)

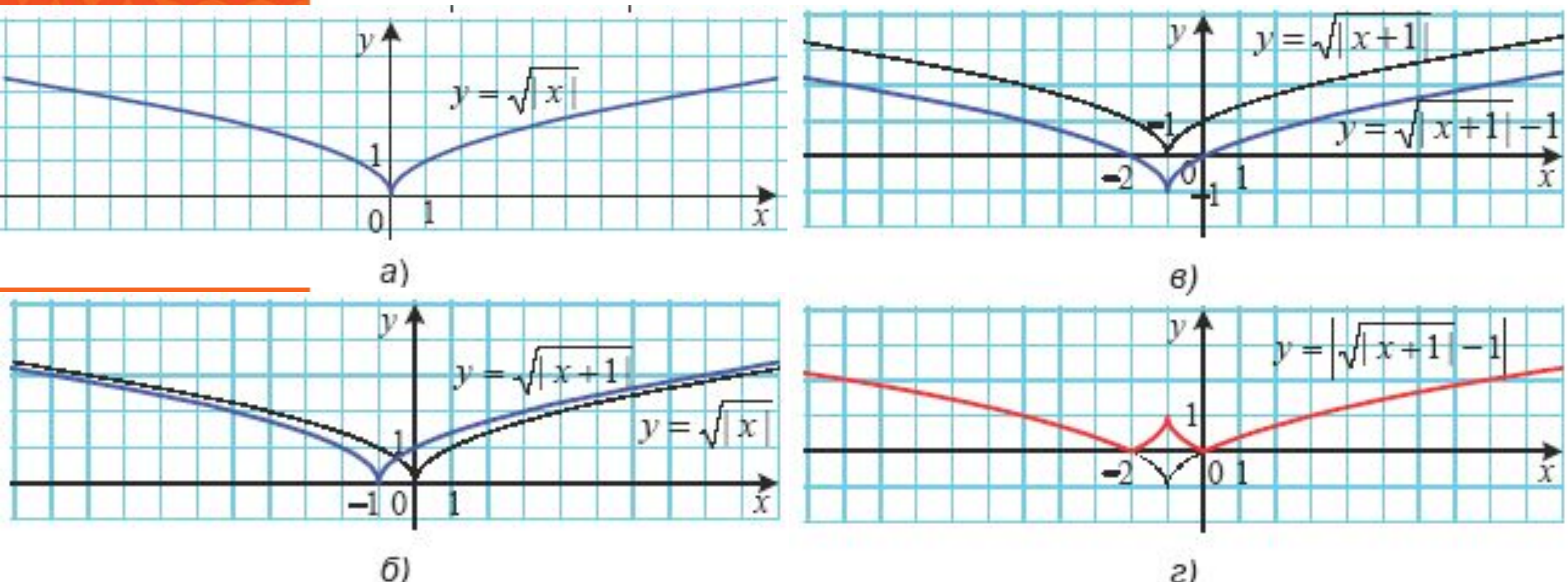


г)

Пример 2. Постройте график функции $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Решение. Схема построения искомого графика имеет такой вид:

$y=\sqrt{|x|} \to y=\sqrt{|x+1|} \to y=\sqrt{|x+1|}-1 \to y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$ (рис. 71).



а) в) б) г)