

Задачи на делимость

*Учитель математики
МАОУ «Центр образования № 13
имени Героя Советского Союза Н.А.
Кузнецова» Е.В.Кирина*

Задача 1.

Доказать, что при всяком целом n число $n^3 - n$

делится на 3.

Доказательство.

Имеем $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, а из трёх последовательных чисел одно обязательно делится на 3.

Задача 2.

Доказать, что при всяком целом n число $n^5 - n$ делится на 5.

Доказательство.

Имеем $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$. Если целое число оканчивается одной из цифр 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то один из первых множителей на 5. Если n оканчивается одной из цифр 2, 3, 7 или 8, то n^2 оканчивается на 4 или 9 и $n^2 + 1$ делится на 5.

Задача 3.

Доказать, что при всяком n число $n^5 - 3n^3 + 4n$ делится

на 120.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Имеем} \quad n^5 - 3n^3 + 4n &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Но из пяти последовательных целых чисел одно делится

на 5, по крайней мере одно делится на 3 и по крайней мере два на 2, причём из этих двух последних чисел одно делится на 4. Т.о., произведение пяти последовательных целых чисел всегда делится на $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$

Задача 4.

Доказать, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

Доказательство.

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1)$$

Легко видеть, что второй сомножитель делится на

10, т.к. он представляет сумму 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1.

Итак, $11^{10} - 1$ есть произведение 10 на число, делящееся на 10, и значит, делится на 100.

Задача 5.

Доказать, что при любом чётном n число n^3+20n делится на 48.

Доказательство.

Всякое чётное число может быть выписано в виде $n=2k$, где k – целое число. Поэтому n^3+20n

может быть представлено следующим образом:

$$N=n^3+20n=8k(k^2+5).$$

Отсюда видно, что N делится на 8. Докажем, что

Перепишем это число так:

$$k(k^2+5)=k^3-k+6k=(k-1)k(k+1)+6k.$$

Очевидно, что второе слагаемое $6k$ на 6 делится.

Первое же слагаемое является произведением трёх

последовательных чисел. Поэтому один из сомножителей этого произведения обязательно делится на 3 . Кроме того, из двух

последовательных целых чисел (а тем более трёх) одно является чётным. Значит, произведение $(k-1)k(k+1)$ делится

на 6 , и требуемое доказано.

Задача 6.

Определить при каких целых значениях n выражение $n^4 + 4$ является простым числом.

Решение.

Дополним $n^4 + 4$ до полного квадрата:

$$n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

Число $n^4 + 4$ может быть простым только в том случае, если либо $n^2 - 2n + 2 = 1$, либо $n^2 + 2n + 2 = 1$.

Решая

эти уравнения, получим $n = 1$, $n = -1$. При $n = \pm 1$ данное

выражение равно 5, т.е. является простым числом.

Задача 7.

Найти двузначное число, равное неполному
Квадрату суммы его цифр.

Решение.

По условию $10x+y=x^2+xy+y^2$, или $10x+y+xy=(x+y)^2$.

Т.к. $x \leq 9$ и $y \leq 9$, то $10x+y+xy \leq 180$, а тогда $x+y \leq 13$; но
при

$x+y < 13$, $10x+y+xy \leq 130$, значит, $x+y \leq 11$.

При $x+y=10$, $x=9$, $y=1$.

При $x+y=9$, $x+y=8$, $x+y=7$, $x+y=6$, $x+y=5$ – решений
нет.

При $x+y=4$, $x=1$, $y=3$.

Ответ: 91, 63, 13

Задача 8.

Если число – точный квадрат, то сумма его цифр или делится на 3 или в результате деления на 3 даёт в остатке 1. Доказать это.

Решение.

Любое число можно представить в виде одного

из видов: $3k$, $3k-1$; $3k+1$. Квадрат первого выражения делится на 3, квадраты двух других

Задача 9.

Может ли сумма квадратов трёх последовательных натуральных чисел равняться сумме кубов двух последовательных натуральных чисел?

Решение.

Пусть для натуральных чисел k и n выполняется равенство $(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=n^3+(n+1)^3$ или $n^3+(n+1)^3=3k^2+2$. Если число n делится на 3 или даст при делении на 3 остаток 1, то левая часть этого равенства делится на $3n$ даёт остаток 2,

$$\text{так что } 3k^2+2=(3p-1)^3+27p^3=54p^3-27p^2+9p-1,$$

$$k^2=18p^3-9p^2+3p-1.$$

Отсюда следует, что число k^2 при делении на 3 даёт остаток 2, чего быть не может. Следовательно, рассматриваемое равенство невозможно.

Задача 10.

Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 станет квадратом, а после умножения на 3 – кубом натурального числа.

Решение.

Пусть x – наименьшее, натуральное число, такое, что $2x=v^2$,

$3x=c^3$, где v и c – натуральные числа. Из равенства $2x=v^2$

следует, что x кратно 2. А т.к. $3x=c^3$, то x кратно $2^3=8$ и

крратно $3^2=9$, т.е. $x=2^3 \cdot 3^2 \cdot a^6=72a^6$, где a – любое натуральное

число. Наименьшее x получаем при $a=1$.

Задача 11.

Найдите два числа, разность квадратов которых представляет собой куб, а разность кубов – квадрат?

Решение.

$$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 4^3$$

$$10^3 - 6^3 = 1000 - 216 = 784 = 28^2$$

Задача 12.

Докажите, что если m и m^2+2 простые числа, то число m^3+2 тоже простое.

Доказательство.

Любое простое число m , отличное от 3, можно представить в виде $3n+1$ или в виде $3n-1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

В

первом случае можно записать $m^2+2=9n^2-6n+3$

во

втором $m^2+2=9n^2-6n+3$.

Т.к. $m \geq 2$, то в любом случае m^2+2 больше 3 и делится на 3, значит, m^2+2 может быть простым числом, только если $m=3$. В этом случае $m^2+2=11$ число простое, $m^3+2=24$ – тоже простое.

Задача 13.

Найдите трёхзначное число, которое равно квадрату двузначного и кубу однозначного числа.

Решение.

Выпишем все кубы однозначных чисел:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3.$$

Рассмотрим те из них, которые являясь трёхзначными числами, могут быть равны квадрату двузначных. Очевидно, что 5^3 и 7^3 не могут быть квадратами двузначных чисел (5 и 7 – простые числа).

Продолжение

Разложим на простые множители
оставшиеся числа:

$$6^3 = 2^3 \cdot 3^3 \neq a^2;$$

$$8^3 = (2^3)^3 = 2^9 \neq a^2;$$

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = (3^3)^2 = 27^2 = 729.$$

Искомое число $729 = 27^2 = 9^3$.

Ответ: 729

Задача 14.

При каких натуральных n число $n^4 + 64^n$ является составным?

Решение.

Ясно, что при n чётным число $n^4 + 64^n$ также чётно (и больше 2), т.е. является составным.

Если $n=2k+1$, то, положив $a=8^k$, будем иметь:

$$n^4 + 64^n = n^4 + 64a^4 = (n^2 + 8a^2)^2 - 16a^2n^2 = (n^2 - 4an + 8a^2)(n^2 + 4an + 8a^2).$$

При этом $n^2 - 4an + 8a^2 = (n - 2a)^2 + 4a^2 > 1$, так что при любом n рассматриваемое число составное.

Задача 15.

Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых положительных чисел никогда не является квадратом целого числа.

Решение.

Обозначим пять последовательных целых чисел следующим образом: $(n-2)$, $(n-1)$, n , $(n+1)$, $(n+2)$, тогда $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$. Для того чтобы $5(n^2 + 2)$ было квадратом, необходимо, чтобы

$n^2 + 2$, т.е. n^2 должно оканчиваться на 3 или 8, что невозможно. Следовательно, $n^2 + 2$ не делится на 5.

Задача 16.

Найти наименьшее простое число, которое может быть представлено в виде суммы двух, трёх, четырёх и пяти простых слагаемых.

Решение.

Наименьшая сумма пяти простых слагаемых равна, очевидно, 10, и поэтому искомое простое число a не меньше 11. Однако $11=2+9=3+8=5+6=7+4$ не может быть представлено в виде суммы двух простых чисел и, следовательно, $a \neq 11$. С другой стороны, $13=2+11=3+3+7=2+2+2+7=2+2+2+2+5$ удовлетворяет условию задачи, и поэтому

$a=13$ Продолжение \rightarrow

- Если считать, что все слагаемые различны, то искомое число должно быть не меньше, чем $3+5+7+11+13=39$ (заметим, что число 2 среди слагаемых не должно быть, т.к. по условию число a нечётно), так что $a \geq 41$. Но 41 нельзя представить в виде суммы, например, двух простых слагаемых.
- Следующая по величине сумма пяти простых слагаемых получается, если заменить 13 – наибольшее из слагаемых – на 17 (следующее простое число), и эта сумма равна 43. Подбором убеждаемся, что $43=2+41=7+17+19=2+5+17+19=3+5+7+11+17$. Следовательно, искомое число a равно 43.

Ответ: 43

Задача 17.

Дано 1989 положительных чисел. Известно, что произведение любых 22 из них больше 1. Докажите, что произведение всех данных чисел больше 1.

Доказательство.

Разобьём все числа подряд на группы по 22 числа.

Получим 90 групп. Произведение всех чисел в каждой группе больше 1. Кроме того, у нас осталось ещё 9 чисел. Выберем в первых 9 группах по одному наибольшему числу. Каждое выбранное число больше 1.

Оставшиеся первоначально после объединения 9 чисел

распределим в каждую из групп по одному. Так что в них вновь станет по 22 числа. Значит, произведение чисел в каждой группе больше 1. Но оно равно

произведению всех данных 1989 чисел

Используемая литература

- И.Кушнир «Шедевры школьной математики» Астарта Киев, 1995