ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Электрон – маленький шарик. Атом – классических законов недостаточно >> модель Бора справедлива только для одноэлектронных атомов.

На пути построения новой, последовательной физики микроявлений большую роль сыграл тот факт, что свет, наряду с волновыми свойствами при определенных условиях проявляет также и корпускулярные. То есть так называемый дуализм света.

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что дуализм не является особенностью только оптических явлений, но имеет универсальное значение. **«В оптике – писал он – в течение столетий пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым, не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?».** Использовав только что установленное вследствие открытия эффекта Комптона соотношение

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

связывающее длину волны ЭМВ с импульсом фотона – частицы не имеющей массы покоя – он предположил, что такое же соотношение справедливо и для частиц, имеющих массу покоя:

$$mV = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Согласно де Бройлю движение каждой частицы связано с волновым процессом, длина волны которого определяется как

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mV}, \quad \text{а частота} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}.$$

Луи Виктор Пьер Раймон, 7-й герцог Бройльи, (фр. *Louis-Victor-Pierre-Raymond, 7ème duc de Broglie, Louis de Broglie*; 1892). Один из основоположников квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике за 1929 год *«за открытие волновой природы электрона»*.

Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля. Опыт Дэвиссона - Джермера

В 1927 г. Дэвиссон и Джермер исследовали отражение электронов от монокристалла никеля, принадлежащего к кубической сингонии. Узкий пучок моноэнергетических электронов направлялся на поверхность монокристалла, сошлифованного перпендикулярно большой диагонали кристаллической кубической ячейки. Отраженные электроны улавливались цилиндрическим электродом.

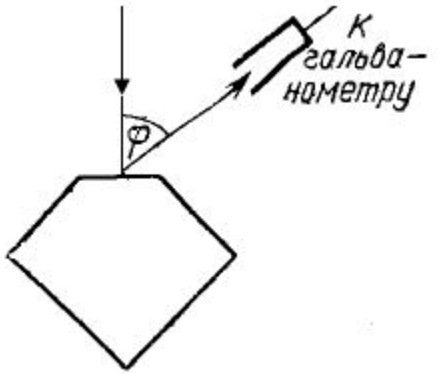


Схема опыта Дэвиссона и Джермера.

Кли́нтон Джо́зеф Дэ́виссон (*Clinton Joseph Davisson*; 1881 – 1958), американский физик, Нобелевская премии по физике 1937 г. (совместно с Джорджем Томсоном) «за экспериментальное открытие дифракции электронов на кристаллах».

Лестер Хэлберт Джермер (*Lester Halbert Germer*; 1896-1971, американский физик. Совместно с Клинтоном Дэвиссоном подтвердил гипотезу Де Бройля о корпускулярно-волновой природе микрочастиц в ходе эксперимента, который получил название Опыт Дэвиссона — Джермера.

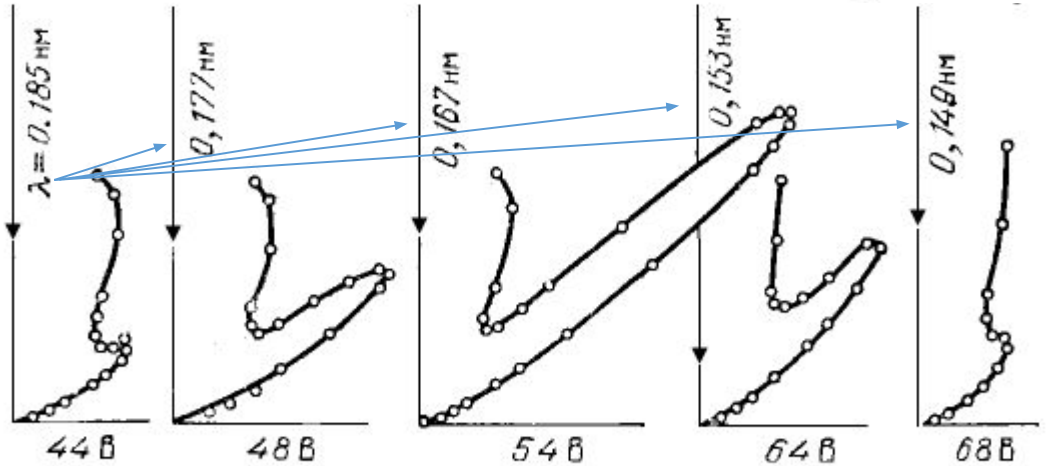


Рис. 11.2. Зависимость интенсивности электронного пучка от угла отражения φ для различных значений ускоряющего напряжения. Вертикальная ось определяет направление падающего пучка. Угол φ отсчитывается от этой оси. Сила тока в заданном направлении представлена длиной отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с кривой

УКАЗАНЫ ТАКЖЕ ДЛИНЫ ВОЛН де Бройля

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ ДЭВИССОНА И ДЖЕРМЕРА

Используя гипотезу де Бройля можно предположить, что электронные волны испытывают дифракцию на мишени так же как рентгеновские лучи испытывают дифракцию при брэгговском отражении от плоскостей в кристалле.

Электроны имеют энергию 54 эВ и падают перпендикулярно никелевой мишени.

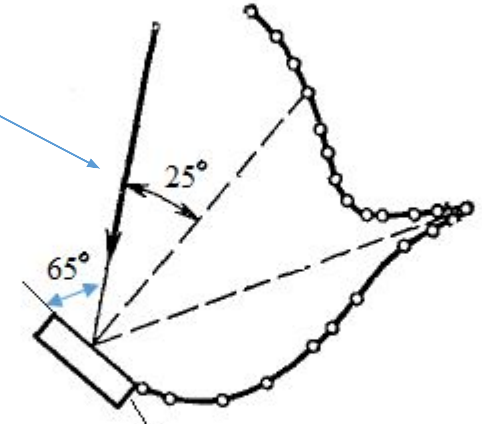
Максимум рассеяния наблюдается при угле между падающим и рассеянным пучком в 50^0

Опыты по дифракции рентгеновских лучей, показали, что при этом электронный пучок имеет одинаковые углы падения и рассеяния относительно брэгговских плоскостей.

Угол скольжения оказался равным 65^0, угол падения $\Theta = 25^0$; $\cos\Theta = 0{,}906$.

Расстояние между брэгговскими плоскостями, измеренное по дифракции рентгеновских лучей составило d=0.91Å.

Если наблюдаемый максимум обусловлен интерференцией волн де Бройля **в первом порядке**, то должно выполняться условие Вульфа-Брэгга для длины волны



$$\lambda = 2d\cdot\cos\Theta = 2\cdot 0{,}91\cdot 0{,}906 = 1{,}65\,\overset{o}{A}.$$

По де Бройлю электрону, имеющему скорость V соответствует длина волны $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{m\mathrm{V}}$.

$$eU = \frac{p^2}{2m};\quad p = \sqrt{2meU};\quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 54}} = 1{,}66\,\overset{0}{A}.$$

Полученное совпадение настолько разительно, что опыты Дэвиссона и Джермера признали блестящим подтверждением идеи де Бройля.

Паджет Томсон и независимо от него Тартаковский получили дифракционную картину при прохождении электронного пучка через металлическую фольгу. Ускоряющее напряжение было от 17 до 57 кВ.

Разделение картин от дифракции электронов и вторичных рентгеновских лучей проводилось магнитным полем.

Соотношение де Бройля подтвердилось и на дифракционных опытах с нейтронами, атомами и легкими молекулами.

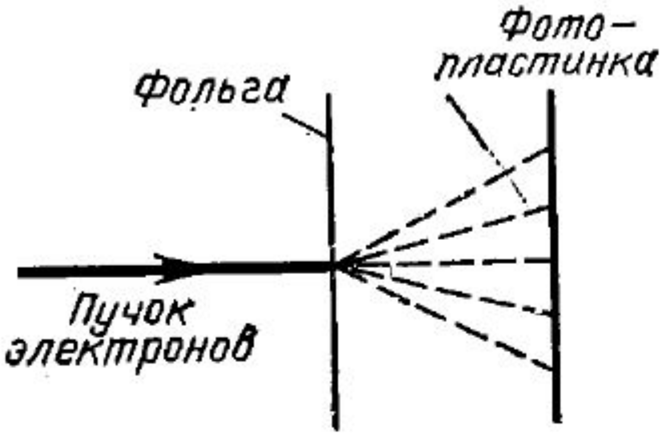
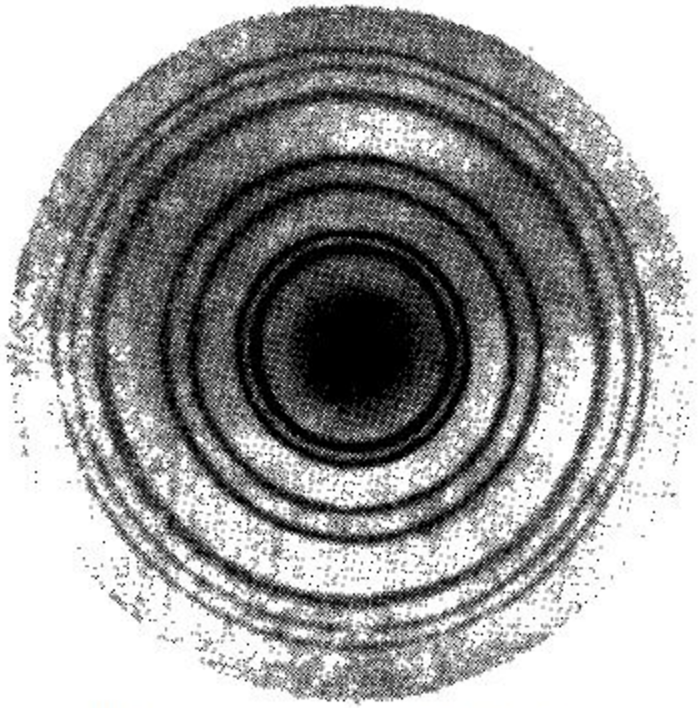


Схема установки для изучения дифракции электронов



Дифракционная картина быстрых электронов на золотой фольге

Джордж Паджет Томсон (*George Paget Thomson 1892-1975*)
[Нобелевская премия по физике] 1937 г. «за экспериментальное открытие [дифракции электронов] на [кристаллах]» (совместно с [Джозефом Дэвиссоном]).

Волны де Бройля

$$\omega = \frac{E}{\hbar}; \qquad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}.$$

Определим модуль волнового вектора и его проекции:

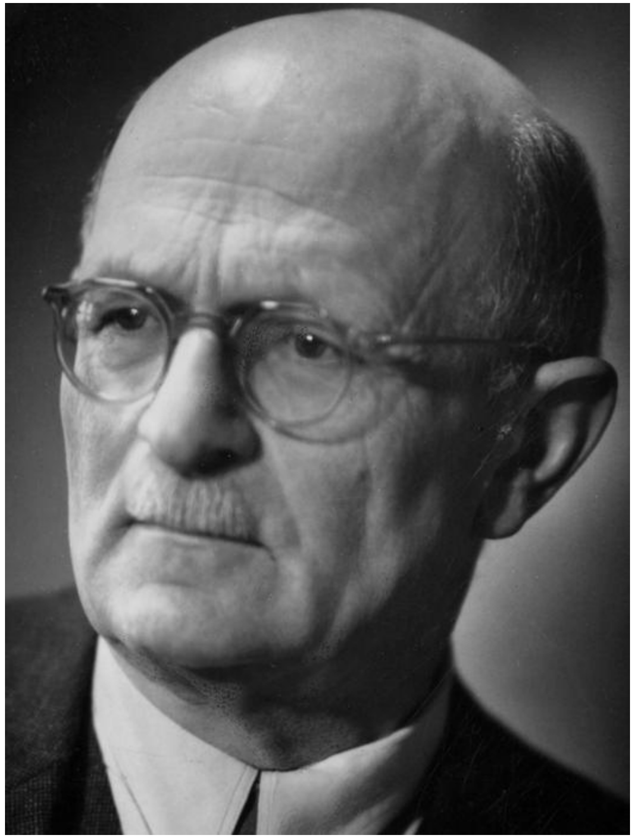
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi\hbar}{p}\right)} = \frac{p}{\hbar}; \qquad k_x = \frac{p_x}{\hbar}; \quad k_y = \frac{p_y}{\hbar}; \quad k_z = \frac{p_z}{\hbar}.$$

Напишем уравнение плоской волны для этого процесса, пока не останавливаясь на его физическом смысле. Частице, движущейся в положительном направлении оси *Ox* сопоставим **волновую функцию:**

$$\boxed{\Psi = A\exp\left[-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)\right] = A\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et - px\right)\right].}$$

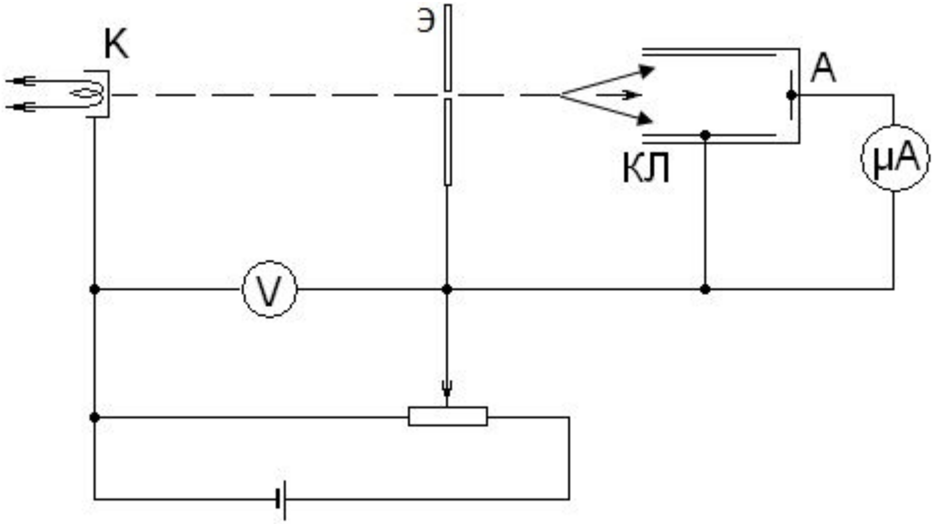
ЭФФЕКТ РАМЗАУЭРА

Эффе́кт Рамза́уэра (известен также как **эффе́кт Рамза́уэра — Таунсе́нда**) — явление аномально слабого рассеяния медленных электронов атомами тяжелых инертных газов. Впервые наблюдался в 1921 Карлом Рамзауэром при изучении рассеяния электронов в аргоне.

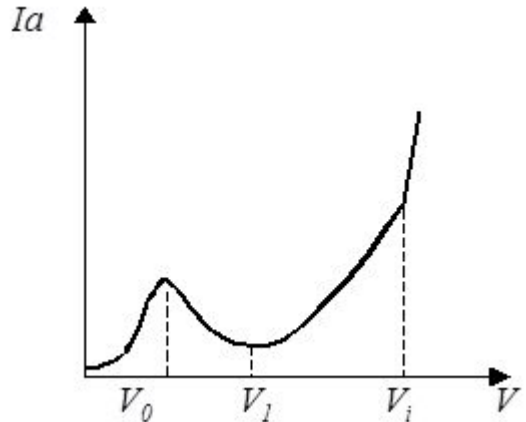


Карл Рамзауэр (С. Ramsauer, 1879-1955), — немецкий физик.

Разность потенциалов между электродами Э,Кл,А равна нулю >> После экрана электроны летят по инерции. Ток характеризует проницаемость газа для электронного пучка в зависимости от его скорости (ускоряющего напряжения).



В классической физике эффективное сечение рассеяния падает с ростом скорости рассеивающихся частиц. Качественно это можно понять из того, что изменение импульса электрона $\Delta p = F\Delta t$. Следовательно, при заданном силовом поле изменение импульса будет тем меньше, чем быстрее электрон проскочит силовое поле. То есть ток при упругих столкновениях должен монотонно расти с напряжением. Однако в эксперименте наблюдается совсем другая картина:

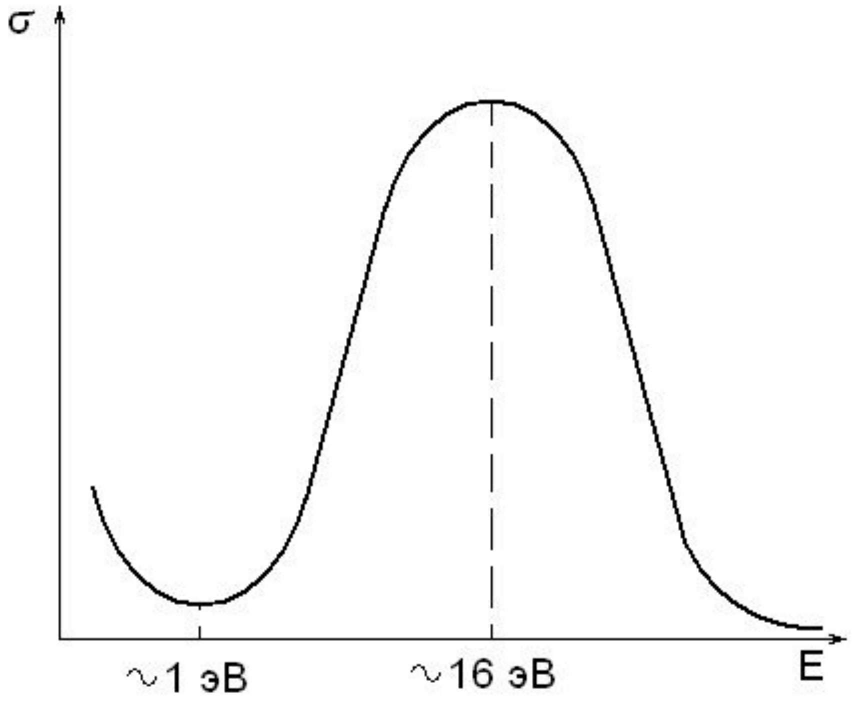


к16л180415

Такое поведение ВАХ и поперечного сечения оказалось свойственно не только для аргона, но и для других тяжелых инертных газов. В то же время эффект отсутствует в легких инертных газах: *He*, *Ne*. Эти экспериментальные факты, очевидно противоречат классическим представлениям. Объяснение эффекта **потребовало учета волновой природы электронов**.

С волновых позиций дело обстоит следующим образом. Примем потенциальную энергию электрона, удаленного от атома за нуль. Т.е. вдали от атома вся энергия электрона определяется его кинетической энергией. Так как мы рассматриваем медленные электроны, то

$$E = \frac{p^2}{2m};\ p = \sqrt{2mE}.$$



Качественная картина результатов измерения упругого рассеяния электронов в аргоне

Внутри атома скорость электрона изменяется за счет взаимодействия с зарядами, входящими в состав атома. В то же время, так как **взаимодействие упругое**, полная энергия электрона сохраняется и поэтому можно написать:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(p')^2}{2m} + U;\ \ p' = \sqrt{2m(E-U)}.$$

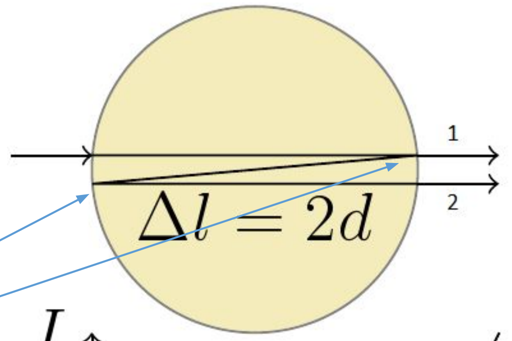
где U – потенциальная энергия взаимодействия электрона с атомом, а p’ - его импульс внутри атома.

Из этого соотношения ясно, что де бройлевская длина волны электрона в атоме и вне его отличаются. В самом деле,

$$p = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda};\ \Rightarrow\ \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p};\quad \lambda' = \frac{2\pi\hbar}{p'}.$$

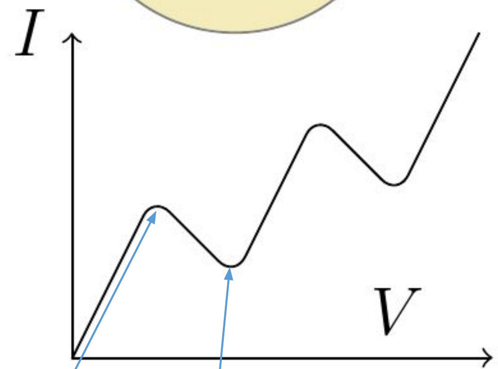
Следовательно, отношение длин волн, т.е. показатель преломления для волн де Бройля при рассеянии электронов на атоме равен

$$n = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{p'}{p} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\sqrt{2mE}} = \sqrt{1-\frac{U}{E}};$$



Рассмотрим интерференцию для волн де Бройля в атоме, пересекающих его по траекториям близким к диаметру. Так же как и для волн другой природы, например, механических или электромагнитных, при переходе из среды с одним показателем преломления в среду с другим показателем преломления часть волны испытывает отражение от границы.

Изменение потенциальной энергии будем считать происходящим только на границе атома.



Важно, что после пересечения границы атома электрон оказывается в потенциальной яме, скатываясь в неё, он приобретает дополнительный импульс. Потенциальная энергия взаимодействия ядра и электрона отрицательна $U = -E_0$, поэтому

$$\lambda' = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E+E_0)}} < \lambda.$$

Это и понятно, так как ядро без внешних электронов притягивает электрон и увеличивает его скорость. Так как волны «1» и «2» когерентны (связаны), то в результате их интерференции может происходить как увеличение, так и уменьшение амплитуды результирующей волны. Если на дополнительном пути волны «2» уложится целое число длин волн (в атомной среде, т.е. λ'), то произойдет усиление волны в направлении исходного волнового вектора, если же полуцелое число длин волн – то ослабление. Таким образом, условие первого максимума амплитуды прошедшей волны (минимум рассеяния) выглядит как:

$$2l = \lambda' = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E_1+U_0)}}. \qquad E_1 = eV_1; \qquad E_2 = eV_2;$$

Условие минимума амплитуды

$$2l = \frac{1}{2}\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m\left(E_2 + U_0\right)}};$$

Вышеизложенное рассмотрение не было проведено ни де Бройлем, ни Рамзауэром. Оно стало очевидным только после утверждения квантовой механики как последовательной теории микромира, но этот эффект является ярчайшим проявлением волновых свойств материи и **был открыт за три года** до того как де Бройль опубликовал свою работу.

ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛН ДЕ БРОЙЛЯ

Координату, соответствующую постоянной фазе плоской волны можно найти из условия: $\omega t - kx = \mathrm{const};$

Для волны де Бройля

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = c\frac{c}{v} > c.$$

Фазовая скорость относится чисто к гармонической волне, не имеющей ни начала ни конца. Она не характеризует скорость передачи сигнала а потому на неё не наложено никаких ограничений.

Мы, тем не менее, можем представить любой сигнал, как результат наложения гармонических волн с подходящими частотами, фазами и амплитудами, как это следует из теоремы Фурье. В одной части пространства волны будут усиливать друг друга, а в другой гасить. Такая совокупность гармонических волн называется **волновым пакетом**.

ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ

Рассмотрим плоские волны, зависящие только от одной пространственной координаты и от времени. Пусть у нас имеется совокупность плоских волн, волновые вектора которых непрерывно изменяются в интервале $2\Delta k$. Выберем на этом интервале среднюю точку k_0. Тогда результат суперпозиции волн на этом интервале представится интегралом

$$U = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\cos(\omega t - kx)\,dk.$$

Будем считать, что в нашем случае амплитуда от волнового вектора не зависит. Зависимостью же частоты от k мы пренебрегать не будем. Эта зависимость часто рассматривается в различных физических явлениях, носит специальное название – **ЗАКОН ДИСПЕРСИИ** (для ЭМВ $\omega = ck$). В общем случае зависимость ω(k) можно разложить в ряд по степеням аргумента:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0) + \left.\frac{d^2\omega}{2!\partial k^2}\right|_{k=k_0}(k-k_0)^2 + \dots \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0)\dots$$

$$(k-k_0) \to 0$$

$$U = a(k_0)\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \cos\left[\left(\omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0)\right)t - kx\right]dk =$$

$$U = a(k_0)\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \cos\left\{\underbrace{\left[\left(\omega(k_0) - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot k_0\right)t\right]}_{a} + \underbrace{\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right)}_{b}\cdot k\right\}dk =$$

Первый член от k не зависит, второй ~ k, а и b - cosnt

$$U = a(k_0)\int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \cos\left(a + bk\right) dk = a(k_0)\left.\frac{\sin\left(a+bk\right)}{b}\right|_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} =$$

$$= \frac{a(k_0)}{b}\left\{\sin\left[a + b\left(k_0 + \Delta k\right)\right] - \sin\left[a + b\left(k_0 - \Delta k\right)\right]\right\} =$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$U = \frac{2a\left(k_0\right)}{b}\sin\left(b\Delta k\right)\cdot\cos\left(a + bk_0\right);$$

$$a = \left(\omega\left(k_0\right) - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} k_0\right)\cdot t; \qquad b = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x;$$

$$U = \frac{2a\left(k_0\right)}{b}\sin\left[\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right)\right]\cdot\cos\left[\omega\left(k_0\right)t - \cancel{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot k_0 t} + \left(\cancel{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t} - x\right)\cdot k_0\right];$$

$$U = \frac{2a\left(k_0\right)}{b}\sin\left[\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right)\right]\cos\left[\omega\left(k_0\right)t - k_0 x\right];$$

Подставим значение «b» и умножим и поделим на Δk

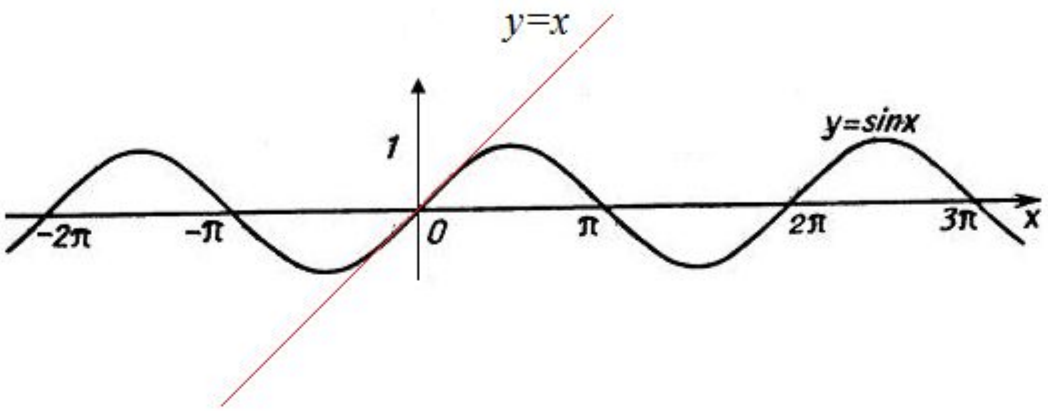
$$U = 2a\left(k_0\right)\Delta k \frac{\sin\left[\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right)\right]}{\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right)}\cdot\cos\left[\omega\left(k_0\right)t - k_0 x\right];$$

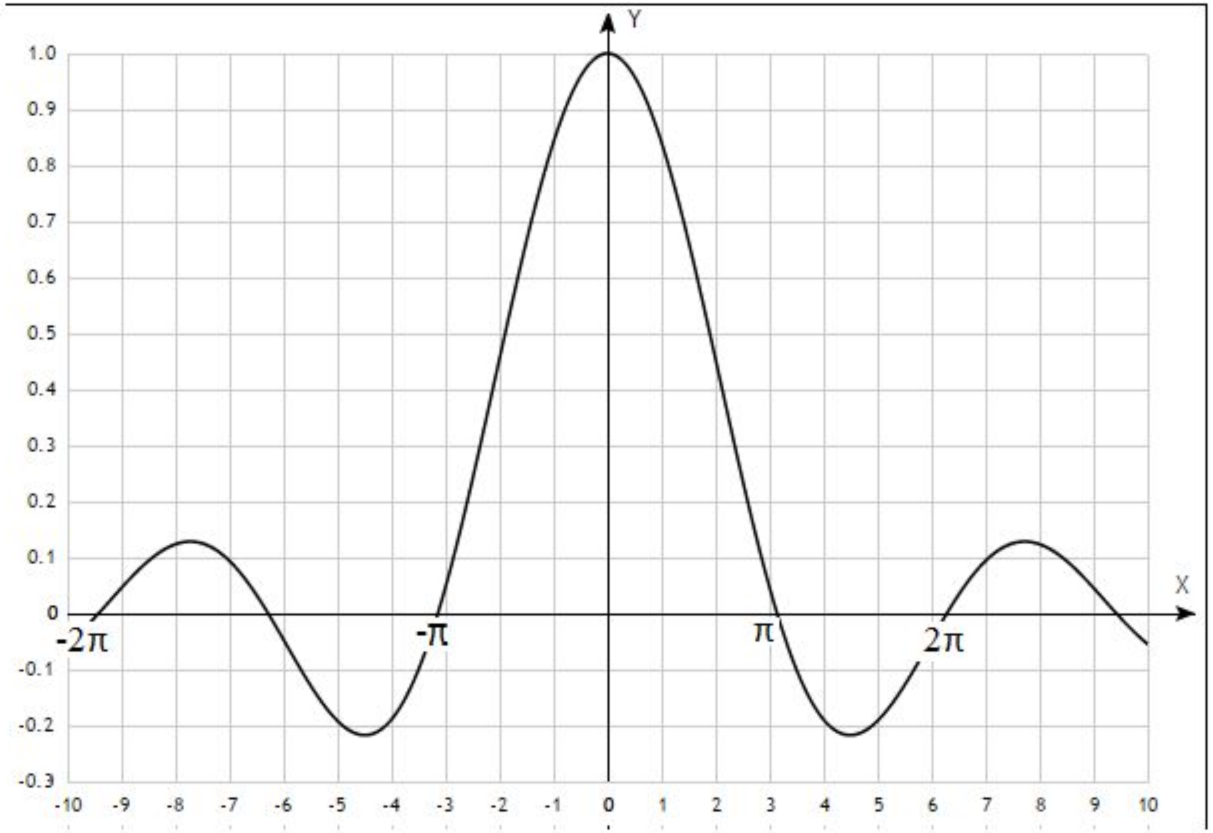
Взяв достаточно малый интервал Δk в аргументе синуса, можно всегда сделать так, что синус как функция *t* и *x* будет изменяться, заметно медленнее, чем $\cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right)$. Поэтому первый множитель (низкочастотный) будет определять амплитуду, а второй – фазу нашего сложного процесса.

Обозначим $\Delta k\left[\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\cdot t - x\right] = \xi;$

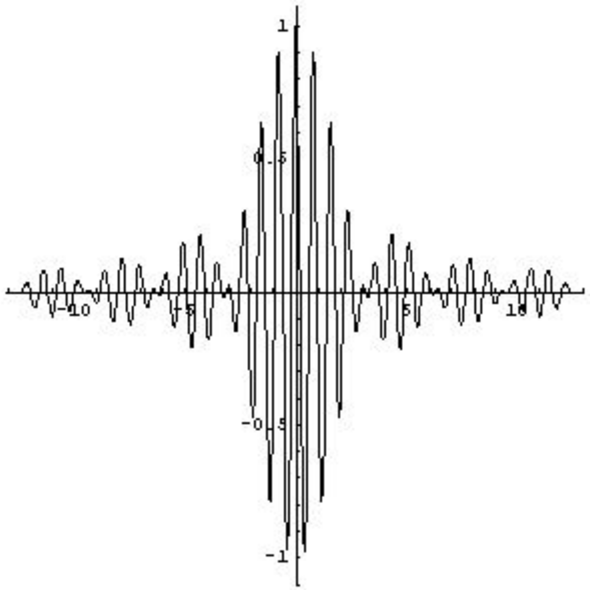
Характер изменения амплитуды определяется множителем $\frac{\sin\xi}{\xi}$. Отметим значения этой функции в некоторых точках:

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi} = 1; \qquad \left.\frac{\sin\xi}{\xi}\right|_{\xi=\pi n} = 0.$$

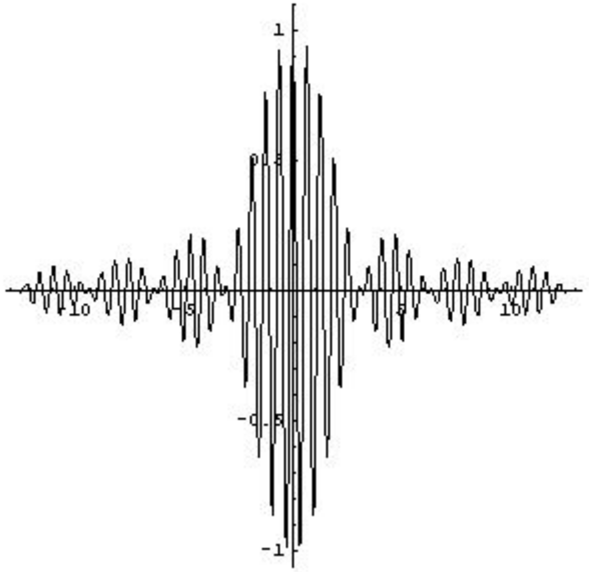




y=sin*x*/*x*



(1 / x) Sin[x] Cos[8 x]



(1 / x) Sin[x] Cos[10 x]

ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

$$\omega_0 t - k_0 x = \text{const}; \qquad \omega_0 - k_0 \frac{dx}{dt} = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = V_ф = \frac{\omega_0}{k_0};$$

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t - x = \text{const}; \qquad \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} - \frac{dx}{dt} = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{гр} = \frac{d\omega}{dk};$$

Полученные результаты связаны со сделанным приближением, а именно, мы отбросили в разложении по степеням волнового вектора все нелинейные члены.

$$\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} = 0$$

В этом случае групповая скорость не зависит от частоты и волновой пакет распространяется как единое целое. Если же вторая производная отлична от нуля, то групповая скорость оказывается функцией частоты. Более быстрые компоненты волнового пакета будут забегать вперед, медленные – отставать и **пакет расплывется**.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Найдем теперь соотношение между пространственными размерами пакета и интервалом сплошного спектра, который требуется использовать для того, чтобы пакет имел заданные размеры. Будем считать размер пакета равным расстоянию между двумя первыми минимумами и обозначим его Δx. Зафиксируем время и положим его равным нулю, тогда форма пакета определиться множителем

$$U = 2a(k_0)\Delta k \frac{\sin\left[\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot t - x\right)\right]}{\Delta k\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot t - x\right)} \cdot \cos\left[\omega(k_0)t - k_0 x\right]; \qquad \frac{\sin \Delta k \cdot x}{\Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0}, \qquad \xi_0 = \Delta k \cdot x.$$

Этот множитель обращается в нуль при $\xi_0 = \pm\pi n$. Если мы выберем начало координат в точке оси, Ox соответствующей главному максимуму, то координаты первых минимумов справа и слева от этого максимума будут $\pm\Delta x/2$. Принимая во внимание, что следующие максимумы быстро убывают по величине как $\sin\xi_0/\xi_0$.

$$\Delta k \frac{\Delta x}{2} = \pi; \qquad \Delta k \Delta x = 2\pi. \qquad *$$

Между пространственным протяжением пакета в определенный момент времени (в данном случае при t = 0) и сплошным спектром гармонических волн, необходимых для образования этого пакета, существует определенное соотношение, выражаемое условием *. Безгранично протяженной синусоидальной волне ($\Delta x \to \infty$) соответствует определенное значение волнового вектора, и, соответственно, длина волны λ. Однако, если волна ограничена в пространстве, то такому волновому пакету неизбежно соответствует целый спектр длин волн, имеющий ширину такую, что половина ширины спектра

$$\Delta k \ge \frac{2\pi}{\Delta x}.$$

Сейчас мы рассмотрели мгновенную фотографию волны, положив $t = \text{const}$. Можно сделать наоборот, зафиксировать координату, тогда при фиксированном $x = \text{const} = 0$, ξ будет зависеть только от времени

$$\xi = \Delta k \left[\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot t - x \right] = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \Delta k \cdot t$$

и двум первым минимумам волнового пакета уже будет соответствовать интервал Δt такой, что

$$\Delta k \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 \Delta t \geq 2\pi \Rightarrow \Delta\omega \ \Delta t \geq 2\pi.$$

$\Delta\omega$ - половина частоты интервала, как и Δk – половина интервала волновых чисел. Для того, чтобы локализовать процесс во временном интервале Δt, необходимо использовать частотный интервал

$$\Delta\omega \geq \frac{2\pi}{\Delta t}.$$

ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ ИЗ ВОЛН де БРОЙЛЯ

Фундаментальным свойством частицы является ее локализация в пространстве и во времени. Однако функция $\Psi(r,t)$, в виде, использованном нами ранее, не удовлетворяет этому свойству. Можно попытаться добиться локализации, представив волновой процесс в виде пакета из функций

$$\psi(r,t) = A\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-px)\right]; \quad \Rightarrow \quad \Psi(x,t) = \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} A(p)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-px)\right]dp.$$

Свойства волнового пакета де Бройля

Групповая скорость $V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$; $E = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$.

1. В случае $m_0 = 0$, $E = cp$, $V_{гр}$ совпадает со скоростью частицы и равна константе $\frac{dE}{dp} = c = const$, поэтому волновые пакеты вполне возможны.

2. В случае $m_0 \neq 0$, $E = c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$; $\frac{dE}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}$; - групповая скорость является функцией импульса, и, следовательно, волнового числа $\Rightarrow \frac{d^2E}{dp^2} = 0$ - пакет расплывается.

Даже в нерелятивистском случае $\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p^2}{2m_0}\right) = \frac{1}{m_0}$ - пакет из волн де Бройля оказывается неустойчивым

Если провести вычисления, которые мы с вами пока не в силах сделать, то можно получить оценку, что для частиц с массой электрона $0{,}01\cdot10^{-27}$ при полуширине пакета 10^{-12} см, ширина пакета удваивается за время $1{,}6\cdot10^{-26}$, т.е. практически мгновенно, что, конечно, противоречит всем наблюдениям!!!

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛН де БРОЙЛЯ. НОРМИРОВКА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Общепринятое теперь толкование волновой функции дал Макс Борн в 1926 году. Согласно Борну квадрат модуля волновой функции определяет вероятность *dP*, того, что описываемая ей частица будет обнаружена в пределах объёма *dV*:

$$dp = |\psi|^2 dV; \quad |\psi|^2 = \psi^* \psi;$$

$$\boxed{|\psi|^2 = \frac{dP}{dV};}$$ **Плотность вероятности**

$$\boxed{\psi}$$ **Амплитуда вероятности**

Вероятность найти частицу в момент времени *t* в конечном объёме V, согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$P = \int_V |\psi|^2 dV$$

Если интегрировать по всему доступному для частицы объёму, то мы получим вероятность достоверного события

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1.$$ **Условие нормировки**

Функция, отвечающая условию нормировки, называется **нормированной.**

Макс Борн (*Max Born*; 1882-1970). Нобелевская премия по физике 1954 г. *«за фундаментальные исследования по квантовой механике, в особенности за статистическую интерпретацию волновой функции»*

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Плоская электромагнитная или механическая гармоническая волна являются решением так называемого волнового уравнения, имеющего вид

$$\nabla^2\xi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0. \qquad *$$

Гармоническое решение волнового уравнения $\xi = a_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$, $\quad \xi = a_0\left(\frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}+\alpha)} + e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r}+\alpha)}}{2}\right)$. $\quad **$

Подставляя гармоническое решение в исходное уравнение, получаем закон дисперсии для такого типа волн

$$\frac{\omega^2}{V^2} = k^2 \text{ или } \quad \omega = kV.$$

Есть искушение предположить, что и волны де Бройля должны удовлетворять уравнению, подобному волновому, однако, учтён ли будет при этом корпускулярно-волновой дуализм, который в частности выражен в законе дисперсии?

Подставляя $\psi = A\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right\}$ в *, получаем $E = cp$, а должно быть в релятивистском случае $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, $E = \frac{p^2}{2m}$

и для свободного движения классической нерелятивистской частицы.

Из соотношений де Бройля получаем $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2m}k^2.$

Таким образом, мы видим, волнам де Бройля соответствует совсем иной закон дисперсии в сравнении классическими волнами. Значит ясно, что:

1. Это физически совершенно не похожий ни на какую до сих пор встречающуюся волну объект;
2. Волны де Бройля не могут быть решениями стандартного волнового уравнения.