Общее уравнение кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Предполагается, что среди коэффициентов уравнения a_{11}, a_{12}, a_{22} есть отличные от нуля.

Уравнение окружности с центром в точке C(a, b) и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (2.9)$$

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная 2a.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 = 1. \qquad (2.10)$$

Эллипс, заданный уравнением (2.10), симметричен относительно осей координат. Параметры *a* и *b* называются *полуосями* эллипса.

Пусть a>b, тогда фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от точки M(x, y) эллипса до его фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

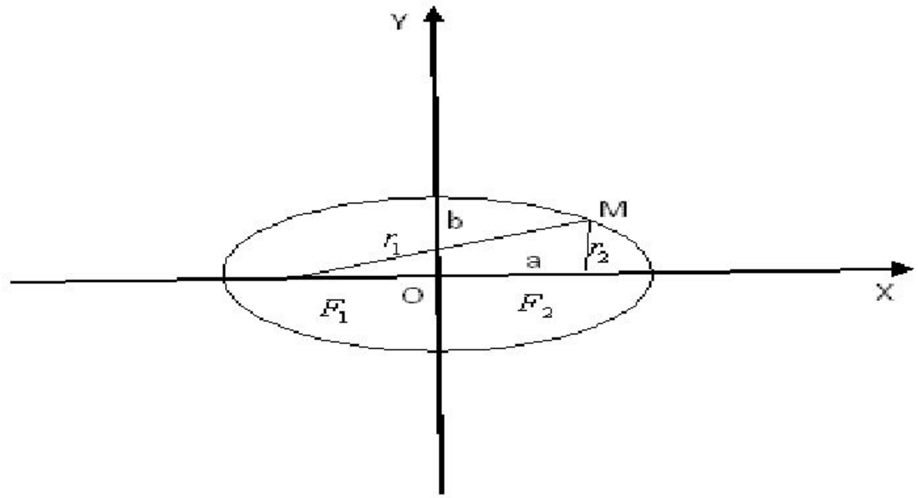
$$r_1 = a - \varepsilon x, \; r_2 = a + \varepsilon x.$$

Если же a < b, то фокусы находятся на оси Oy, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$,
$r_1 = b + \varepsilon x$, $r_2 = b - \varepsilon x$.

Если a = b, то эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса *a*.

Он имеет два фокуса. **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.

Чертеж фигуры эллипс



F_1 , F_2 – фокусы . F_1 = (c ; 0); F_2 (- c ; 0)

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) равна по абсолютной величине данному числу 2a.

Каноническое уравнение гиперболы

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1. \qquad (2.11)$$

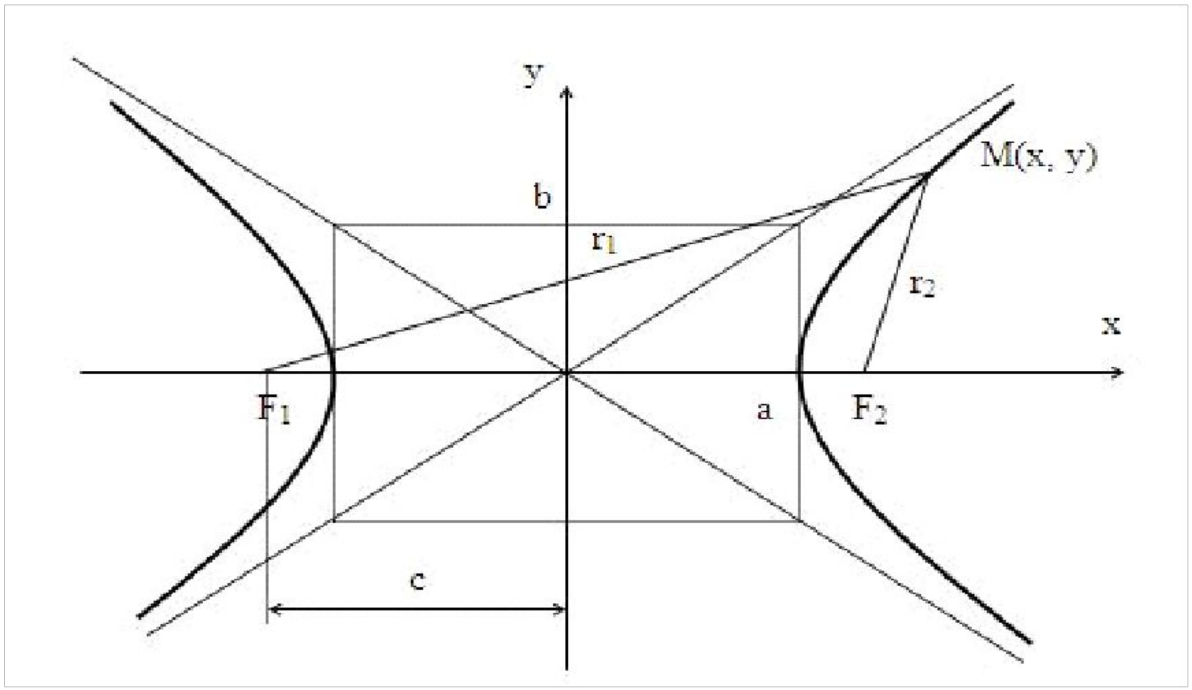
Гипербола, заданная уравнением (2.11), симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось Ox в точках A (a,0) и A (-a,0) - вершинах гиперболы и не пересекает ось Oy. Параметр *a* называется *вещественной полуосью*, *b* - *мнимой полуосью*. Параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}$ есть расстояние от фокуса до начала координат. Отношение $c/a = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Прямые, уравнения которых $y = \pm\, b/a\ x$ называются *асимптотами* гиперболы. Расстояния от точки M(x,y) гиперболы до ее фокусов (фокальные радиусы-векторы) определяются формулами:

$$r_1 = |\,\varepsilon x - a\,|,\ r_2 = |\,\varepsilon x + a\,|.$$

Гипербола, у которой a = b, называется *равносторонней*, ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, а уравнение асимптот $y = \pm x$. Гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ называются *сопряженными*.

Гипербола и ее свойства

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 2a$. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ – фокусы гиперболы. $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 = 2c$.

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ - парабола симметрична относительно оси Ox.

2) $x^2 = 2py$ - парабола симметрична относительно оси Oy.

В обоих случаях $p>0$ и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2 = 2px$ имеет фокус $F(p/2,0)$ и директрису $x = -p/2$, фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ на ней $r = x + p/2$.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$ имеет фокус $F(0, p/2)$ и директрису $y = -p/2$; фокальный радиус-вектор точки $M(x,y)$ параболы равен $r = y + p/2$.

Пример 1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку A(3,1) и наклоненных к прямой 2x+3y-1 = 0 под углом 45°.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде y=kx+b. Поскольку прямая проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. 1=3k+b, $\Rightarrow$ b=1-3k. Величина угла между прямыми

$y = k_1 x + b_1$ и $y = kx + b$ определяется формулой $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}\right|$. Так как угловой коэффициент k_1 исходной прямой 2x+3y-1=0 равен - 2/3, а угол φ = 45°, то имеем уравнение для определения k:

(2/3 + k)/(1 - 2/3k) = 1 или (2/3 + k)/(1 - 2/3k) = -1.

Имеем два значения k: k_1 = 1/5, k_2 = -5. Находя соответствующие значения b по формуле b=1-3k, получим две искомые прямые, уравнения которых: x - 5y + 2 = 0 и
5x + y - 16 = 0.

Пример 2. При каком значении параметра *t* прямые, уравнения которых $3tx-8y+1 = 0$ и $(1+t)x-2ty = 0$, параллельны ?

Решение. Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при *x* и *y* пропорциональны, т.е. $3t/(1+t) = -8/(-2t)$. Решая полученное уравнение, находим *t*: $t_1 = 2$, $t_2 = -2/3$.

Пример 3. Найти уравнение общей хорды двух окружностей:
$x^2 + y^2 = 10$ и $x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Решение. Найдем точки пересечения окружностей, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 10 - 10x - 10y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (4 - x)^2 = 10 \\ y = 4 - x \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим значения $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Из второго уравнения - соответствующие значения *y*: $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Теперь получим уравнение общей хорды, зная две точки A(3,1) и B(1,3), принадлежащие этой прямой: $(y-1)/(3-1) = (x-3)/(1-3)$, или $y + x - 4 = 0$.

Пример 4. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям $(x-3)^2 + (y-3)^2 < 8,\ x > y$?

Решение. Первое неравенство системы определяет внутренность круга, не включая границу, т.е. окружность с центром в точке (3,3) и радиуса $\sqrt{8}$. Второе неравенство задает полуплоскость, определяемую прямой, уравнение которой $x = y$, причем, так как неравенство строгое, точки самой прямой не принадлежат полуплоскости, а все точки ниже этой прямой принадлежат полуплоскости. Поскольку мы ищем точки, удовлетворяющие обоим неравенствам, то искомая область - внутренность полукруга

Пример 5. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс, уравнение которого $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Решение. Пусть *M(c, c)* - вершина квадрата, лежащая в первой четверти. Тогда сторона квадрата будет равна 2*c*. Т.к. точка *M* принадлежит эллипсу, ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса $c^2/a^2 + c^2/b^2 = 1$, откуда

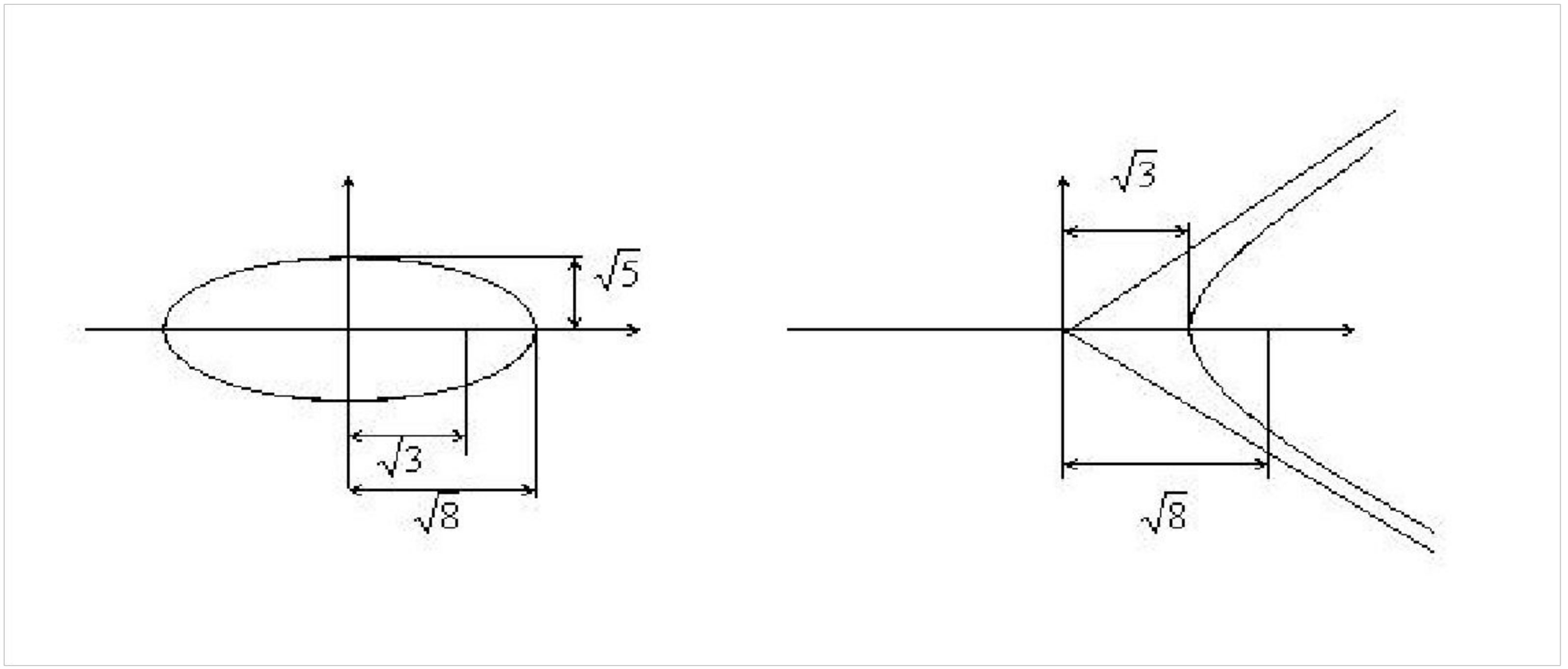
$c = ab/\sqrt{a^2+b^2}$; значит, сторона квадрата - $2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 6. Зная уравнение асимптот гиперболы $y = \pm 0,5\ x$ и одну из ее точек $M(12, 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y = \pm 0,5\ x$, значит, $b/a = 1/2$, откуда $a=2b$. Поскольку *M* - точка гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, т.е. $144/a^2 - 27/b^2 = 1$. Учитывая, что $a = 2b$, найдем b: $b^2=9 \Rightarrow b=3$ и $a=6$. Тогда уравнение гиперболы - $x^2/36 - y^2/9 = 1$.

Пример 7 . Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.



Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$

Пример 8 . Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 – 9 = 16$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c / a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;

$b^2 = 16 – 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ - искомое уравнение.