Булевы функции

Высказывания - логические величины, логические константы

Высказывание (суждение) – это повествовательное предложение, в котором что-либо утверждается или отрицается.

По поводу любого высказывания можно сказать **истинно** оно или **ложно**.

Высказывания бывают общими, частными или единичными

- Общее высказывание начинается со слов: **все, всякий, каждый, ни один**
- Частное высказывание начинается со слов: **некоторые, большинство**, и т.п.
- Во всех других случаях высказывания являются единичными

Какие из приведённых высказываний являются общими?

- Не все книги содержат полезную информацию

  Да
- Кошка является домашним животным

  Нет
- Все солдаты храбрые

  Да
- Ни один внимательный человек не совершит оплошность

  Да

Какие из приведённых высказываний являются частными?

- Некоторые мои друзья собирают марки

  Да

- Все лекарства неприятны на вкус

  Нет

- А – первая буква в алфавите

  Нет

- Многие растения обладают целебными свойствами

  Да

Логические переменные, выражения, операции

- **Логическая переменная:** символически обозначенная логическая величина

(A, B, X, Y, …)

- **Логическое выражение** – простое или сложное высказывание

Понятие

Булева функция

это функция, аргументы и значение которой принадлежит множеству { 0, 1 }.

f $(x_1;x_2)$

или истины (TRUE) и лжи (False).

Это раздел математики, возникший в XIX веке благодаря усилиям английского математика Дж. Буля.

Применение в описании и разработке различных электронных схем.

Законы алгебры логики стали использоваться при проектировании различных частей компьютеров (память, процессор).

Основные функции

Операция отрицания (инверсия)

Присоединение «**НЕ**»к высказыванию меняет его истинное значение на противоположное

Логическое отрицание обозначается: $\neg A$, $\overline{A}$ **,**
, ~A

Таблица истинности

(А- исходное высказывание, **1** – истина, **0** - ложь)

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Операция логического умножения (конъюнкция)

Объединение высказываний с помощью логического «**И**».

Высказывание, полученное в результате конъюнкции, **ложно** тогда и только тогда, **когда ложно хотя бы одно из входящих высказываний**

Конъюнкция обозначается $\wedge$, & **или** ×

Таблица истинности

(А и В -исходные высказывание, **1** – истина, **0**-ложь)

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операция логического сложения (дизъюнкция)

Соединение высказываний с помощью логического **«или»**.

Высказывание, полученное в результате дизъюнкции, **истинно** **тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных высказываний.**

Дизъюнкция **обозначается «V» или «+»**

Таблица истинности

A	B	AVB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операция импликации (следствие)

Грамматической конструкции **«если..., то...».**

Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение - ложно. В остальных случаях импликация истинна. →

***Импликация* обозначается знаками « »**

Пример: А=«выглянет Солнце»

В=«станет тепло»

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ (ИМПЛИКАЦИЯ)

A – «На улице дождь»
B – «Асфальт мокрый»

A → B – «Если на улице дождь, то асфальт мокрый»

Смысл высказываний A и B для указанных значений		A → B
Дождя нет	**Асфальт мокрый**	**Истина**
Дождь идет	**Асфальт сухой**	**Ложь**
Дождя нет	**Асфальт сухой**	**Истина**
Дождь идет	**Асфальт мокрый**	**Истина**

Таблица истинности

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операция эквивалентности (равносильность)

Полученное сложное высказывание содержит слова **«тогда и только тогда, когда»**…

Эквивалентность истинна, если оба исходных высказывания имеют одинаковые истинностные значения.

Эквивалентность обозначается знаком « ≡ »

или $\leftrightarrow$ ***.***

Пример: Прямоугольник является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

Таблица истинности

A	B	A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$(A$ и $B)$ или $(\bar{A}$ и $\bar{B})$

$(A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$

A	B	A & B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \& \bar{B}$	$(A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Каждая логическая функция двух аргументов имеет четыре возможных набора значений аргументов. Может существовать $N = 2^4 = 16$ различных логических функций двух аргументов.

Законы булевых операций

Коммутативность

$x \& y = y \& x$

$x \vee y = y \vee x$

Ассоциативность

$(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

Дистрибутивность

(xVy)^z=(x^z)V(y^z)

(x^y)Vz=(xVz)^(yVz)

Закон де Моргана

$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

x&x=x xVx=x

Закон тождества:

A = A

Закон исключенного третьего:

A V ¬A = 1

Закон непротиворечия:

¬(¬ A ^ A) = 1

A ^ ¬A =0.

Закон двойного отрицания:

¬ ¬A = A

Решение задач

Пример 1. Упростить: A ^B V A ^ ¬B

По закону дистрибутивности вынесем A за скобки:

A ^B V A ^ ¬B = A ^ (B V ¬B)

= A ^ 1= A

Пример 2. Упростить: ¬ (¬ X V ¬Y)

¬ (¬ X V ¬Y) =

применим закон де Моргана

¬¬ X ^ ¬¬ Y = X ^ Y

Пример 3.

Упростить: $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

первый способ

Раскроем скобки по закону дистрибутивности:

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = A \vee (B \wedge \neg B) =$

$= A \vee 0 = A$

второй способ

Перемножим скобки (как в обычной алгебре) на основании того же закона дистрибутивности:

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) =$

$= A \wedge A \vee A \wedge \neg B \vee B \wedge A \vee \neg B \wedge B =$

$= A \vee A \wedge (\neg B \vee B) \vee 0 = A \vee A \wedge 1 = A$

Построить таблицу истинности

1. $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$
2. $X \vee Y \rightarrow (X \wedge Y)$
3. $X \wedge Z \rightarrow (X \vee Z)$

Равносильность высказываний

Формулы называются равносильными, если равносильны (равны) представленные ими высказывания.

Пример: узнать равносильны ли два высказывания

$X \rightarrow Y$ и $\overline{X} \vee Y$

X	Y	$\overline{X}$	$X \rightarrow Y$	$\overline{X} \vee Y$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$X \rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$

Составьте таблицы истинности и выяснить, равносильны ли следующие высказывания:

1. $X \rightarrow Y$ и $\overline{Y} \rightarrow X$
2. $X \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow Y \wedge Z$
3. $(Y \vee X) \wedge X$ и $X \rightarrow Y$

Задание ЕГЭ

Какое логическое высказывание равносильно выражению ¬(¬AvB)v¬C :

1. (A^¬B)v¬C 2. ¬AvBv¬C 3. Av¬B^C

Решение : преобразуем выражение по закону де Моргана:

¬(¬AvB)v¬C= (¬¬A^¬B)vC=(A^¬B)v¬C

Ответ : 1

1. Какое логическое высказывание равносильно выражению (¬A∨¬B)∨¬C

1.¬(A^B)∨¬C 2.¬A^¬B∨¬C 3. ¬A^(¬B^¬C)

Решение: вынесем отрицание за скобку ¬(A^B)∨¬C

2. Какое логическое высказывание равносильно выражению ¬(A^¬B)^¬C

1.(¬A∨B)∨¬C 2.(B^¬C)∨(¬A^¬C) 3.(¬A∨B)∨C

Решение : воспользуемся законом де Моргана (¬A∨¬¬B)^¬C=(¬A∨B)^¬C,

так как такого ответа нет продолжаем преобразовать высказывания дальше

(¬A^¬C)∨(B^¬C)

Упростить и построить таблицу истинности

1. $\overline{x \to y} \vee ((\overline{x} \vee y) \wedge x)$;

2. $\overline{x \wedge y} \vee \overline{x} \wedge (y \vee \overline{x})$

Импликация выражается через отрицание и логическое сложение:

$x \to y = \overline{x} \vee y$

1. ¬(AvB)
2. ¬A^(¬BvA)

Символом N обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения N.

Какое выражение соответствует N?

- $X \wedge Y \vee Z$
- $X \wedge Y \wedge Z$
- $(X \vee Y) \wedge Z$
- $X \wedge Y \wedge Z$

X	Y	Z	N
0	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0

Для какого слова истинно высказывание

1. ¬(первая буква слова согласная→(вторая буква слова гласная v последняя буква слова гласная))

1)ГОРА 2) БРИКЕТ 3)ТРУБКА 4) ПАРАД

2. ¬(первая и последняя буква слова согласная → первая и последняя буква совпадают)

1) КОМОК 2)ПРИВЕТ 3)ТРУБКА 4)ОКНО