Приведение формул к совершенным нормальным формам. Упрощение формул логики до минимальной ДНФ.

Презентацию подготовил:
Коробицин Павел П-14

ДНФ

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) *называется дизъюнкция попарно различных элементарных конъюнкций.*

Совершенные нормальные формы

Среди множества дизъюнктивных (равно как и конъюнктивных) нормальных форм, которыми обладает данная формула алгебры высказываний, существует уникальная форма: она единственна для данной формулы. Это так называемая совершенная дизъюнктивная нормальная форма (среди конъюнктивных форм — совершенная конъюнктивная нормальная форма).

Пример упрощения

1. Упростить СДНФ функции $f = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Решение

Вынесем за скобки в первой паре $\bar{x}y$, в последней паре выражений xy:

$$f = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) \vee x\bar{y}z \vee xy(\bar{z} \vee z)$$

Очевидно, $\bar{z} \vee z = 1$, $\bar{z} \vee z = 1$. Получим

$$f = \bar{x}y \vee x\bar{y}z \vee xy$$

Переставим местами слагаемые и вынесем за скобки y:

$$f = \bar{x}y \vee xy \vee x\bar{y}z = y(\bar{x} \vee x) \vee x\bar{y}z = y \vee x\bar{y}z$$

Воспользуемся законом дистрибутивности

$$f = y \vee x\bar{y}z = (y \vee x)(y \vee \bar{y})(y \vee z)$$

Упростим

$$f = (y \vee x)(y \vee z)$$

Еще раз воспользуемся законом дистрибутивности

$$f = (y \vee x)(y \vee z) = y \vee xz$$

Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Каждая формула имеет конечное число вхождений переменных. Под *вхождением переменной* понимается место, которое переменная занимает в формуле. Задача заключается в том, чтобы для данной булевой функции f найти ДНФ, представляющую эту функцию и имеющую наименьшее число вхождений переменных.

Определение. *Элементарным произведением* называется конъюнкт, в который любая переменная входит не более одного раза.

Пример 6.6.1. Формула $x_2\bar{x}_3x_4$ — элементарное произведение, а формула $x_1x_2\bar{x}_3x_1x_4$ элементарным произведением не является.

Определение. Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется *импликантой* формулы $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, если φ – элементарное произведение и $\varphi \wedge \psi \sim \varphi$ т. е. для соответствующих формулам ψ и φ функций f_ψ и f_φ справедливо неравенство $f_\psi \leq f_\varphi$. Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется *импликантой* функции f, если φ — импликанта совершенной ДНФ, представляющей функцию f.

Определение. Импликанта $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_{i_1}^{\delta_1} x_{i_2}^{\delta_2} \ldots x_{i_k}^{\delta_k}$ формулы ψ называется *простой,* если после отбрасывания любой литеры из φ не получается формула, являющаяся импликантой формулы ψ.

Минимизация булевых функций с помощью карт Карно

Номер набора	A	B	C
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	№ 0	№ 1
A	№ 2	№ 3

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	1
A	0	1

Рис. 5. Карта Карно для булевой функции двух переменных

Для минимизации функций относительно небольшого числа переменной (не более шести) наиболее простым и наглядным является графический метод, использующий карты Карно.

Карта Карно – это прямоугольник, разбитый на квадраты, число которых равно числу наборов рассматриваемой функции, т. е. 2^n. Клетки размечаются так, чтобы наборы, для которых возможны смежные конституенты, оказались бы в соседних клетках.

При заполнении карты Карно в ее клетки проставляют значения функции для соответствующих наборов, которые являются координатами клеток. Например, для функции двух переменных A и B (рис. 5) карта Карно имеет вид

Единицы, представленные в клетках, обозначают конституенты единицы рассматриваемой функции. Отыскание минимальной ее формы сводится к определению варианта, при котором все конституенты единицы накрываются (охватываются контурами покрытия) наименьшим числом наиболее коротких импликант. Объединение клеток на карте эквивалентно выполнению операции склеивания.

Минимизация недоопределенных функций

Недоопределенность функции означает, что запрещенные наборы никогда не появятся в процессе работы устройства. Значит, такую функцию можно произвольно доопределить, установив ее значения на запрещенных наборах, и это не отразится на работе устройства, но обчит его реализацию.

Пусть необходимо минимизировать булеву функцию, заданную картой Карно (рис. 7).

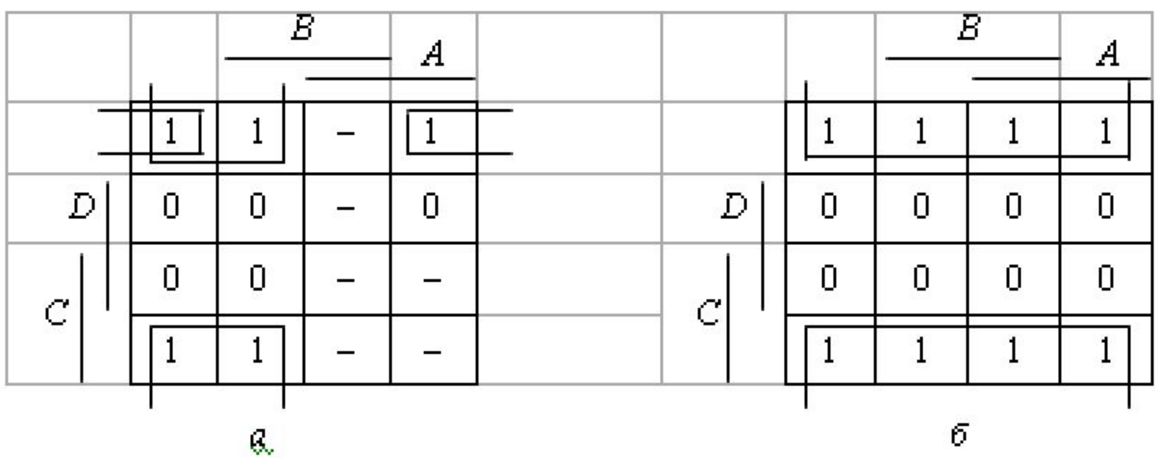

Рис. 7. Минимизация недоопределенной функции

Метод Блейка

Техника карт Карно является удобным и наглядным (при определенных ограничениях на число переменных минимизируемой функции) способом реализации алгоритма Квайна–Мак-Клоски. Но существуют и другие способы проведения склейки, т.е. получения сокращенной ДНФ для исходной функции. Одним из таких способов является чисто алгебраический метод Блейка, состоящий в том, что к любой ДНФ, представляющей функцию, применяются следующие тождества:

$$\begin{cases} xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2, \\ K_1 \vee K_1K_2 = K_1. \end{cases}$$

"Технология" использования метода Блейка такова: применяют тождество обобщенного склеивания до тех пор, пока не перестанут появляться новые элементарные конъюнкции (вида К1К2). После этого применяют тождество поглощения.

Спасибо за внимание!