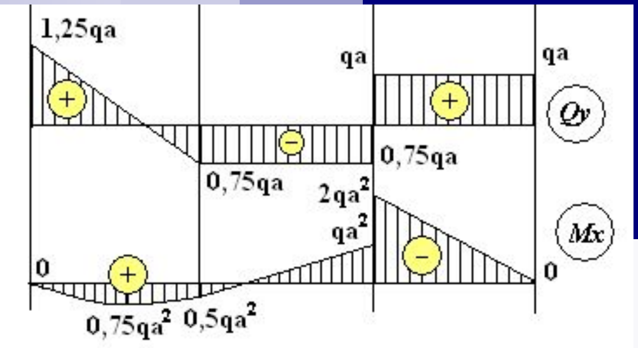


СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть 1.1

Аннотация

- Настоящее **электронное пособие** предназначено для студентов **механических** и **строительных специальностей**. Несмотря на наличие большого количества хороших учебников по курсу сопротивления **материалов М.М. Филоненко - Бородича, Н.М. Беляева, В.И. Феодосьева, А.В. Даркова, А.Ф. Смирнова** и многих других авторов студенты испытывают недостаток в учебной литературе при изучении этой дисциплины.
- Указанные курсы, отражая стремительное развитие науки и практики, от издания к изданию, увеличивали свой объем. Одновременно учебные планы по упомянутым дисциплинам насыщались другими специальными дисциплинами. При этом **объем лекционного курса по сопротивлению материалов сокращался**, и его содержание становилось менее полным.
- В настоящее время **разрыв** между **объемом** и **содержанием учебной литературы**, соответствующей достаточно полному курсу, и лекционных курсов на базе **укороченной современной программы обучения** приводит к тому, что **использование студентами солидных учебников стало почти невозможным** для изучения и усвоения основных положений **механики прочности (сопротивления материалов).**
- В этих условиях наиболее целесообразно использование **электронных учебных материалов**, отражающих программные вопросы, на основе которых возможно достаточно прочное усвоение основ механики деформируемого тела - сопротивления материалов. Последовательное предъявление материала с **использованием анимации поможет студентам понять основные закономерности и методы анализа напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости.**
- Содержание настоящего **электронного пособия** соответствует полной программе курса сопротивления материалов для механических и строительных специальностей и **опирается на учебник для вузов Александрова А.В., Потапова В.Д., Державина Б.П. Сопротивление материалов – М.: Высшая школа, 2001.**
- Пособие составлено в **форме конспекта лекций**. По нему студенты могут проверить, исправить и дополнить свои лекционные записи. В процессе такой работы у студента появится основа для проработки лекционного материала при подготовке к экзаменам и интерес к изучению дополнительных вопросов по более полным учебникам и научной литературе.

Содержание

- **Лекция 1**. Введение. Основные определения. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация свойств материала и геометрии объекта. Внешние силы. Метод сечений. Внутренние усилия.
- **Лекция 2**. Напряжения. Перемещения и деформации. Виды простейших деформаций. Внутренние усилия при растяжении-сжатии. Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.
- **Лекция 3**. Основные типы опор и балок. Чистый и поперечный изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
- **Лекция 4**. Центральное растяжение-сжатие. Принцип Сен-Венана. Напряжения и деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука. Модуль упругости. Напряжения на наклонных площадках.
- **Лекция 5**. Перемещения при растяжении сжатии. Учет собственного веса. Статически неопределимые системы при растяжении сжатии. Расчет статически неопределимых систем на действие нагрузки, температуры и неточность сборки (натяг).
- **Лекция 6.** Испытание материалов на растяжение-сжатие. Характеристики прочности и пластичности. Идеализированные диаграммы. Потенциальная энергия деформации (полная, удельная).
- **Лекция 7.** Диаграмма сжатия. Основные механические характеристики. Особенности разрушения пластических и хрупких материалов при растяжении-сжатии малоуглеродистой стали и чугуна. Понятие о ползучести и релаксации.
- **Лекция 8.** Основные сведения о расчете конструкций. Методы допускаемых напряжений и предельных состояний. Определение предельных нагрузок в статически неопределимых системах из идеального упруго-пластического материала.

Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа. 1995, 2001, 2003 г.г. 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
3. Головина Н.Я. Краткий курс лекций по сопротивлению материалов. - Тюмень : ТюмГНГУ, 2008 г. Тип электронный учебник http://elib.tsogu.ru/
4. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ. Изд. МИИТ.
5. Лабораторные работы по сопротивлению материалов (Методические указания под ред. Александрова А.В., часть 1, МИИТ, 1974 г.)
6. Бондаренко А.Н. Тренажер для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Новосибирск.2004 г.

   www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm.
7. Сборник задач по сопротивлению материалов Беляев Н.М. Паршин Л.К. Мельников Б.Е. Шерстнев В.А. и др. 3-е изд., испр. СПБ.: "Лань", 2011.-432 с. Тип электронный учебник.

ВВЕДЕНЕ

- ЛЕКЦИЯ 1

- Задача сопротивление материалов.
- Классификация сил, действующих на элементы конструкций.
- Понятие о деформациях и напряжениях.
- План решение основной задачи сопротивления материалов.
- Типы деформаций

university
Тюменский индустриальный университет

ВВЕДЕНИЕ

1. Задача сопротивление материалов

При проектировании **сооружений** и **машин** инженеру приходится выбрать **материал** и **геометрические размеры** для каждого элемента конструкции так, чтобы он **надежно сохранил свою форму**, **сопротивлялся** действию внешних сил, т.е. чтобы была **обеспечена нормальная работа каждого элемента конструкции**. **Основания для правильного решения этой задачи дает инженеру наука о сопротивлении материалов (СМ)**

Это **наука изучает поведение различных материалов** при действии на них **сил** и **указывает**, как **подобрать для каждого элемента конструкции материал** и **поперечные размеры** при условии **полной надежности работы** и **наибольшей дешевизны конструкции**.

Требования **надежности** и **экономии противоречат друг другу**. **Надежность ведет к увеличению расхода материала, экономии требует снижения этого расхода.** Это **расхождение** является **важнейшим элементом научной методики**, обусловливающей **развитие СМ.**

Когда существующие **материалы** и **методы проверки прочности не в состоянии удовлетворить потребностям практики**, тогда приходится решение новых задач, т.е. начинаются поиски **новых материалов**, **исследование их свойств**, **улучшение** и **создание новых методов расчета** и **проектирования**.

Сопротивление материалов – наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов сооружений и деталей машин.

2. Классификация сил, действующих на элементы конструкций.

При работе **сооружений** и **машин их части воспринимают внешние нагрузки** и действие их передают друг другу. Например:

1. Платина воспринимает свой **собственный вес** и **давление воды** и передает эти силы на **основание;**
2. **Давление пара** в цилиндре паровой машины передается на **шток поршня;**

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

3. **Сила тяги** локомотива передается поезду через стяжку, соединяющую его с вагонами;

4. Стальные фермы моста воспринимают от колес через рельсы **вес поезда** и передают его на каменные опоры; последние в свою очередь передают нагрузку на грунт основания.

Таким образом, **силы воспринимаемые конструкции представляет собой следующие силы:**
1). Объемные силы; (напр. собственный вес конструкции).
2). Силы взаимодействия.(напр. между рассматриваемым элементом и соседними).

Классификацию сил можно произвести по нескольким признакам.

Силы можно разделить:
1. Сосредоточенные силы (*P* или *F*);
2. Распределенные силы (*Q = q·l, где q – интенсивность, l – длина пролета*).

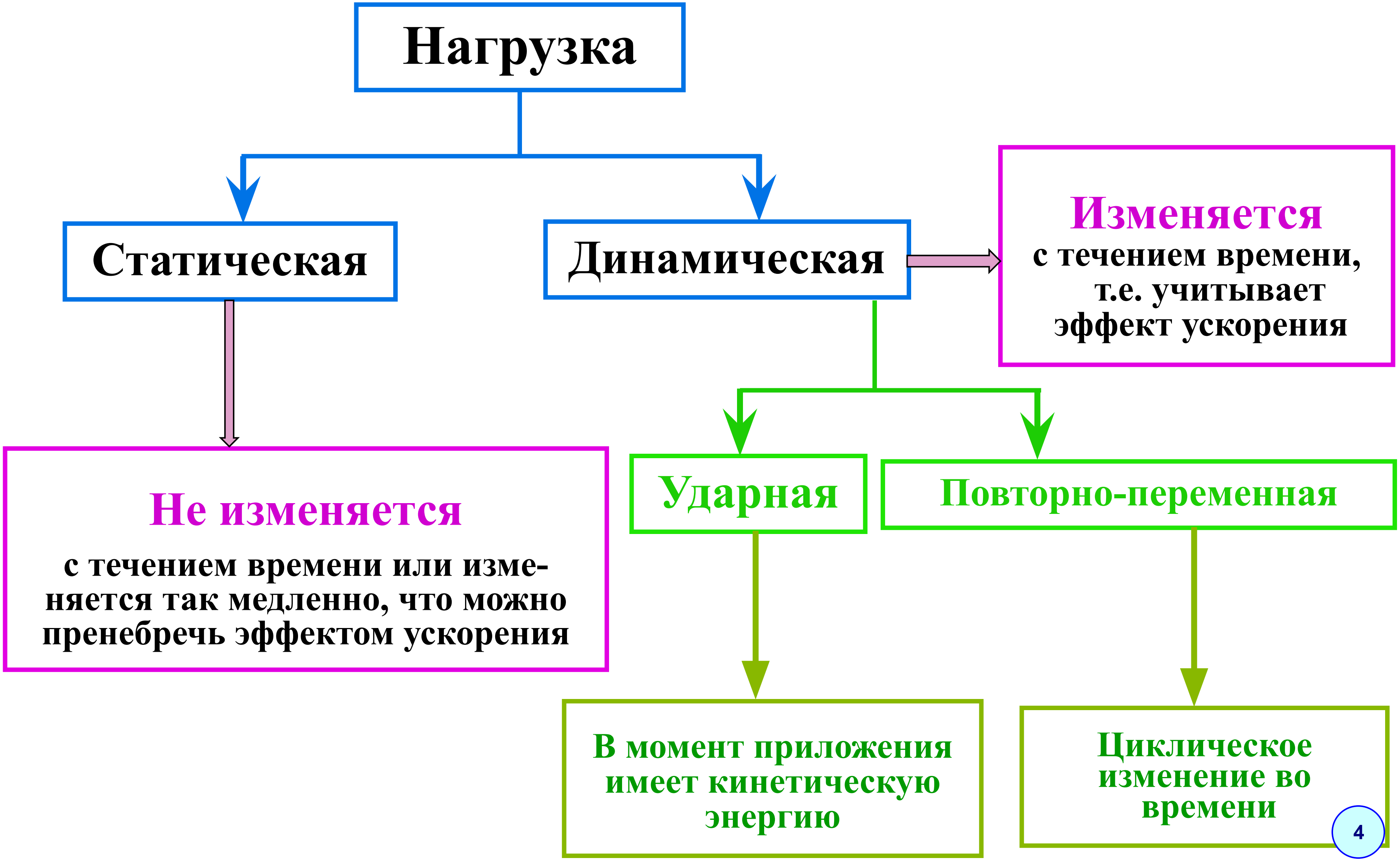
Сосредоточенными силами называются **сила давления**, действующая на единицу площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами элемента (напр. давление колес вагона на рельсы).

Распределенными нагрузками называются силы приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или **площади конструкции.**
Нагрузки можно разделить:
1. Постоянные нагрузки; (напр. собственный вес сооружения).
2. Временные нагрузки. (нагрузка в течении некоторого промежутки времени, напр. вес поезда идущего по мосту)

По **характеру действия нагрузки** можно разделить:

1. Статические нагрузки; (они не меняются или меняются незначительно, ускорение элементов конструкции =0)
2. Динамические нагрузки. (ускорение значительно, изменение скорости элементов происходить за промежуток *t*)
Примерами **динамических нагрузок** являются:
1. Внезапно приложенные; (напр. давление колес локомотива, входящего на мост);
2. Ударные; (напр. при ударе бабы копра о при ее забивке);
3. Повторно-переменные. (напр. повторные давление пара, по переменно растягивающие и сжимающие шток поршня и шатун паровой машины).

Классификация нагрузки по характеру действия



3. Понятие о деформациях и напряжениях

В **СМ конструкции** (в отличие **теоретической механике**) **в целом при действии внешних сил в большой или меньшей степени изменяют свои размеры и форму. Это изменение называется – деформация.**

Величина и **характер** деформаций связаны с химической структурой и физических свойств материалов. Все эти **материалы** можно разделить **на два класса:**

1. Кристаллические;
2. Аморфные.

Кристаллические материалы состоит из элементарных частиц (**атомов**). Атомы размещены на весьма близких расстояниях друг от друга правильными рядами. Эти ряды образуют **кристаллическую решетки**.

Аморфные материалы не имеет правильного расположения атомов.

Атомы удерживаются в равновесии благодаря электрического взаимодействия.

Деформация тел происходит за счет **изменения расположения атомов**, **их сближения** или **удаления**.

Деформация разделяются на **упругие** и **не упругие** (или **остаточные**).

Упругими деформациями называются такие изменения формы и размеры элементов, которые **исчезают после удаления вызывающих сил**, тело полностью восстанавливаются.

Не упругими деформациями называются такие изменения формы и размеры элементов, которые **не исчезают после удаления вызывающих сил**, тело полностью не восстанавливаются (остается разности размеров).

В элементах конструкции под действием **внешних сил возникают дополнительные внутренние силы**, **сопровождающие деформацию материала**. Эти **внутренние силы сопротивляются стремлению внешних сил разрушить элемент конструкции, изменит его форму, отделить одну его часть от другой.** Они стремятся **восстановить** прежнюю форму и размеры деформированной части конструкции.

Чтобы **численно характеризовать степень воздействия внешних сил на деформированный элемент, нам необходимо научиться измерять и вычислять величину внутренних межатомных сил, возникших как результат деформации, вызванной внешними силами.**

Лекция 1 (продолжение – 1.4)

Для этого в **сопротивлении материалов пользуется** так называемый **методом сечений**.

Внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся **на единицу площади**, называется **напряжением в этой точке по проведенному сечению. (σ=F/A)**

Через одну и ту же точку стержня можно провести целый ряд сечений, разделяющих стержень различным образом на две части. Величина и направление **напряжений**, передающихся в рассматриваемой точке от одной части на другую, будут **различными** в зависимости от того, **как проведен разрез**.

Т.о. **нельзя говорить о напряжении, не указывая сечения, через которое происходит передача этого напряжения**. Поэтому говорят о **«напряжение по такой-то площадке, по такому-то сечению».** Так как **напряжение** представляет собой **силу**, приходящуюся **на единицу площади**.

Напряжение обозначается буквами ***p, σ, τ***. ($p^2=\sigma^2+\tau^2$, *σ – нормальное и τ – касательное напряжения*).

Величина напряжений в каждой точке является **мерой внутренних сил,** которые возникают в материале как **результат деформации, вызванной внешними силами.**

Для **вычисления напряжений** надо **мысленно разделить рассматриваемый элемент конструкции сечением** на **две части** и **составить условия равновесия для системы сил**, приложенных **к одной из отсеченных частей.** Эта система будут включать в себя **внешние силы** и **усилие (напряжение)**.
В этом и состоит метод сечений, которым в дальнейшем мы будем постоянно пользоваться.

В **СМ** термин **«напряжение»** применяется вместо термина **«внутренние силы взаимодействия между частями стержня»,** поэтому мы будим говорит о **«о равномерном или не равномерном распределении напряжений по сечению»,** об **«усилии как сумме напряжений».**

Для **вычисления усилия нельзя** просто **суммировать напряжения в разных точках.**
Надо **вычислить в каждой точке сечения элементарное усилие**, на **единицу площади *dF***, а потом **суммировать эти слагаемые.**

Т.о., результатом действия внешних сил на элементы конструкции является возникновение в них деформаций, сопровождаемых напряжениями.

4. План решения основной задачи сопротивления материалов

СМ, изучая зависимость **F = f(σ),** дает возможность решить **задачу – противопоставить действию внешних сил стержень достаточных размеров и наиболее подходящего материала.**

При выборе **размеров** и **материала** для элемента конструкции инженер должен обеспечить **запас прочностью против его разращения.** Элемент должен быть так **спроектирован**, чтобы **наибольшие напряжения, возникающие в нем при его работе, были меньше тех, при которых материал разрушается или получает остаточные деформации.**

Величина напряжений, достижение которых обусловливает **разрушение материала** , называется **пределом прочности** и обозначается буквой ***p***

Величина напряжений, при превышении которых материал получает **незначительные остаточные деформации** , называется **пределом упругости.**

Величину **допускаемых напряжений [*p*]** (обозначается **[*p*]**) связана с **пределом прочности *p*** равенством **[*p*] = *p/k*,** где ***k*-коэффициент запаса прочности,** который показывает ***во сколько раз в конструкции напряжения меньше предела прочности материала и*** *величина его колеблется на практике в приделах* ***1,7 – 1,8 до 8 – 10 .***

Основное требование , которому должны удовлетворять **материал** и **размеры элемента выражается**

$$p_{max} \leq [p]$$

Это - условие прочности: действительные напряжения должны быть не больше допускаемых.

Составим план решения задач сопротивление материалов.

1. **Выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к проектируемому элементу, включая и реакции;**
2. **Выбрать материал, отвечающий назначению конструкции и характеру действия внешних сил, и установить величину допускаемого напряжения** $[p]$;
3. **Вычислить величину наибольших действительных напряжений** p_{max};
4. **Написать условие прочности** $p_{max} \leq [p]$ **и найти величину поперечных размеров элемента.**

Лекция 1 (продолжение – 1.6)

Цель расчетов в СМ – создание **прочных**, **устойчивых,** обладающих достаточной **жесткостью, долговечностью** и вместе с тем **экономичных элементов сооружений**
Конечная цель науки СМ – определение размеров элементов сооружений, обеспечивающих его работоспособность при минимальном расходе материалов (данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям).

5. Типы деформаций

Общий план решения задачи СМ можно разбить на **несколько групп в зависимости от типа деформаций.** В процессе эксплуатации **элементы конструкций** испытывают следующие **основные типы деформации:**

1) **Растяжение или сжатие** (работа цепей, тросов, растянутых и сжатых стержней в фермах и др.);
2) **Сдвиг** (испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений). Деформацию сдвига, доведенную до разрушения материала называют **срезом**. (испытывают материалы при резке ножницами, или штамповке деталей из листового материала);
3) **Кручение** (работают валы, передающие мощность при вращательном движении);
4) **Изгиб** (работают балки, оси, зубья зубчатых колес);
5) **Сложная деформация** (конструкция испытывает два или более типов деформаций одновременно, например растяжение и сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. д.).

СМ является **основой** для изучения курса **«Детали машин» и различных специальных дисциплин**, таких, как **«Конструкция и прочность двигателей», «Конструкция и прочность летательных аппаратов»** и т.п.

Зарождение науки о **сопротивлении материалов** относится к **XVII в.** и связано с работами знаменитого ученого того времени **Галилео Галилея**. Значительный вклад в ее развитие был сделан выдающимися учеными: **Гуком, Бернулли, Сен-Венаном, Коши, Ламе, Эйлером** и др. В **России в конце XIX-начале XX века** важные исследования в области **сопротивления материалов** провели **русские ученые Д.И. Журавский, Ф.С. Ясинский, И.Г. Бубнов, С.П. Тимошенко** и др.

Лекция 1 (продолжение – 1.7)

Контрольные вопросы

- Что такое сопротивление материалов?
- Кто является основоположником сопротивление материалов?
- В чем заключаются задачи курса «Сопротивление материалов»?
- Какие вопросы решаются в курсе сопротивления материалов?
- Какие ученые сделали значительный вклад в развитие сопротивления материалов?
- Цель расчетов в сопротивлении материалов.
- Назовите выдающихся русских ученых в области прочности материалов?
- Какие внешние нагрузки воспринимают сооружений и машин при работе?
- Классификацию сил можно произвести по каким признакам?
- В чем суть метода сечений?
- Какие силы в сопротивлении материалов считаются внешними и внутренними?
- Цель расчетов в сопротивлении материалов.
- Что такое запас прочности?
- Что такое предел прочности?
- Что такое предел упругости?
- Зачем вводится понятие «допускаемое напряжение», от чего зависит его величина?
- Составьте план решения задач сопротивление материалов.
- Что понимают под термином деформация?
- Какие деформации называют абсолютно-упругими, а какие пластическими или остаточными?
- При эксплуатации элементы конструкций испытывают какие типы деформации?

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

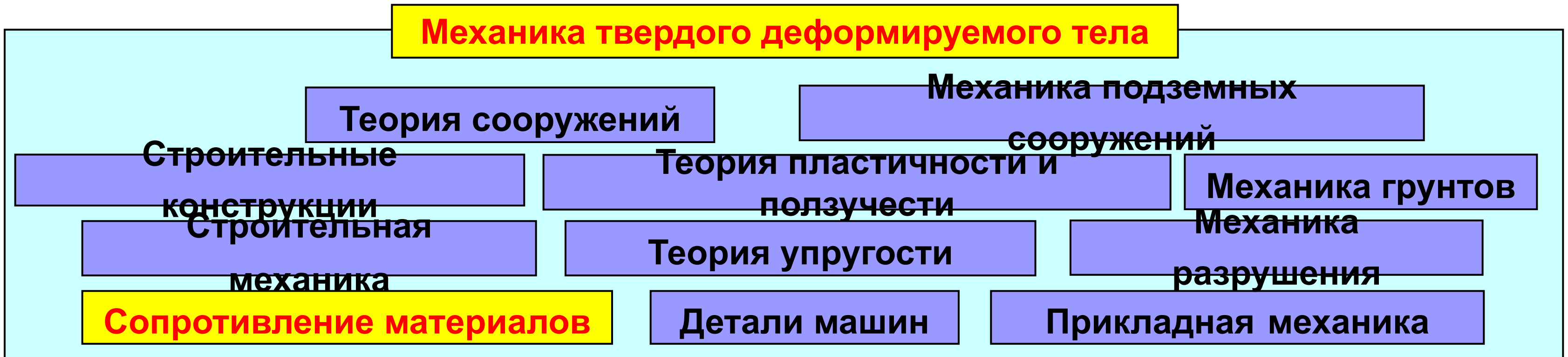
- ЛЕКЦИЯ 2

- Основные определения.
- Реальный объект и расчетная схема.
- Схематизация свойств материала и геометрии объекта.
- Схематизация элементов конструкций и внешних нагрузок.
- Внутренние силы (усилия).
- Внешние силы.
- Метод сечений.

Лекция 2

- **Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.**
- **1.1. Основные определения. Сопротивление материалов (СМ)** является частью более общей науки – **механики твердого деформируемого тела**, в которую входят: **теория упругости, теории пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения** и др. **СМ – это азбука расчетов на прочность.**

Сопротивление материалов – это наука о методах расчета простейших элементов конструкций и деталей машин на **прочность, жесткость** и **устойчивость.**



Прочность – способность материала конструкции и их элементов сопротивляться действию внешних сил (нагрузок), не разрушаясь.

Жесткость – способность элемента конструкции сопротивляться деформации (под действием приложенных сил реальные элементы конструкции получает лишь **малые упругие деформации).**

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием внешних сил.

Реальные тела не являются **абсолютно твердыми** и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную **форму** и **размеры**, то есть **деформируются**.

Деформации тела, исчезающие после снятия внешних сил, называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными** или **пластическими (неупругими)**.

Определение **размеров деталей** или **внешних нагрузок**, при которых исключается возможность **разрушения деталей**, является **целью расчета на прочность.**

Определение **размеров деталей** или **внешних нагрузок**, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции **деформаций этих деталей**, является **целью расчета на жесткость.**

- **1.2. Реальный объект и расчетная схема**

Например, при расчете на **прочность троса**, поднимающего груз, можно **не учитывать** **форму груза, сопротивление воздуха, изменение давления** и **температуры воздуха с высотой**, **силу тяжести троса** и многие другие факторы, учет которых **усложняет расчет троса**, **но практически не влияет на конечный результат.** Трос, свитый из большого числа тонких проволочек, в данном примере можно рассматривать как **однородный стержень** круглого поперечного сечения, нагруженный растягивающей силой, сосредоточенной в месте крепления груза.

- **нагрузки, прикладываемые к объекту.**

При выборе **расчетной схемы** вводятся **упрощения (схематизация) реального объекта**, т.е. **отбросить все те факторы**, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом.

Такого рода **упрощения задачи совершенно необходимы**, так как решение с полным учетом всех свойств **реального объекта** является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.

- **1.3. Схематизация свойств материала (или Допущения, применяемые в СМ).**

Материалы **реальных объектов** обладают **разнообразными физическими свойствами** и **характерной для каждого из них структурой**. С целью **упрощения расчетов** в теории **СМ** используются следующие **допущения** относительно **структуры** и **свойств материалов**, а также о **характере деформаций**.

1. Материал считается **однородным**, если его свойства **во всех точках одинаковы**.
2. Материал считается **изотропным**, если его свойства **во всех направлениях одинаковы.**
3. Материал считается абсолютно **упругим.** Вследствие которой деформируемое тело полностью **восстанавливает свою форму** и **размеры** после снятия нагрузки независимо **от величин нагрузок** и **температуры тела**.

Лекция 2 (продолжение – 2.3)

4. **Форма** и **размеры упругого тела** меняются **прямо пропорционально изменению нагрузок**, то есть подчиняется **закону Гука.**
5. Материал считается **сплошным**, то есть **способностью сплошь** (без пустот) **заполнять пространство**, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого **материал считается непрерывным**, что позволяет использовать для определения **напряжений** и **деформаций математический аппарат дифференциального** и **интегрального исчисления**.
6. **Упругие тела** являются относительно **жесткими**, благодаря чему **перемещения точек тела весьма малы по сравнению** с **размерами самого тела**. Эта **гипотеза** служит **основанием** для использования при расчете **начальных размеров тела.**
7. **Гипотеза плоских сечений** (гипотеза Бернулли): **плоские поперечные сечения стержня до деформации остаются плоскими и после деформации.**
8. **В сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки**, характер распределения напряжений не зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок, а зависит только от ее статического эквивалента (принцип Сен-Венана).

Использование **этих допущений существенно упрощает изучение поведения конструкций под нагрузкой**, а **соответствие условного материала реальным материалам** достигается введением в расчет элементов сооружений экспериментально получаемых механических характеристик реальных материалов.

Лекция 2 (продолжение – 2.4)

1.4. Схематизация элементов конструкций и внешних нагрузок.

а). Схематизация геометрии реального объекта. Схематизация в СМ является приведение **геометрической формы тела** к схемам **бруса** (стержня), **оболочки** или **пластины**. Она **упрощает геометрию** реально существующих конструкций **(сооружений, механизмов** и **машин)**, на отдельные тела **простой геометрической формы** (любое тело в пространстве характеризуется **тремя измерениями**):

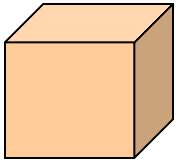
Брус (стержень) – тело, два измерения ***h* и *b*** которого малы по сравнению с третьим ***l*** (стержни, стойки, валы, балки). **Брус** может иметь различную **форму поперечного сечения** (круглое, кольцевое, прямоугольное, коробчатое, двутавровое и др.). **Поперечное сечение** образуется **при разрезе бруса плоскостью**, **перпендикулярной продольной оси**, а **продольная ось** является линией, соединяющей центры тяжести поперечных сечений, и может быть **прямой** или **криволинейной. Брус (стержень)** является **основным объектом рассмотрения в курсе сопротивления материалов.**

Следующие тела являются объектами рассмотрения в других **разделах механики твердого деформируемого тела** (теория пластин и оболочек, теория упругости и др.):

Оболочка, пластина – тело, одно измерение ***δ*** (толщина) которого мало по сравнению с двумя другими ***a*** и ***b*** (тонкостенные резервуары, оболочки перекрытия, плиты, стенки).

Массив – тело, все три измерения ***a, b, c*** , которого мало отличаются друг от друга (фундаментные блоки, шарик подшипника, тело гравитационной плотины).





б). Схематизация силового воздействия (внешних нагрузок)

Она представляет **модель** механического действия **внешних сил** на объект от других тел или сред. К внешним силам относятся также и **реакции связей,** определяемые методами теоретической механики.

Схематизация силового воздействия или внешней нагрузки подразделяют на **сосредоточенные** и **распределенные.**

Сосредоточенная сила это **вектор**, характеризуемый: **а). величиной, б). направлением** и **в). точкой приложения**. Здесь такая сила является **условной,** поскольку механическое взаимодействие деформируемых тел не может осуществляться **в точке** (площадь контакта не равна нулю). Условность состоит в том, что в случае **малости площадки контакта** по сравнению **с размерами объекта**, **сила считается приложенной в точке**.

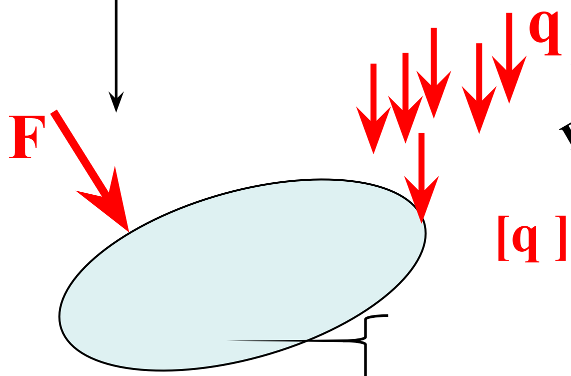
Схематизация нагрузок

Внешние силы

Поверхностные

Объемные
(силы тяжести, силы инерции)

Сосредоточенные



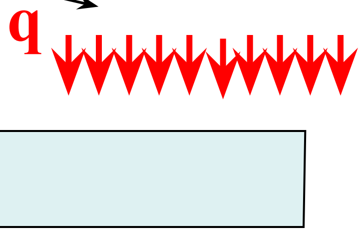
[F] = [сила]
Н, кН, МН.

Распределенные

поверхностная

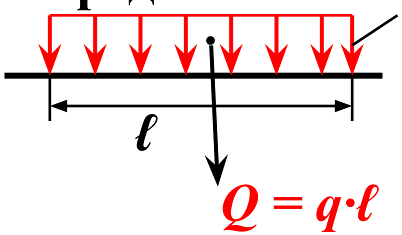
[q] = [сила / длина^2]
кН/м^2

линейная

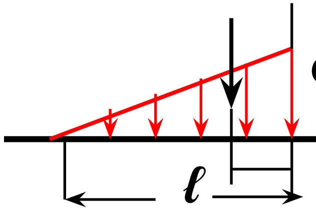


[q] = [сила / длина], кН/м

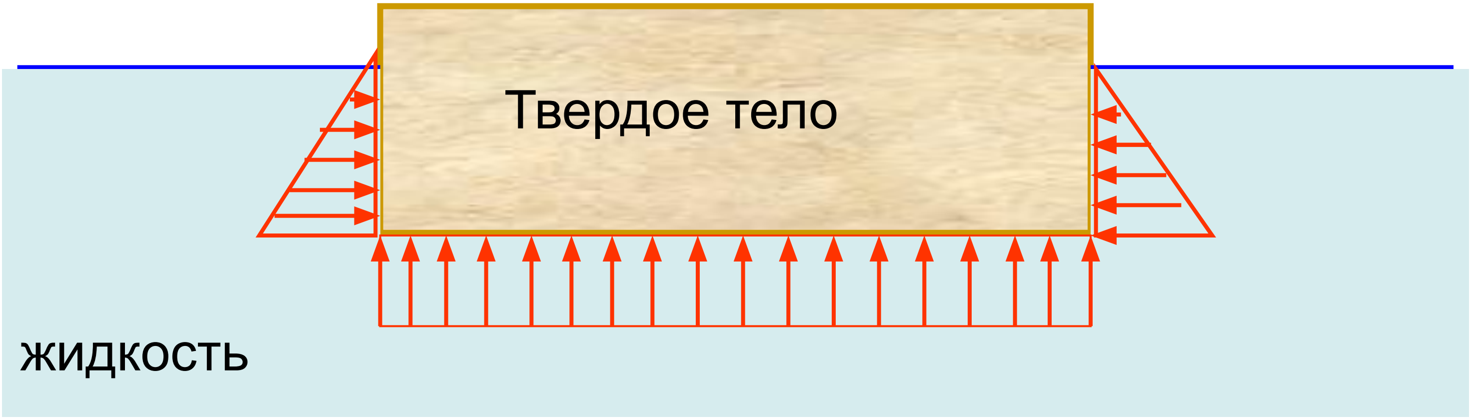
Равномерно распределенная:



Неравномерно распределенная:



Пример.



Лекция 2 (продолжение – 2.5)

Если же определяются **контактные напряжения**, например, в головке рельса, то учитывается **фактическое распределение нагрузки на рельс по площадке контакта**, **размеры которой зависят от величины сжимающей силы.**

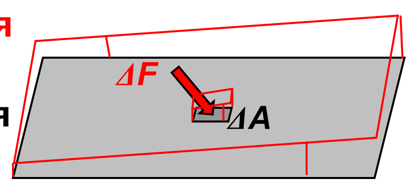
Объемные силы – силы, распределенные по объему (силы тяжести, силы инерции), **приложенные к каждой частице объема.** Для этих сил **схематизация** состоит в задании **простого закона** изменения этих сил по объему. **Объемные силы** определяются их **интенсивностью,** как предел отношения **равнодействующей сил** в рассматриваемом элементарном объеме к **величине этого объема**, стремящего к нулю:

$$f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{dF}{dV}$$

Поверхностные силы – силы, распределенные по поверхности (давление жидкости, газа или другого тела), характеризуемые интенсивностью давления, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной площадке к ее площади, стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

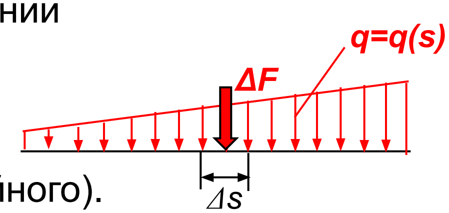
Для этих сил **схематизация** часто состоит в задании простого закона **изменения этих сил по поверхности**.



Линейно распределенная нагрузка – силы, распределенные по некоторой линии (длине), характеризуемая интенсивностью нагружения, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной длине линии к ее длины, стремящейся к нулю:

$$q = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{dF}{ds}$$

Для этих сил условность состоит в представлении области контакта в виде линии нулевой толщины. Характер изменения часто задается в виде **простого закона** (постоянного, линейного).



По **характеру воздействия** на сооружения **внешние силы** делятся на **статические** и **динамические**. Быстро изменяющуюся нагрузку **во времени** называют **динамической** (при движении подвижного состава, колебания, удар). При медленном изменении нагрузки можно **пренебречь силами инерции и деформациями**, возникающими в объекте, и такая нагрузка может условно считаться **статической**. По **времени действия** на сооружения **нагрузки** делятся на **постоянные** (вес мостового полотна) и **временные** (нагрузка подвижного состава, ветровая или снеговая нагрузка).

Лекция 2 (продолжение – 2.6)

1.5. Внутренние силы. Метод сечений.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется **внутренними силами, обеспечивающие неизменность его формы,** которые возникают **внутри тела под действием внешних нагрузок** и определяются **силами межмолекулярного воздействия.** Эти силы **сопротивляются стремлению внешних сил разрушить конструкции, изменить его форму, отделить одну часть от другой**. Вообще внутренние силы возникают между всеми смежными частицами тела при нагружении.

$$\sum X_i = 0; \quad \sum M_{xi} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0; \quad \sum M_{yi} = 0;$$
$$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_{zi} = 0.$$

Внутренние силы можно определить **методом сечений**.

1. Пусть брус под действием сил F_1-F_2 находится в равновесии.

Для рассматриваемого объекта удовлетворяются уравнения равновесия:

2. Проведем сечение плоскостью, совпадающей с поперечным сечением бруса, в котором отыскиваются внутренние силы.

3. Отбросим одну из частей (ле... **совокупностью реактивных сил**, распределен... **ечения.**

4. Полученную **систему внутре... ктору** и **главному моменту**, выбрав в к... сечения.

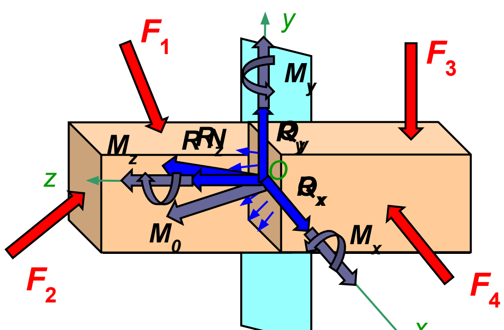
... составляющие

... материалов

... еформации:

... **Ry = Qy –**

... **y – изгибающие**



$$Q_x + \sum X_i^{\text{оставл.части}} = 0; \quad M_x + \sum M_{xi}^{\text{оставл.части}} = 0;$$
$$Q_y + \sum Y_i^{\text{оставл.части}} = 0; \quad M_y + \sum M_{yi}^{\text{оставл.части}} = 0;$$
$$Nz + \sum Z_i^{\text{оставл.части}} = 0; \quad M_z + \sum M_{zi}^{\text{оставл.части}} = 0.$$

Или, как легко можно доказать:

$$Q_x = \sum X_i^{\text{отброш.части}}; \quad M_x = \sum M_{xi}^{\text{отброш.части}};$$
$$Q_y = \sum Y_i^{\text{отброш.части}}; \quad M_y = \sum M_{yi}^{\text{отброш.части}};$$
$$Nz = \sum Z_i^{\text{отброш.части}}; \quad M_z = \sum M_{zi}^{\text{отброш.части}}.$$

7. Поскольку **оставленная часть** ... **тренние силовые факторы** могут быть оп... **для этой части**:

Деление сил (нагрузок) на **внешние** и **внутренние** силы является **условным.** Одна и та же сила может быть и внутренней и внешней, всё зависит от **выбора объекта исследования**. В **СМ** считается, что если нет внешних сил, то отсутствуют и внутренние, то есть, справедлива **гипотеза** о ненапряженном начальном состоянии тела.

Лекция 2

Контрольные вопросы

- **Что такое сопротивление материалов?**
- **Что понимают под прочностью (жесткостью, устойчивостью) элементов конструкции?**
- **Укажите геометрический признак, характерный для стержня, пластины, массивного тела.**
- **Какие силы называются внешними, поверхностными, объемными?**
- **Что такое сосредоточенная сила, распределенная нагрузка и момент?**
- **Какие виды распределенных нагрузок вы знаете? Что такое интенсивность распределенной нагрузки?**
- **Каковы размерности сосредоточенных сил и моментов, а также интенсивностей распределенных нагрузок?**
- **Что в сопротивлении материалов называют внутренними силовыми факторами?**
- **Какие гипотезы, допущения приняты в сопротивлении материалов?**
- **В чем суть метода сечения?**
- **Что представляет собой расчетная схема конструкции (элемента конструкции) и чем она отличается от реальной конструкции**

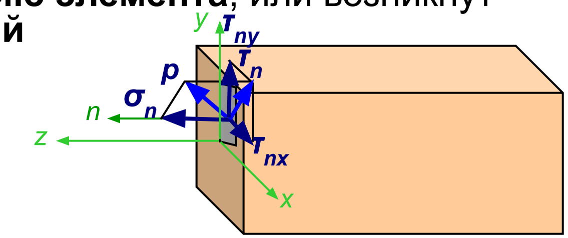
Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **ЛЕКЦИЯ 3**

- **Напряжения.**
- **Связь внутренних сил (усилий) и напряжений**
- **Перемещения и деформации.**
- **Виды простейших деформаций.**
- **Метод сечений**

1.6. Напряжения (Напряжение является ключевым понятием в сопромате)

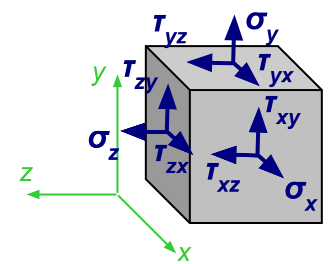
Внутренние силы (в.с.), являясь результатом взаимодействия частиц тела, **непрерывно распределены по сечению. Интенсивность в.с.** в разных точках сечения может быть различной. При **увеличении нагрузки** на элемент конструкции **увеличиваются в.с.** и соответственно их **интенсивность** в сечениях. Если в некоторой точке интенсивность **в.с.** достигнет определенного для данного материала значения, в этой точке возникает **трещина**, развитие которой приведет **к разрушению элемента**, или возникнут **пластические деформации**. Т.о., о **прочности элементов конструкций** следует **судить не по значению в.с.**, а **по их интенсивности**.



Меру интенсивности внутренних сил (или **мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению**) **называют напряжением.**

В.с., представляют собой **поверхностные силы**, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то **интенсивность этих сил**, называемое **полным напряжением**, определяется:

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta A}=\frac{dR}{dA}$$



Полное напряжение ест векторной величиной и состоит из **двух составляющих**: **нормальное напряжение** $\sigma_n=dN/dA$ перпендикулярное к рассматриваемой площадке; **касательное напряжение** $\tau_{nx}=dQx/dA$ и $\tau_{ny}=dQy/dA$, касательное к площадке. **Касательное напряжение**, в свою очередь, состоит из **двух составляющих** - τ_{nx} , τ_{ny}

При анализе **напряжений в окрестности рассматриваемой точки** выделяется **бесконечно малый объемный элемент** (**параллелепипед** со сторонами ***dx, dy, dz***), по каждой грани которого действуют, в общем случае, **три напряжения**, например, для грани, **перпендикулярной оси *x*** (площадка *x*) – σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}:
Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

Здесь **первый столбец** представляет компоненты напряжений на площадках, нормальных к оси ***x***, второй и третий – к оси ***y*** и ***z*** соответственно. **Первый индекс указывает площадку** (**место**) действия, **второй – направление**. Для **нормальных напряжений индексы совпадают** и **один индекс опускается**.

1.7. Связь внутренних сил (усилий) и напряжений.

Рассмотрим **силовые факторы в поперечном сечении стержня** и **их выражение через напряжения.** **Внутренние силы** (усилия) в сечении, как было показано выше, связаны **уравнениями равновесия с внешними силами**, приложенными к оставленной части бруса при его сечении. С другой стороны **внутренние усилия** есть **результат приведения к центру поперечного сечения внутренних сил,** приложенных к элементарным площадкам (напряжений), выполняемое сложением, которое для элементарных сил сводится к **интегрированию по площади поперечного сечения.**

Напомним, что **опорные реакции конструкции включаются в число внешних сил**. Для определения этих реакций в **статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно** и следует дополнительно рассматривать **перемещения**, связанные с **внутренними усилиями** и **напряжениями**, а также физические **соотношения упругости.**

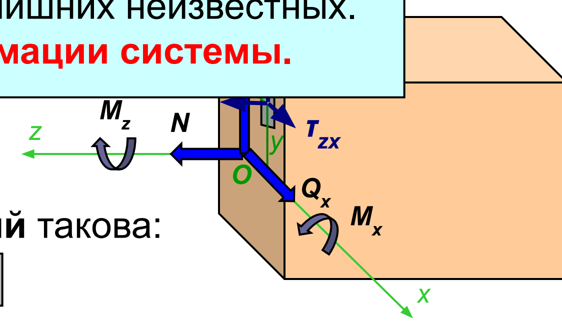
Задача определения **напряжений** в силу интегральности соотношений с внутренними усилиями всегда **статические неопределима** и необходимо дополнительно рассматривать **деформации** тела с целью определения **закона распределения напряжений по сечению.**

Как известно из **ТМ** если на брус в плоскости действует **более 3-х реакций**, то нам не хватит 3-х уравнений статики для определения этих реакций. Такие системы называется **статически неопределимыми**. Для решения таких задач необходимо получить столько **дополнительных уравнений**, сколько имеется лишних неизвестных. Это дополнительные уравнения получают из рассмотрения **деформации системы.**

...нному к ... **три силы *N*,** ... акторами в ... **по сечению,** ... ли **сжатия;** ... очке сечении.

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.$$



Т.о., в целом **связь внешних сил, внутренних усилий** и **напряжений** такова:

Внешние силы → (Уравнения равновесия) → **Внутренние усилия** ↔ (Интегральные соотношения) ↔ **Напряжения**

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

1.8. <u>Перемещения и деформации.</u>

Перемещения – переход точек тела в новое положение вследствие изменения формы и размеров тела под действием нагрузки. Полное перемещение точки ***M*** в пространстве **раскладывается на компоненты *u, v, w***, параллельные осям координат ***x, y, z,*** соответственно.

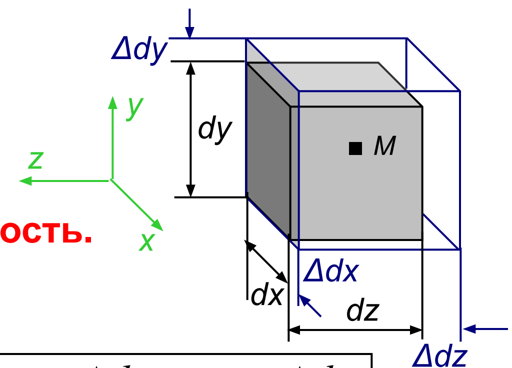
Перемещения рассматриваемой точки *M* зависит от деформации всех нагруженных областей тела и включают в себя перемещения как жесткого целого ненагруженных областей.

Т.о., **перемещения** не могут характеризовать **степень деформирования** элемента материала в окрестности ***M***.

Введем понятие деформаций в точке как **количественную меру деформирования материала в ее окрестности**.

Выделим в точке **М элементарный параллелепипед *dx, dy, dz*** и рассмотрим изменения его **размеров** и **формы.**

Определение **величины этих изменений** называется **расчетом на жесткость.**



За счет **деформации длины** его ребер получат **<u>абсолютные</u> удлинения *Δdx, Δdy* и *Δdz*.**

Вычислим **<u>относительные</u> линейные деформации** в точке:

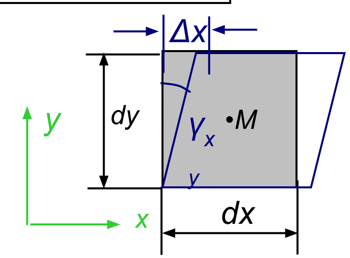
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Деформации **безразмерные** и для реальных материалов $\varepsilon = 10^{-3}$, т.е. достаточно малы.

Кроме **линейных деформаций** возникают **угловые деформации** или **углы сдвига**, связанные с **изменением прямых углов параллелепипеда.**

Например, в плоскости ***xy*** могут возникать **малые изменения** прямых углов параллелепипеда:

$$\frac{\Delta x}{dy} = tg\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}.$$



Аналогичное изменение углов возникают в двух других плоскостях: ***xz*** и ***yz.***

Для реальных материалов **углы сдвига** равно: $\gamma \approx 10^{-4} - 10^{-3}$.

Т.о., **относительных линейных** и **угловых деформаций** определяют деформированное состояние материала в окрестности точки и образуют **тензор деформаций**, подобный **тензору напряжений**:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Примечание*: *Половинные углы сдвига* *используются в целях получения аналогичных формул преобразования с тензором напряжений.

Лекция 3 (продолжение – 3.3 дом.)

В зависимости от того, какие из компонент **относительных деформаций имеют нулевое значение** в рассматриваемой области или для всего тела различают следующие **простые виды деформаций**:

1. **Линейная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, **углы сдвига равны нулю**, остальными линейными относительными деформациями пренебрегается (характеризуется абсолютным и относительным удлинением).
2. **Плоская деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$ или $\varepsilon_y \neq 0$, **остальные относительные деформации равны нулю** (характеризуется абсолютным и относительным сужением площади поперечного сечения). Которая обычно реализуются при растяжении-сжатии.
3. **Объемная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, **углы сдвига равны нулю** (характеризуется абсолютным и относительным изменением объема).
4. **Чистый сдвиг** – **линейные относительные деформации равны нулю, углы сдвига не равны нулю** (характеризуется изменением формы, изменение объема не происходит). Это вид деформации также возникает при кручении.

В соответствии с **видом деформации** последовательно изучают такие **простейшие напряженно-деформированные состояния:**

1.растяжение-сжатие,
2.чистый сдвиг,
3.кручение,
4.чистый изгиб.

Далее изучаются **более сложные:**

1.поперечный изгиб,
2.сложное сопротивление,
3.продольный изгиб.

Следует подчеркнуть, что в **СМ** слово **деформация** имеет **строгое определение** и выступает как **количественная мера изменения геометрических размеров в окрестностях точки.**

1.9. Метод сечений

Метод сечений позволяет найти значения **внутренних силовых факторов** и установить вид нагружения в любом сечении бруса при действии любой нагрузки. Для этого необходимо выполнить следующее:

1. Мысленно рассекаем брус на две части в пределах исследуемого i – го участка.

2. Оставляем ту часть бруса, на которую действует меньше сил.

3. Заменяем действие условно отброшенной части бруса положительными внутренними силовыми факторами, приведенными к центру тяжести исследуемого сечения бруса.

4. Выберем для оставленной части бруса скользящую систему координат (начало координат совмещаем с границей участка, положение исследуемого сечения определяется координатой z_i, где $0 \le z_i \le l$ и l – длина i - го участка).

5. Опр... $\Sigma Z = 0$; $\Sigma Y = 0$; ΣX = 0; Σm...

Прове...

а) **вып**...

б) **про**...

В зав...

различ...

Итак, **внутренние усилия в сечении** есть **функции параметров**, определяющих положение сечения в теле, и нагрузок по одну сторону от сечения. Эти функции могут быть представлены аналитически или графически. **График,** показывающий **изменение внутреннего усилия в зависимости от положения сечения, называется *эпюрой*.** Ординаты усилий в определенном масштабе откладывают от линии, соответствующей оси бруса.

- ***Растяжение или сжатие***. Действует только продольная сила ***N***.
- ***Кручение***. Действует только крутящий момент ***T***.
- ***Сдвиг.*** Действует только поперечная сила Q_x или Q_y
- ***Изгиб.*** Действует только изгибающий момент M_x или M_y (чистый изгиб), при действии изгибающего момента и поперечной силы (поперечный изгиб).
- ***Сложное сопротивление***. Одновременное действие нескольких силовых факторов. Например, M_x и ***T***, ***M*** и ***N***.

Контрольные вопросы

- Что такое напряжение? Какая у него размерность?
- В чем суть метода сечений?
- Какое напряжение называется нормальным и какое касательным?
- Какие напряжения возникают в поперечном сечении при действии продольных сил?
- Какие напряжения возникают при действии поперечных сил?
- В чём заключается количественная оценка деформаций?
- Как связаны напряжения в сечении с внутренними силовыми факторами?
- Как выражается размерность напряжения в системе СИ и в технической системе?
- Существуют ли зависимости между внутренними усилиями и напряжениями?
- Какие деформации относятся к простым?
- Какие деформации называются линейными и какие угловыми?

Глава II. ВНУТРЕННЫЕ УСИЛИЕ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖЕНЯ

- ЛЕКЦИЯ 4

- Методы определения внутренних усилий (сил)
- Общий порядок построения эпюр внутренних усилий
- Внутренние усилия при растяжении-сжатии.
- Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.

Глава II. ВНУТРЕННЫЕ УСИЛИЕ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖЕНЯ

2.1. Методы определения внутренних усилий (сил)

Между частицами тела **всегда** существуют **силы взаимодействия**. При деформировании тела изменяются расстояния между частицами, и тогда возникают **дополнительные силы взаимодействия** , которые стремятся вернуть частицы в первоначальное положение. Эти силы называется **внутренними силами** и определяется **методом сечений.**

Метод сечений позволяет найти значения **внутренних силовых факторов** и установить вид нагружения в любом сечении бруса при действии любой нагрузки.

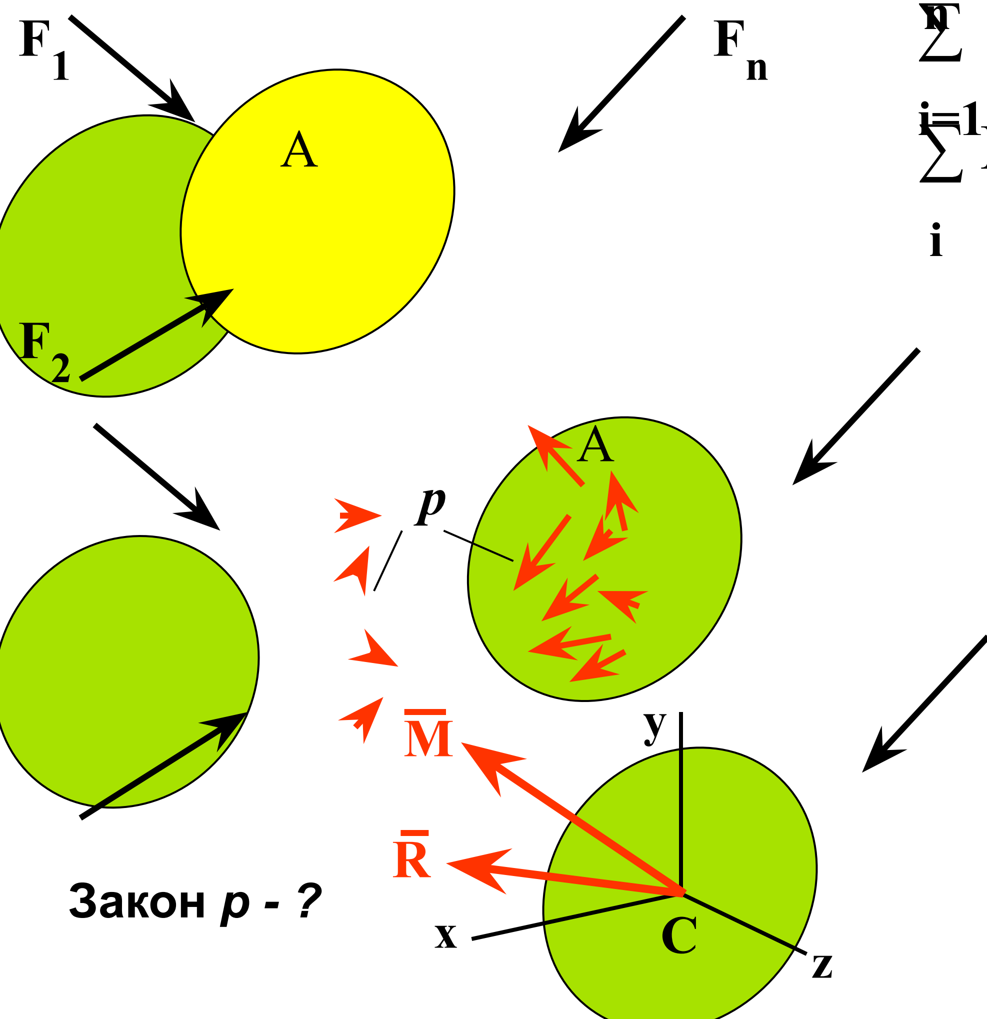
Силы взаимодействия между частицами тела при его деформировании называются внутренними силами (усилиями).

Без знания значений внутренних сил невозможно проводить оценку работоспособности тела.

university
Тюменский индустриальный университет

Вычисление внутренних сил (метод сечений).

Для выявления и определения **внутренних сил** используют **метод сечений**, который дает возможность внутренние силы перевести в разряд внешних.



$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0.$$

$$\sum_{i} M(F_i) = 0.$$

Система находится в равновесии

Метод сечений:

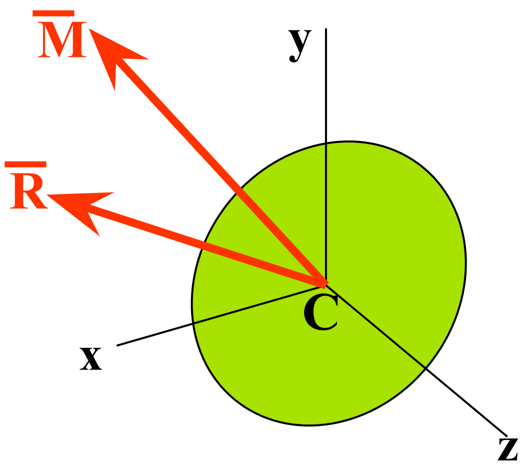
Разрезали тело поперечным сечением А на 2 части;

Внутренние силы *p* для каждой из частей **стали внешними** и потому могут определены из **уравнений равновесия** для любой из частей.

$\bar{R}$ – главный вектор системы внутренних сил.

$\bar{M}$ – главный момент системы внутренних сил.

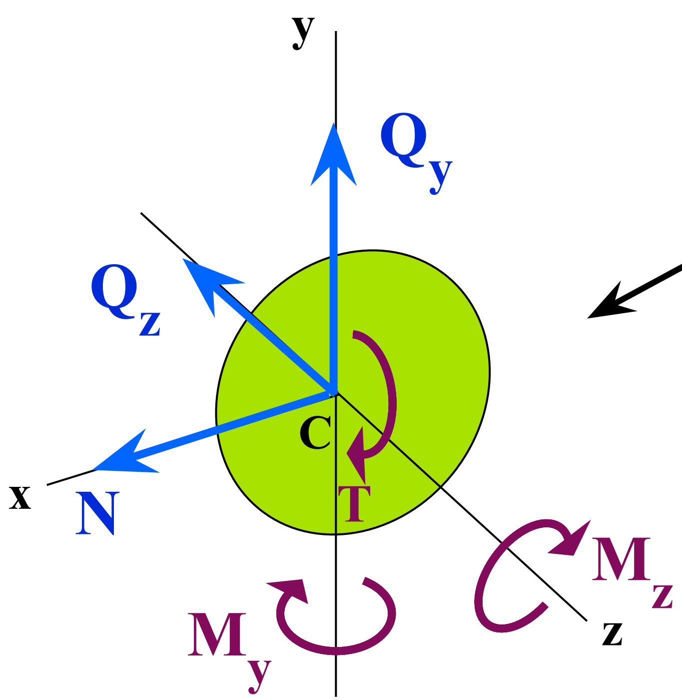
Внутренние силовые факторы.



Система векторов $\bar{R}$ и $\bar{M}$ эквивалентна системе внутренних сил *p*.

Но практическое значение имеют не эти векторы, а их **проекции на оси x, y, z.** (**x** – прод. ось бруса; **y, z** – гл. центр. оси)

Проекции $\bar{R}$ и $\bar{M}$ на продольную ось и главные центральные оси называются внутренними силовыми факторами.



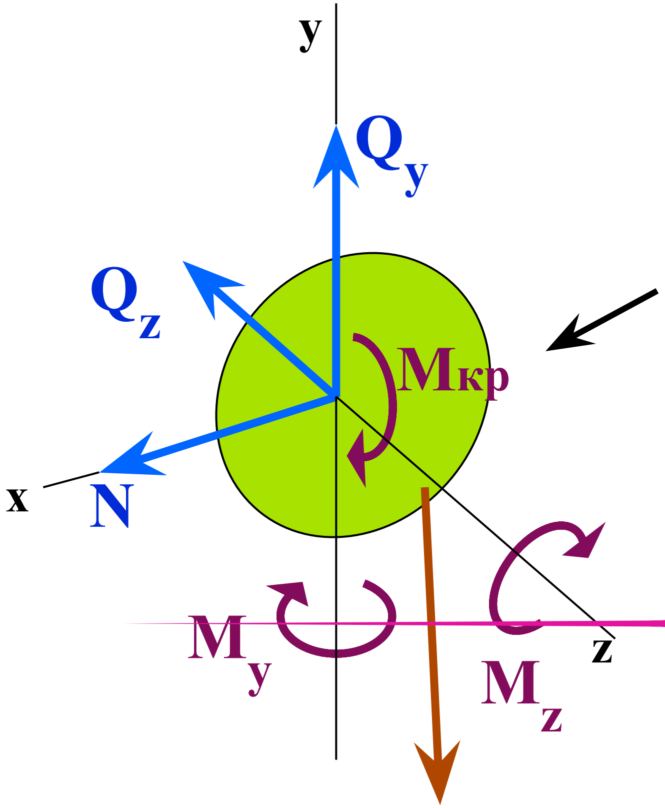
N – продольная сила;

Q_y и Q_z – поперечные силы;

M_y и M_z – изгибающие моменты.

T (Мкр) – крутящий момент.

Вычисление внутренних силовых факторов.



Оставшаяся (ост.) часть (любая из 2-х частей, на которые разрезали брус).

6 внутренних силовых факторов определяются из **6 уравнений равновесия:**

$$\sum X = 0. \quad N + \sum_{ост} X = 0. \quad \boxed{N = \sum_{ост} X}$$

$$\sum Y = 0. \quad Q_y + \sum_{ост} Y = 0. \quad \boxed{Q_y = \sum_{ост} Y}$$

$$\sum Z = 0. \quad Q_z + \sum_{ост} Z = 0. \quad Q_z = \sum_{ост} Z$$

$$\sum M_x = 0. \quad Mкр + \sum_{ост} M_x = 0. \quad \boxed{Mкр = \sum_{ост} M_x}$$

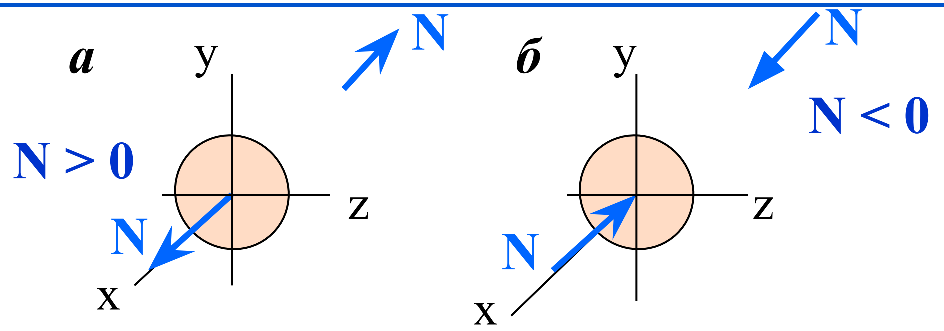
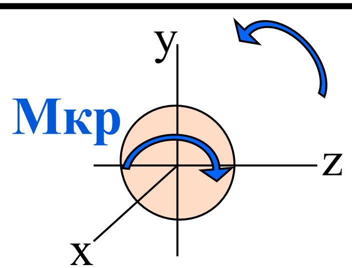
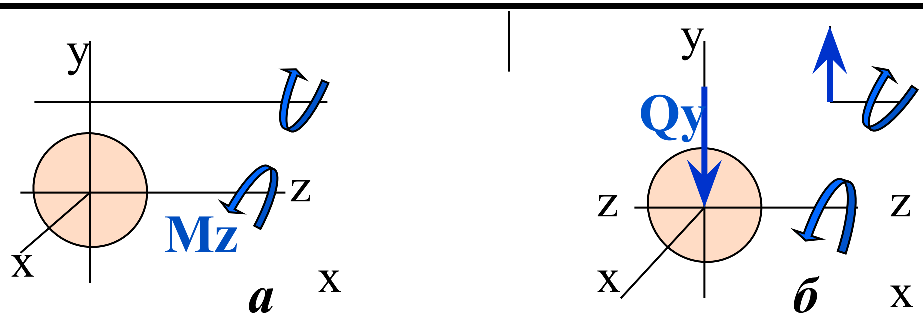
$$\sum M_y = 0. \quad M_y + \sum_{ост} M_y = 0. \quad M_y = \sum_{ост} M_y$$

$$\sum M_z = 0. \quad M_z + \sum_{ост} M_z = 0. \quad \boxed{M_z = \sum_{ост} M_z}$$

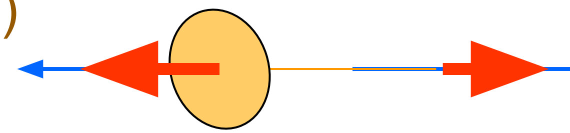
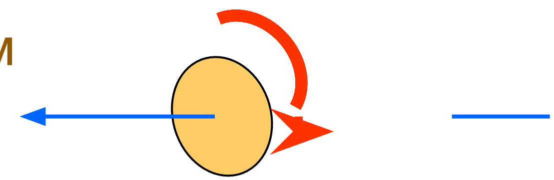
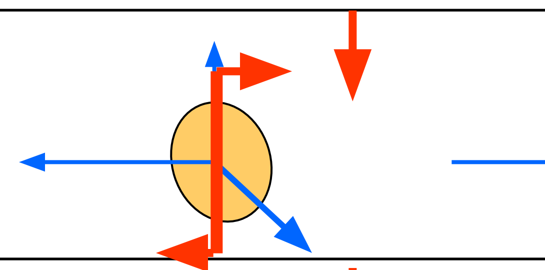
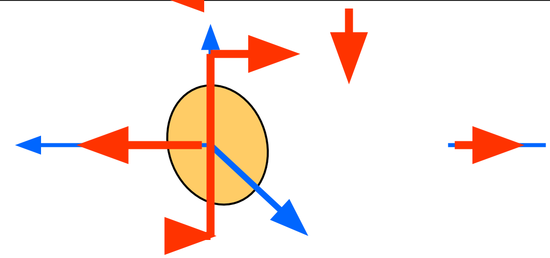
Для **плоской системы сил** остаются **3 уравнения равновесия**.

Лекция 4 (продолжение – 4.6)

Виды нагружения – определяются внутр. сил. факторами.

1 Внутренние силовые факторы	2. Вид нагружения
	*а* – растяжение *б* - сжатие
	кручение
	Изгиб *а*– чистый *б*- прямой
Сочетание различных внутренних силовых факторов	Сложное нагружение

К видам нагружения (прод. табл.)

1 Внутр. сил. фак.	2 Вид нагружения	3 Способ приложения нагрузки
Продольная сила **N**	**Растяжение сжатие**	Линия действия сил (или равнодействующей) совпадает с продольной осью бруса 
Крутящий момент **Мкр (Т)**	**Кручение**	Силовая плоскость совпадает с поперечным сечением 
Изгибающий момент **Мизг** **(M_z или M_y)**	**Изгиб**	Силовая плоскость совпадает с главной центр.плоскостью 
Сочетание различных вн.сил.фак. **M_z и T, M и N**	**Сложное нагружение**	*Например*: Изгиб + растяжение 

Эпюры внутренних силовых факторов.

Внутренний силовой фактор **(в.с.ф.)** вычисляется в каком-то конкретном сечении бруса.

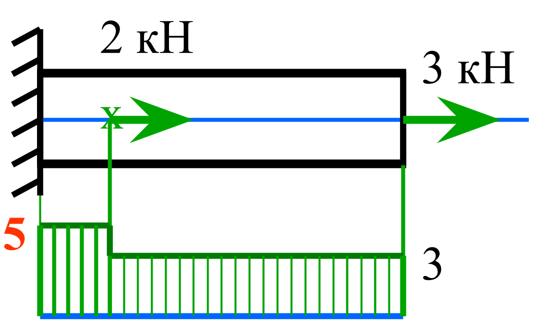
График изменения внутреннего силового фактора (усилия) по длине бруса называется эпюрой в.с.ф.

***Эпюра* N; *эпюра* Мкр; *эпюра* Q; *эпюра* Мизг.**

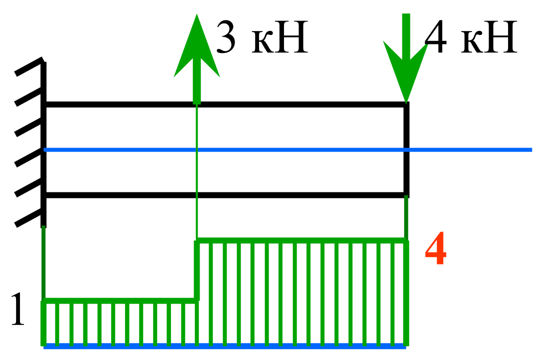
Эпюра строится для нахождения опасного сечения.

Опасное сечение – **это поперечное сечение с максимальным (max) значением в.с.ф.**

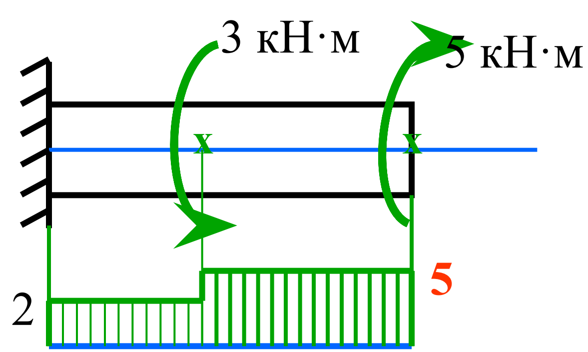
По **опасному сечению** оценивается **работоспособность** (**прочность** или **жесткость**) элемента конструкции.



Эпюра N, кН



Эпюра Q, кН



Эпюра Мкр, кН·м

Для установления **знака внутреннего силового фактора** будем придерживаться следующих правил:

Условимся продольную силу N считать положительной, если она вызывает растяжение, т.е. направлена от сечения и отрицательной, если она вызывает сжатие, т. е. направлена к сечению.

Поперечную силу Q будем считать положительной, если она направлена так, что стремиться повернуть отсеченную часть бруса по ходу часовой стрелки, и ***отрицательной, если - против хода часовой стрелки.***

Крутящий момент $M_{кр}$ ***(Т) будем считать положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали на рассматриваемое сечение он направлен по ходу часовой стрелки или внешний скручивающий момент направлен против хода часовой стрелки***.

Изгибающий момент Мх считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон рассматриваемой части бруса. В противном случае изгибающий момент считается отрицательным.

Лекция 4 (продолжение – 4.10)

2.2. Общий порядок построения эпюр внутренних усилий

График изменения внутреннего усилия по оси бруса называется эпюрой.

1. Если необходимо, то **определяются опорные реакции** так, как это делается в курсе теоретической механики (выбрать объект, отбросить связи, заменить отброшенные связи реакциями, составить уравнения равновесия). Реакции можно не находить, если они не входят в число внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемых сечений.
2. **Определяется число участков** по длине бруса, на которых нагрузка или геометрия бруса не изменяется. **Границей участка** является любой фа… конец бруса, перел… фактора, например…
3. **На каждом из учас…** расстоянии. Для ка… пределы изменения… нулю.
4. Для рассматриваем… рассмотрение рав… усилия по внешним…
5. По полученным вы… необходимо, других…

Из **уравнения равновесия** получаем выражение для продольной силы на **участке 1:** $\boxed{N^{I-I} = F_1 - F_2.}$

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение ***II-II*** на **втором участке** и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \le z_2 \le b$.

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{II-II} и составим **уравнение равновесия** в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0; \quad -N^{II-II} - F_2 = 0.$$

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на **участке 2:** $\boxed{N^{II-II} = -F_2.}$

Аналогично получаем для **участка 3** ($0 \le z_3 \le c$): $\sum Z_i = 0; \quad -N^{III-III} = 0.$ $\boxed{N^{III-III} = 0.}$

Полученные выражения показывают, что **продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на ось бруса сил, взятых по одну сторону от сечения!**

$$\boxed{N = \sum F_{xi}^{\text{прав}} = \sum F_{xi}^{\text{лев}}.}$$

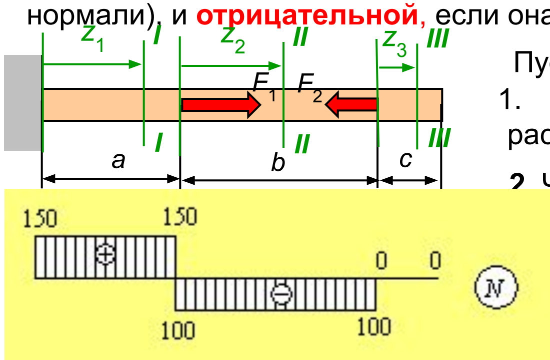
Знак слагаемых положителен, если рассматриваемая сила направлена от сечения, т.е. будучи приложена к сечению **вызывает растяжение** части бруса по другую сторону от сечения.

2.3. Внутренние у…

возникает лишь **один си…** продольной силы может… составленного для оста…

$$\boxed{N + \sum Z_i = 0;}$$

- **Продольная сила** считается **положительной**, если она вызывает **растяжение**, т.е. направлена от сечения (в сторону внешней нормали), и **отрицательной**, если она вызывает **сжатие**, т.е. направлено к сечению.



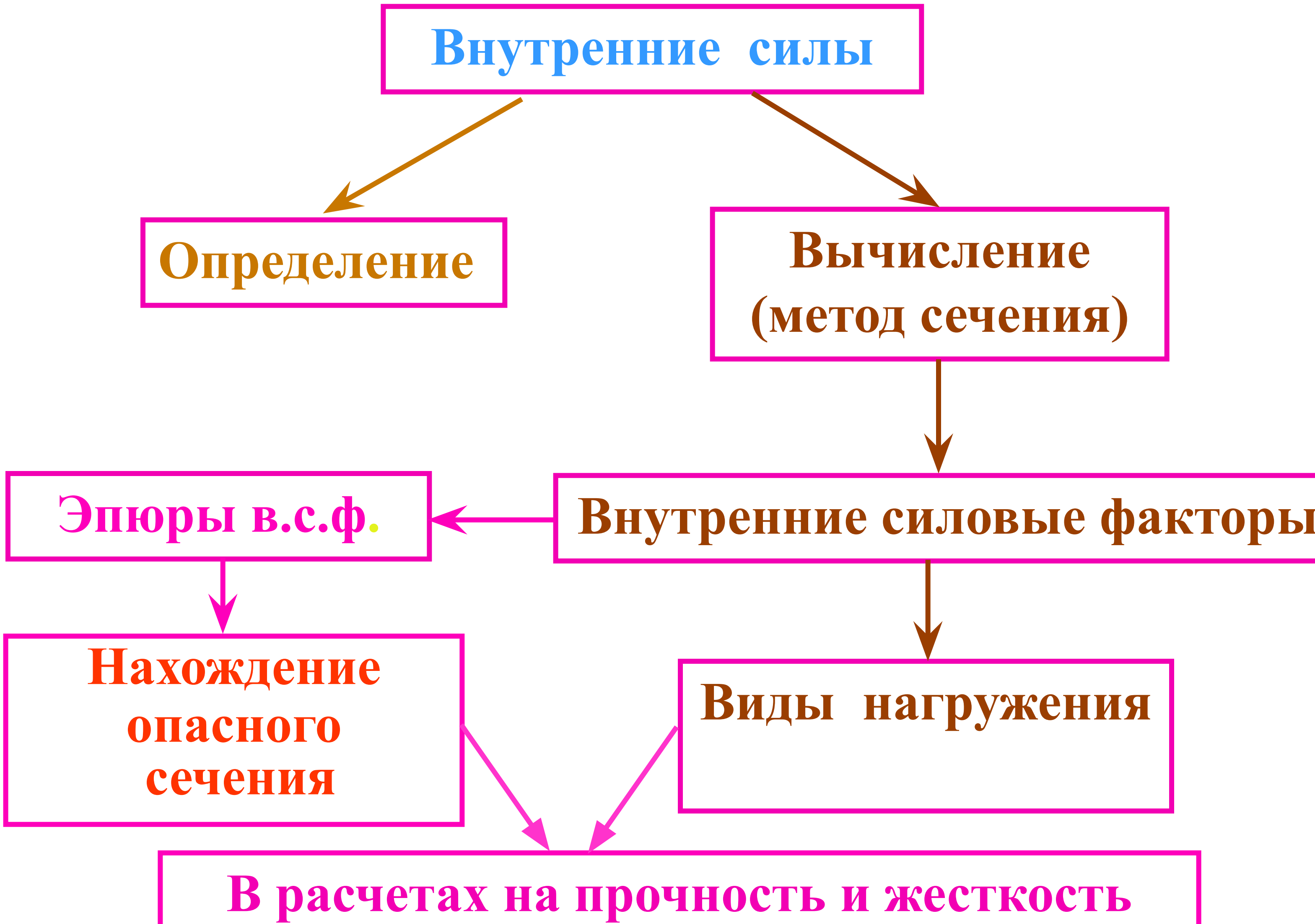
Пусть прямолинейный брус нагружен продольными силами F_1, F_2. Построим эпюру продольных сил:

1. При построении эпюры N, как правило, опорные реакции можно не определять, рассматривая силы, расположенные справа. Пусть $F_1 = 250$ кН, $F_2 = 100$ кН.
2. Число участков - 3.
3. Проведем сечение ***I-I*** на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы изменения: $0 \le z_1 \le a$.
4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{I-I} и составим уравнение равновесия в проекции на ось z: $\sum Z_i = 0; \quad -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0.$

Используя полученные выражения для продольной силы построим эпюру продольных сил: на каждом из участков значения продольной силы в некотором выбранном масштабе получаем эпюру N:

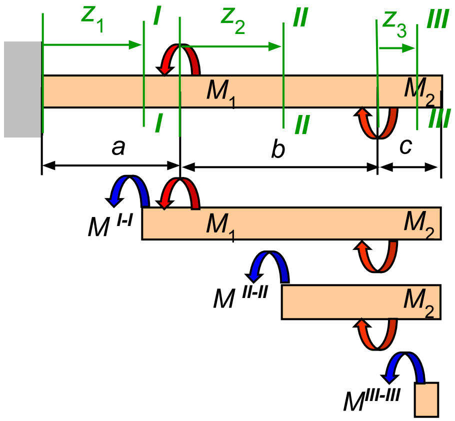
Обратите внимание, что **скачки на эпюре *N* располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных сил и равны величинам этих сил**. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорной реакции.

Итог по теме «Внутренние силы или усилия»



Лекция 4 (продолжение – 4.12)

- **2.4. <u>Внутренние усилия при кручении</u>. Кручением** называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении вала (стержня) возникает лишь **один силовой фактор – крутящий момент M_z**. В соответствии с **методом сечений величина** и **направление крутящего** может быть найдены из **уравнения равновесия** в моментах относительно оси, совпадающей с осью стержня, **составленного для оставленной части. Крутящий момент** считается **положительным**, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он поворачивает сечение **по ходу часовой стрелки**.
Внимание! Это **правило знаков условное** и **не совпадает** с принятыми правилами знаков **моментов**, **углов поворота в теоретической механике**, поскольку **связано не с системой координат**, а **с видом деформации оставленной части**, точно также, как **правило знаков для продольного усилия связано не с направлением оси z, а с видом деформации** рассматриваемой части бруса.
- **Построение эпюры крутящих моментов** принципиально ничем **не отличается от построения эпюры продольных сил. Положительные значения** откладываются **вверх** от горизонтальной оси, а **отрицательные – вниз**.



Прямолинейный брус нагружен **внешними сосредоточенными крутящими моментами M_1, M_2:**

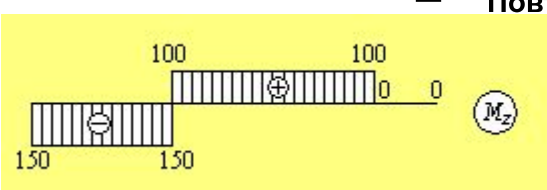
1. ра
2.
3. ее
4. ра

Используя полученные выражения для **крутящего момента** построим **эпюру крутящих моментов:** Пусть M_1=250 Нм, M_2=100 Нм. Откладывая на каждом из участков значения крутящего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюру M_z:
Обратите внимание, что **<u>скачки на эпюре</u> M_z располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных моментам и равны величинам этих моментов**. Соответственно **скачок на левом конце эпюры** дает **величину опорного момента**.

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на **участке 1:**

$$\boxed{M_z^{I-I} = -M_1 + M_2.}$$

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:



…оведем сечение ***II-II*** на **втором участке** и определим текущую координату сечения и …елы ее изменения: $0 \le z_2 \le b$.
…сим левую часть, заменим ее действие крутящим …м M_z^{II-II} и составим уравнение равновесия в моментах …льно оси *z*:

$$\sum M_i = 0; \quad -M_z^{II-II} + M_2 = 0.$$

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на **участке 2:**

$$\boxed{M_z^{II-II} = M_2.}$$

Аналогично получаем для **участка 3** ($0 \le z_3 \le c$):

$$\sum M_{zi} = 0; \quad -M_z^{III-III} = 0. \qquad \boxed{M_z^{III-III} = 0.}$$

Полученные выражения показывают, что **крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси бруса, взятых по одну сторону от сечения!**

$$\boxed{M_z = \sum M_{zi}^{\text{прав}} = \sum M_{zi}^{\text{лев}}.}$$

Глава II. ВНУТРЕННЫЕ УСИЛИЕ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖЕНЯ

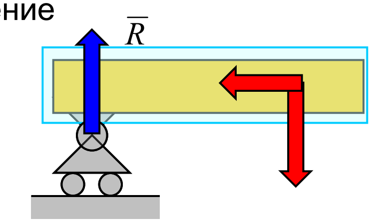
- **ЛЕКЦИЯ 5**

- **Основные типы опор и балок.**
- **Чистый и поперечный изгиб.**
- **Внутренние усилия при изгибе.**
- **Дифференциальные зависимости.**
- **Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.**

- **2.5. <u>Основные типы опор и балок</u> (Схематизация опор). Стержни**, работающие главным образом **на изгиб**, называются **балками**. Балки являются простейшими **несущими конструкциями** в мостах, промышленных и гражданских сооружениях. Балки опираются на другие конструкции или основание (стены, колонны, устои и др.).

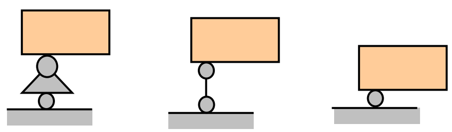
- **Схематизация опорных устройств – упрощает реальные конструкции опорных устройств с сохранением функций ограничения перемещений**. Схематизация большинства из опорных устройств рассмотрена в **курсе теоретической механике** и сводится к к нескольким типам опор:

Шарнирно-подвижная (катковая) опора – ограничивает перемещение объекта **по нормали к опорной плоскости** (не препятствует повороту и перемещению по касательной к опорной плоскости).

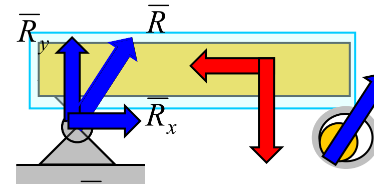


Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

Другие схематические Изображения шарнирно-подвижной опоры:



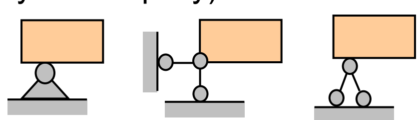
Шарнирно- неподвижная опора – ограничивает перемещение объекта **как по нормали к опорной плоскости, так и по касательной** (не препятствует повороту).



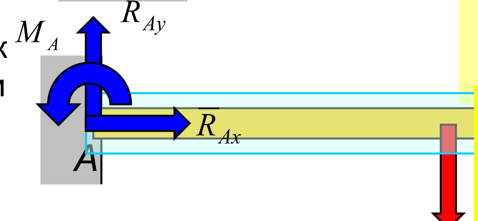
Реакция неподвижного шарнира проходит чер... пер... оси... про... нап...

Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие

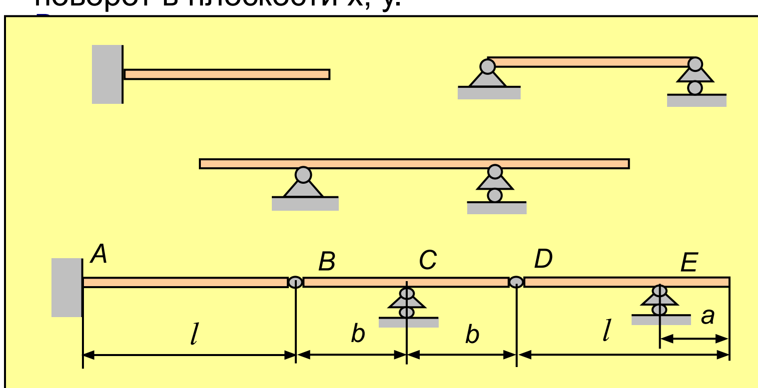
Другие схематические изображения шарнирно-неподвижной опоры:



Жесткое защемление (жесткая заделка) – ограничивает как **поступательные, так и вращательные движения** (линейные и угловые перемещения) объекта. В случае плоской системы сил (плоская заделка)ограничиваются перемещения по осям x, y и поворот в плоскости x, y.



В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы R_{Ax} и R_{Ay},а также реактивный момент (пара сил) M_A .



...**ртикальные реакции** для сокращения ...и V_A (*vertical*).
...**три реакции** по направлению трех координатных ...льно этих осей.
...ым для обеспечения неподвижности балки (плоские системы – 3, ...должны исключать мгновенную изменяемость системы.

Основные типы балок – различаются способом закрепления:
- **Консоль** – один конец жестко защемлен, второй свободен.
- **Простая (двух опорная)** – по обоим концам шарнирные опоры.
- **Консольная (двух опорная)** – простая балка с консольными частями.
- **Составная балка** – составленная из двух или более простых, консольных балок и консолей.

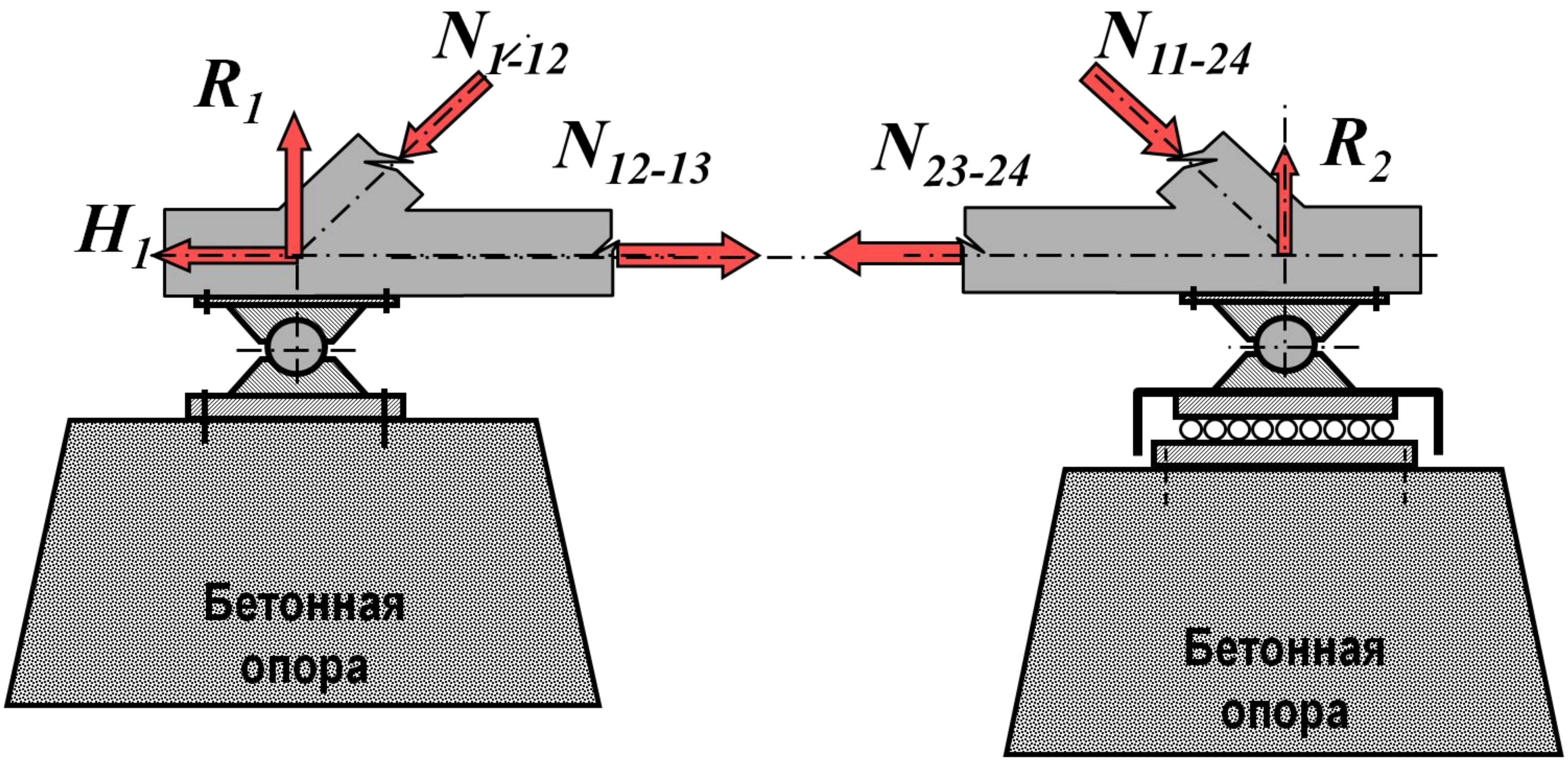
Лекция 5 (продолжение – 5.2)

изгибаемый брус-балка нить-растягиваемый брус

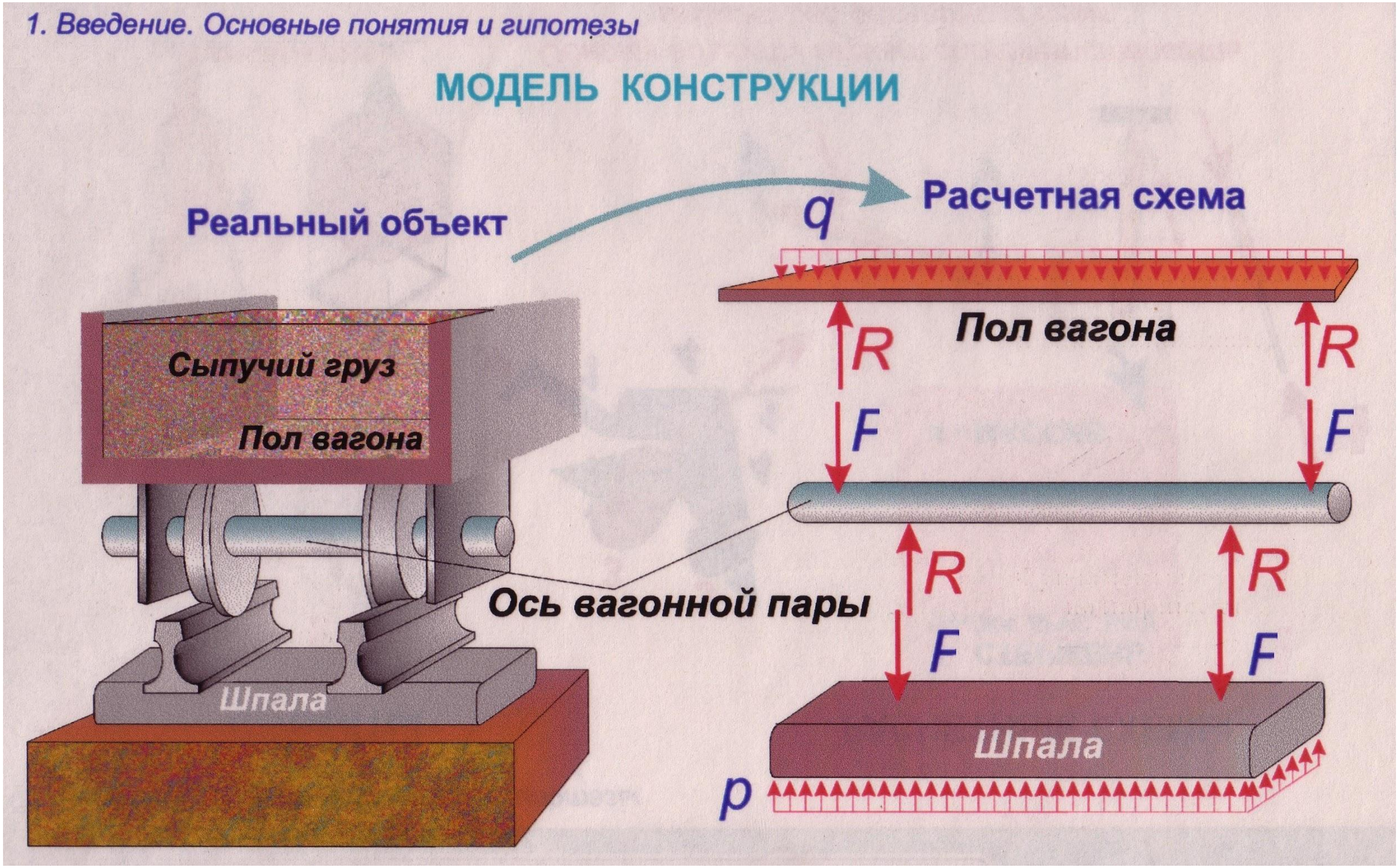
Брус - основной объект исследования сопромата

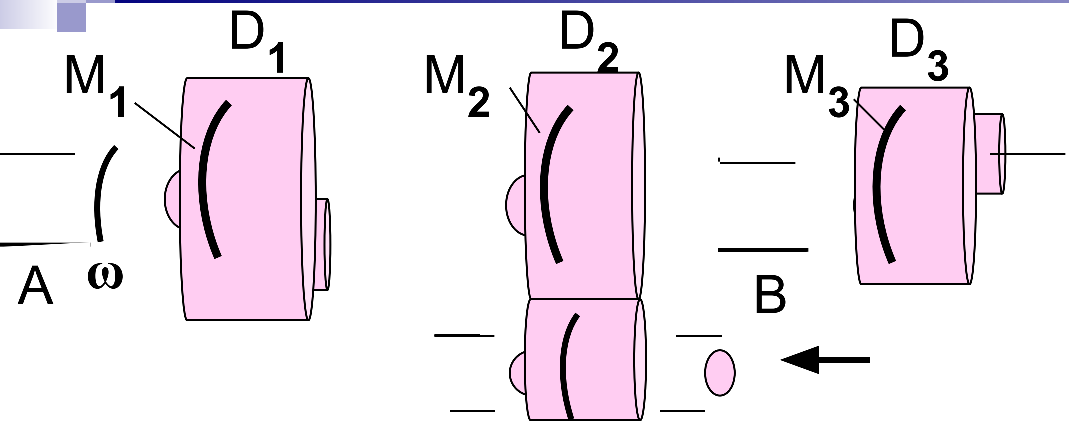
Опоры тяжелых ферм больших пролетов

Шарнирно-неподвижная опора **Шарнирно-подвижная опора**

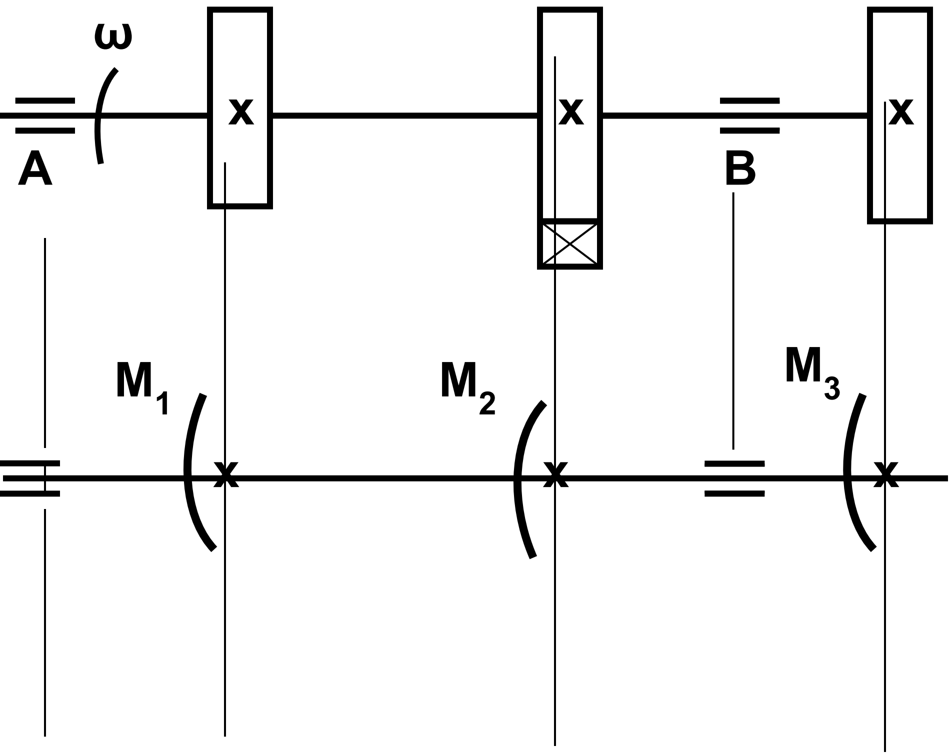


Показано расчетное приложение сил при расчете фермы. Где отклонение от действительного ? (В чем упрощение?)


1. Введение. Основные понятия и гипотезы
МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИИ
Реальный объект
Расчетная схема
q
Пол вагона
R
F
Сыпучий груз
Пол вагона
Ось вагонной пары
Шпала
Шпала
p



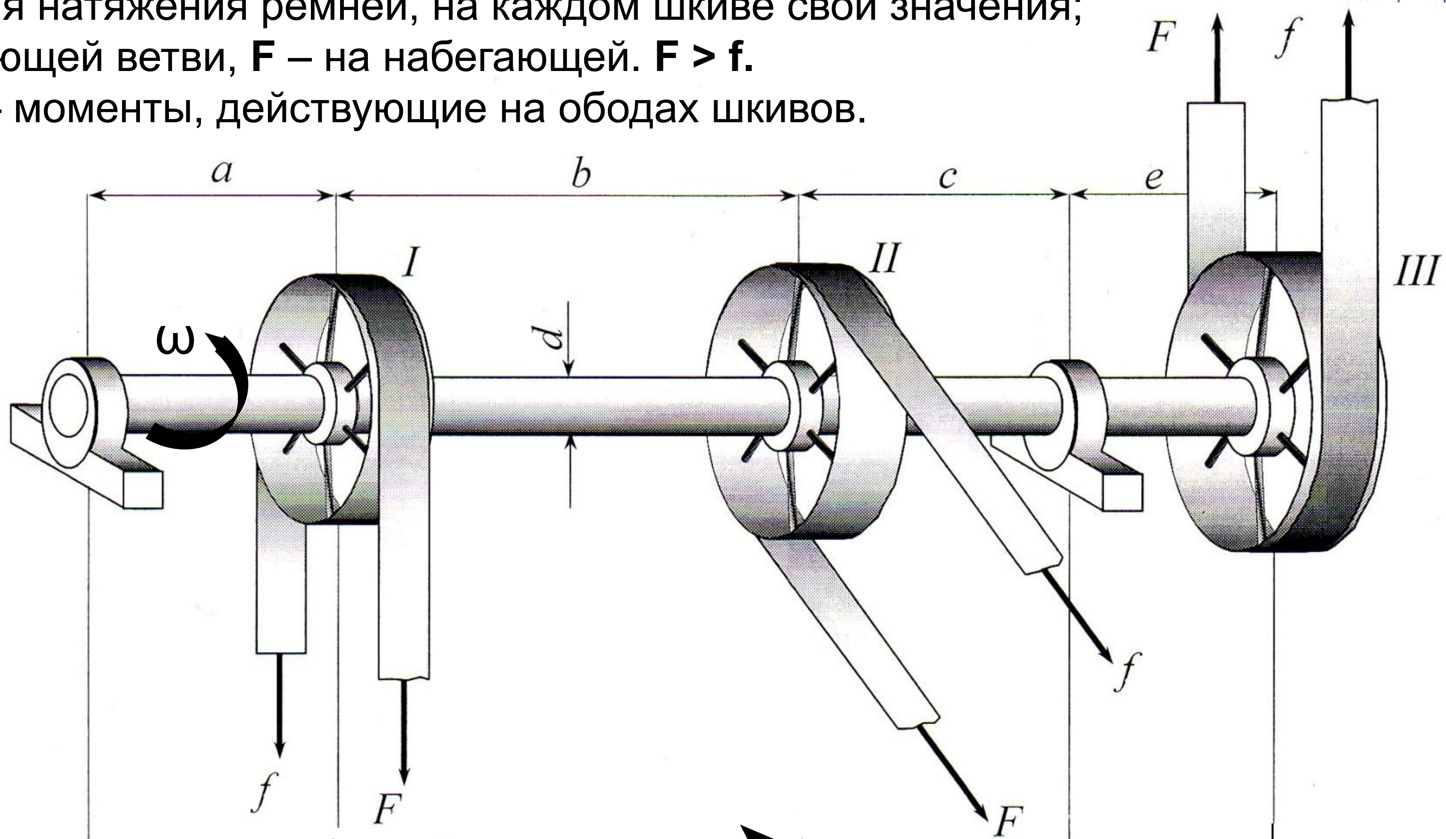
Вал с зубчатыми колесами



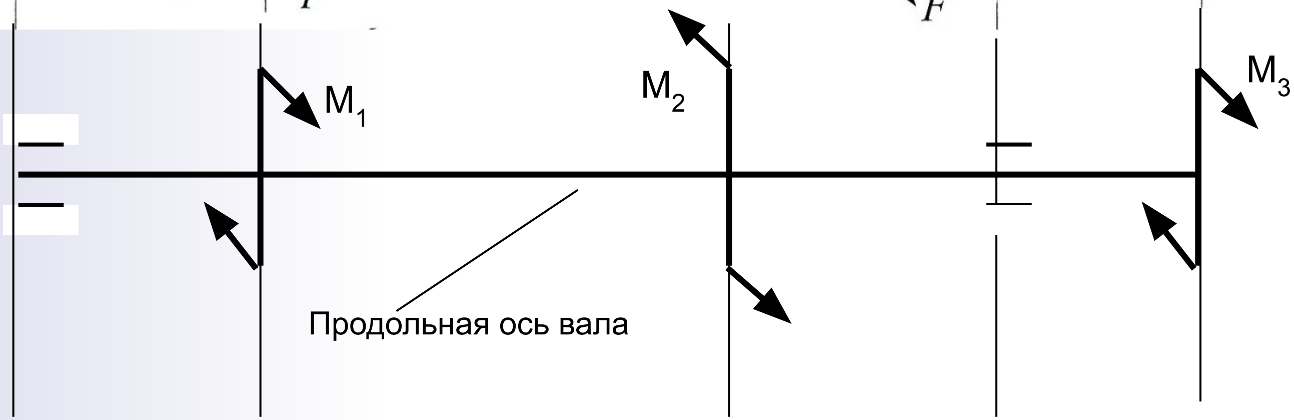
- расчетная схема на кручение

F , f – усилия натяжения ремней, на каждом шкиве свои значения; f – на сбегающей ветви, **F** – на набегающей. **F > f.**
M_1, M_2, M_3 – моменты, действующие на ободах шкивов.

Конструктивная схема



Расчетная схема



Определение опорных реакций в балках.

Определение опорных реакций в балках выполняется **методами теоретической механики**. **Уравнения равновесия** могут быть составлены в виде **одной из трех форм:**

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\&\sum Y_i = 0;\\&\sum M_{iA} = 0\end{aligned}}
\qquad
\boxed{\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\&\sum M_{iB} = 0;\\&\sum M_{iA} = 0\end{aligned}}\ \boxed{\begin{aligned}&x\\&\not\perp\\&AB\end{aligned}}
\qquad
\boxed{\begin{aligned}&\sum M_{iC} = 0;\\&\sum M_{iB} = 0;\\&\sum M_{iA} = 0\end{aligned}}\ \boxed{\begin{aligned}&C\\&\notin\\&AB\end{aligned}}$$

Помните, что неверно найденные реакции в любом случае приведут к неверным результатам при построении эпюр, определении напряжений и перемещений!

От **размерности задачи** зависит **количество независимых уравнений статического равновесия**:

Одномерные (линейные) задачи – **одно уравнение равновесия.**

Двумерные (плоские) задачи – **три уравнения равновесия.**

Трехмерные (пространственные) задачи–**шесть уравнений равновесия.**

- Поскольку **найденные опорные реакции** участвуют в дальнейших расчетах (**построение эпюр внутренних усилий, определение напряжений и перемещений**) следует активно пользоваться этими формами уравнений так, чтобы в каждое из уравнений входила лишь **одна определяемая реакция**, чтобы исключить подстановку ранее найденных и не проверенных реакций.
- После независимого вычисления всех реакций **обязательно должна быть сделана проверка** составлением такого уравнения равновесия, в котором бы присутствовали все или большинство из найденных реакций.
- Поскольку балки несут преимущественно вертикальную нагрузку, то в **общем случае рекомендуется** воспользоваться **формой II** и проверить вертикальные реакции составлением **уравнения в проекциях на вертикальную ось**.

2.6. Внутренние усилия при изгибе.

При изгибе возникают в общем случае **изгибающие моменты** M_x, M_y и **поперечные силы** Q_x, Q_y. Если в поперечном сечении возникает только **один изгибающий момент** M_x, то такой изгиб называется **чистым изгибом**. В большинстве случаев дополнительно к изгибающему моменту возникает **поперечная сила** Q_y, и такой изгиб называется **поперечным**.

Если **внешняя н**...

то такой изгиб назы...

Правила знаков...

принимается **полож**...

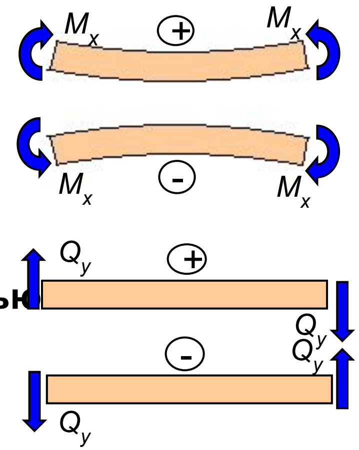
волокна оказываютс...

вниз.

Правила знаков...

положительной, ес...

часовой стрелки.



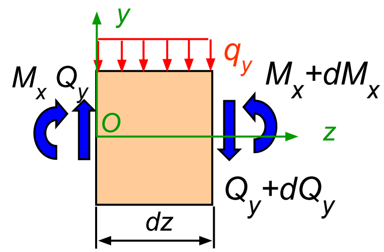
С использованием этих основных зависимостей получаем:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y.$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

Дифференциальные зависимости при изгибе между M_x, Q_y, q_y

M_x, Q_y, q_y – связывают внутренние усилия между собой в сечении и нагрузкой. Выделим из балки элемент длиной ***dz***, находящийся по действием внешней вертикальной равномерно распределенной нагрузкой ***q***, и заменим действие отброшенных частей внутренними усилиями:



Выделенный элемент находится в равновесии и удовлетворяет уравнения равновесия:

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_y - q_y dz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\sum M_{0i} = 0; \quad -M_x - q_y dz\frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y)dz + (M_x + dM_x) = 0.$$

Из **первого** уравнения получаем:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y.$$

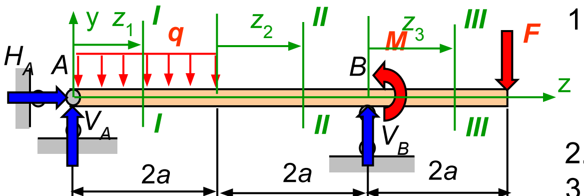
Производная от поперечной силы по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

Из **второго** уравнения, пренебрегая малыми второго порядка получаем:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.

2.7. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Принципиально ничем **не отличается** от построения эпюры **продольных сил** и **крутящих моментов**. Положительные значения **поперечной силы Q_y** откладываются **вверх** от горизонтальной базовой линии, а отрицательные **– вниз.** Положительные значения **изгибающих моментов M_x** откладываются **вниз** – со стороны растянутого волокна. Таким образом **расположение ординат эпюры M_x указывают, какие волокна растянуты.**
Примечание: Это правило принято в **строительных** и **транспортных** вузах в то время, как в машиностроительных и авиационных вузах используется обратное правило (положительный момент откладывается со стороны сжатого волокна).
Пусть балка нагружена **равномерно распределенной нагрузкой q**, **сосредоточенной силой $F = qa$** и **крутящим моментом $M = qa^2$:**



1. Определяем **опорные реакции:**

$$\sum Z_i = 0; \quad H_A = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -F6a + M + V_B 4a - (q2a)a = 0;$$
$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -F2a + M + (q2a)3a - V_A 4a = 0;$$

$V_B = 1{,}75qa$

$V_A = 1{,}25qa$

$$V_B = \frac{F6a - M + q2a^2}{4a} = \frac{qa6a - qa^2 + q2a^2}{4a} = 1{,}75qa.$$

2. Количество участков – 3.
3. Проведем сечение **I-I** на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: **$0 \le z_1 \le 2a$.**

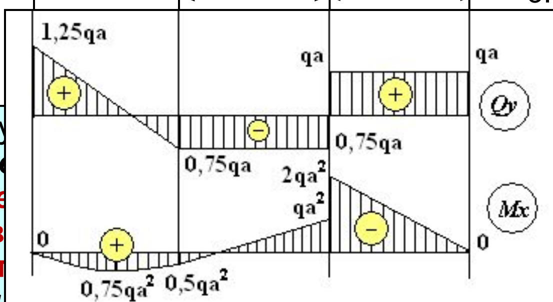
Из второго и третьего уравнений получаем:

Отбросим правую часть, заменим ее действие поперечной силой Q_y^{I-I} и изгибающим моментом M_x^{I-I}, составим уравнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси, проходящей **через центр текущего сечения** (т.е. относительно **точки C**):

$$V_A = \frac{F2a - M + q6a^2}{4a} = \frac{qa2a - qa^2 + q6a^2}{4a} = 1{,}25qa.$$

Контроль: $\sum Y_i = 0; \; V_A - q2a + V_B - F = 0; \; 1{,}25qa - 2qa + 1{,}75qa - qa \equiv 0.$

$$\sum Y_i = 0; \; V_A - qz_1 - Q_y^{I-I} = 0; \quad \sum M_{Ci} = 0; \; -V_A z_1 + qz_1 \frac{z_1}{2} + M_x^{I-I} = 0.$$



Полу... попе... алге... на в... взят... изги...

Используя полученные выражения для **поперечной силы** и **изгибающего момента** построим **эпюру поперечных сил** и **изгибающих моментов**, подставляя значения реакций и координаты начала и конца участков. В случае **квадратичного изменения** ...ающий момент на первом участке) дополнительно подставляется ... **внутри интервала**, например, **посредине**.
...ждом из участков значения **поперечных сил** и **изгибающего момента** ...анном масштабе **получаем эпюры Q_y и M_x:**

Свойства эпюр:
1. **Равномерно распределенная нагрузка** на участке своего действия вызывает **на эпюре Q наклонную прямую линию**, падающую в сторону действия нагрузки, а **на эпюре M – параболу с выпуклостью в ту же сторону.**
2. **Сосредоточенная сила** вызывает **на эпюре Q скачок** в точке приложения силы в сторону действия силы, а **на эпюре M – перелом** в ту же сторону.
3. **Сосредоточенный момент** не вызывает **на эпюре Q** в точке его приложения **никаких особенностей,** а **на эпюре M** вызывает **скачок** в ту же сторону.

...**через центр текущего сечения** (т.е. относительно **точки D**):

$$... - Q_y^{II-II} = 0; \quad \sum M_{Di} = 0; \; -V_A(2a + z_2) + q2a(a + z_2) + M_x^{II-II} = 0.$$

$$\boxed{Q_y^{II-II} = V_A - q2a.} \quad \boxed{M_x^{II-II} = V_A(2a + z_2) - q2a(a + z_2).}$$

...ем для **участка 3** (**$0 \le z_3 \le 2a$**):

$$\sum Y_i = 0; \; Q_y^{III-III} - F = 0; \quad \sum M_{Ei} = 0; \; -M_x^{III-III} - F(2a - z_3) = 0.$$

$$\boxed{Q_y^{III-III} = F.} \quad \boxed{M_x^{III-III} = -F(2a + z_2).}$$

Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

- **ЛЕКЦИЯ 6**

- Центральное растяжение-сжатие.
- Принцип Сен-Венана.
- Напряжения и деформации.
- Коэффициент Пуассона.
- Модуль упругости.
- Закон Гука.
- Напряжения на наклонных площадках.

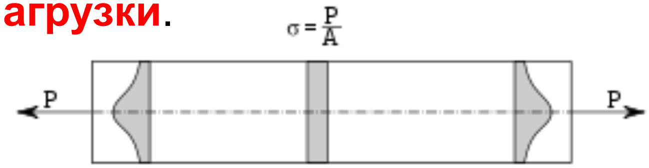
Лекция 6

- **Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**
- **3.1. Центральное растяжение-сжатие.**

При **растяжение-сжатие** в поперечных сечениях стержня возникают только **продольные силы *N*,** а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.
Он наблюдается когда внешняя нагрузка действует **вдоль продольной оси стержня**. **Продольной осью** стержня называется **линия,** проходящая **через центры тяжести поперечных сечений**.

Сосредоточенных сил, приложенная к некоторой части твёрдого тела, вызывает в нём появление **неравномерности распределения напряжений** (распределения деформаций достаточно сложный), которая быстро уменьшается по мере удаления от этой части. На расстояниях, **больших максимального линейного размера зоны приложения нагрузок**, **неравномерность распределения напряжения** и **деформации** оказываются **пренебрежительно малыми.**

В **СМ** этот принцип называется **принципом Сен-Венана** **и** формулируется так: **в сечениях, достаточно удалённых от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагрузки и определяется лишь статическим эквивалентом нагрузки**.



Демонстрация принципу Сен-Венана

Формула **нормальных напряжений** справедлива только для удаленных от места приложения внешней нагрузки поперечных сечений стержня. Вблизи места приложения внешней нагрузки **гипотеза плоских сечений** не выполняется.

Как показывает опыт, за пределами этой области **деформации практически постоянны** и **поперечные сечения перемещаются параллельно своим начальным положениям**.
На основании этого вводится **гипотеза плоских сечений** (**гипотеза Я. Бернулли**):
Поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными после деформации.
Равномерность распределения напряжений нарушается возле **отверстий, в местах изменения формы** или **размеров поперечного сечения бруса.**

3.1.1. Напряжения и деформации.

Задача **определения напряжений** всегда является ***статически неопределимой*.** Такие задачи решаются последовательным рассмотрением **статической, геометрической** и **физической сторон**. В этом случае имеем ***статическое* уравнение**, связывающее **внутреннее усилие – продольную силу с напряжением:**

$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

Для вычисления интеграла необходимо знать **закон изменения напряжений по сечению**. Этот закон можно установить изучением наблюдаемых перемещений (деформаций). Поскольку принимается **гипотеза плоских сечений**, то при отсутствии **внешней распределенной продольной нагрузки деформации постоянны по сечению и по длине стержня** (***геометрия***).

Определения деформаций в точке:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = const. \Rightarrow \varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l},$$

Δl – абсолютная продольная деформация,
l – начальная длина стержня.

Опытным путем установлена фундаментальная (***физическая***) связь **усилий и удлинений** (Р. Гук 1676 г.) и в дальнейшем, **напряжений и деформаций** (Л. Коши, 1822 г. сформулировал закона Гука в современном виде и впервые ввел понятия **«напряжение»** и **«деформация»**) в виде:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где ***E* – модуль упругости** (*физическая постоянная* материала, определяемая экспериментально).

Подстановка **зак. Гука** в интегральное выражение с учетом **постоянства деформации** и **напряжения** дает:

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A; \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении прямо пропорционально величине продольного усилия и обратно пропорционально площади сечения.

Абсолютную деформацию (удлинение) стержня также можно определить через **продольное усилие:**

$$\Delta l = \varepsilon_z l = \frac{\sigma}{E} l. \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Формула для **абсолютного удлинения** справедлива лишь при **постоянной по длине стержня силе** и **неизменной площади поперечного сечения!** В случае **переменной продольной силы,** например, при учете **собственного веса вертикальных стержней** и **переменной площади** необходимо использовать **интегральное выражение:**

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA}.$$

Коэффициент Пуассона и модуль упругости. При растяжении стержня наряду с **продольной деформацией** (**удлинением**), определяемой законом Гука, возникает **поперечная деформация** (**сужение поперечного сечения**), выражающаяся в уменьшении поперечных размеров стержня. **Относительные продольные** и **поперечные деформации** вычисляются так:

$$\boxed{\varepsilon_{\text{прод.}} = \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l},} \quad \boxed{\varepsilon_{\text{попер.}} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h},}$$

где l и h – размеры продольного и поперечного сечения стержня.
При **растяжении** $\Delta l > 0, \Delta h < 0$; при **сжатии** $\Delta l < 0, \Delta h > 0$.

Экспериментально установлено, что имеется **линейная связь** между **продольной** и **поперечной** **деформацией :** $\boxed{\varepsilon_{\text{попер.}} = -\mu\varepsilon_{\text{прод.}}}$ где μ – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом Пуассона**.

Коэффициент Пуассон... деформаций имеет **постоянное** **значение** и находится в ... зует свойства материала).

Томас Юнг 1807 г. вперв... ествует **постоянная величина,** характеризующая спосо... **ешних нагрузок**, названной им **модулем упругости (мо**...

Модуль упругости х... **териала – жесткость – и является фундамен**... **е обходится ни один инженерный расчет**... **.**

Луи Мари в 1826 г. дал ... **ние нагрузки, приходящейся на единицу площади попе**... **ению:** $\boxed{E = \sigma / \varepsilon.}$

Т.о., потребовалось поч... ы оно получило **практическое применения в виде фо**... в тех же единицах, что и **напряжения** σ, т.е. в **Па.**

Значения модуля упругости E и коэффициента Пуассона μ

Материал	E, ГПа	μ
Сталь	206	0,25-0,33
Медь, бронза	100-130	0,31-0,35
Кирпичная кладка	0,1-7,8	0,25
Бетон	4-40	0,08-0, 18
Древесина вдоль волокон поперек волокон	 10 0,4	 0,5 0,02
Алюминий	70	0,32-0,36
Резина, каучук	0,007	0,47-0,5

3.2. Обобщенный закон Гука.

По **закону Гука**, определяющему **связь нормальных напряжений с продольными деформациями:**

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}.$$

Тогда

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

При **нагружении** по граням выделенного элемента возникают **нормальные (НН)** и **касательные (КН) напряжения**. **КН,** вызывая **деформации сдвига**, не влияют на **линейные и угловые деформации** (**не изменяют длин сторон элемента**). Это справедливо лишь для **изотропного материала** и в случае **линейной зависимости между** $\boldsymbol{\sigma}$ и ε Используя ***принцип независимости действия сил***, справедливый для **изотропного** и **линейно упругого материала**, можно записать **обобщенный закон Гука**, учитывающий **одновременное действие нормальных напряжений по всем граням элемента:**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

3.3. Напряжения в сечениях, наклонных к оси стержня при растяжении – сжатии.

Стержень, находиться под действием **равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью *σ*.**
Определим **напряжения на наклонной площадке**, составляющей **угол α** с поперечным сечением.
При **растяжении стержня** в его **поперечном сечении** возникают только **нормальные напряжения**.
Посмотрим какие напряжения возникают в сечении, **не перпендикулярном оси стержня**.

Анализ полученных соотношений показывает:

1. При ***α* = 0** (наклонная площадка совпадает с поперечным сечением): **Касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения максимальны.**

$$\sigma_\alpha = \sigma_z; \quad \tau_\alpha = 0.$$

2. При ***α* = 45°** **касательные напряжения максимальны**, а **нормальные напряжения равны касательным.**

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}.$$

3. При ***α* = 90°** (продольная площадка) **нормальные и касательные напряжения обращаются в ноль** (продольные волокна не давят друг на друга и не двигаются).

4. На двух взаимно перпендикулярных площадках **касательные напряжения равны по абсолютной величине.**

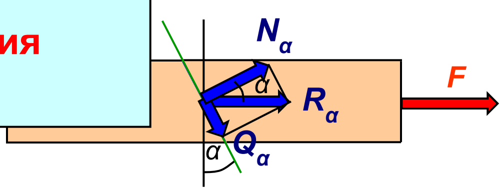
них сил R_α:

авляющие N_α и Q_α:

площадью

α.

напряжений по сечению.



С учетом того, **продольная сила *N*** в поперечном сечении равна **внешней растягивающей силе *F***, отношение ***F*/*A* = *N*/*A* = *σ***
(*σ* – нормальное напряжение в поперечном сечении).
Тогда получаем:

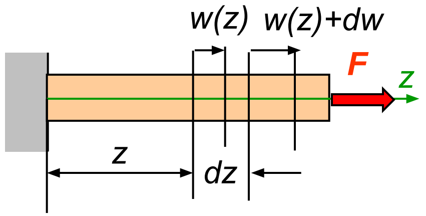
$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha;$$
$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha.$$

Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

- ЛЕКЦИЯ 7

- Перемещения при растяжении сжатии.
- Учет собственного веса.
- Статически неопределимые системы при растяжении сжатии.
- Расчет статически неопределимых систем на действие нагрузки, температуры и неточность сборки (натяг).

3.4. Перемещения при растяжении - сжатии. Рассмотрим стержень, **нагруженный растягивающей силой *F***. Выделим на расстоянии ***z*** участок **длиной *dz***. **Удлинение этого участка Δ*dz*** равно **перемещению второй его границы относительно первой *dw***. **Деформация** на этом участке определяется выражением, представляющим собой **дифференциальное уравнение:**



$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{w(z)+dw-w(z)}{dz} = \frac{dw}{dz}.}$$

Откуда $dw = \varepsilon_z dz$. Продифференцировав левой и правой частей его, получим:

$$dw = \varepsilon_z dz. \Rightarrow \int_{w_0}^{w} dw = \int_{z_0}^{z} \varepsilon_z dz. \Rightarrow w\Big|_{w_0}^{w} = \int_{z_0}^{z} \varepsilon_z dz.$$

Подставим пределы и выражение для деформации, следующего из **закона Гука:**

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA},} \Rightarrow w - w_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{N}{EA} dz. \Rightarrow \boxed{w = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{N}{EA} dz.}$$

w_0 – **перемещение левой границы** рассматриваемого участка на расстоянии z_0,
EA – жесткость стержня при растяжении-сжатии, N – продольное усилие.

В случае **постоянства продольного усилия** и **площади поперечного сечения** имеем:

$$\boxed{w = w_0 + \frac{N}{EA}(z - z_0).}$$

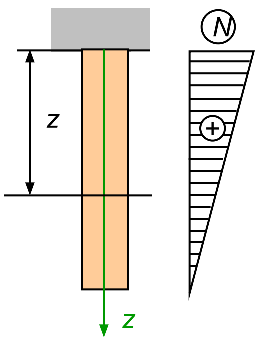
Отсюда, как частный случай, получается выражение для **абсолютного удлинения стержня** $(w_0 = 0,\ z_0 = 0,\ z = l\ )$:

$$\boxed{w = \Delta l = \frac{Nl}{EA}.}$$

Формула перемещений показывает, что **перемещения** исчисляются **нарастающим итогом**, т. е. к **перемещению,** вычисляемому на рассматриваемом участке [z_0 ,z] (второе слагаемое), добавляется **перемещение сечения**, соответствующего левой границе, и представляющего **перемещение всего участка**, как **жесткого целого** (твердого тела). Если на каждом из участков **продольное усилие** и **площадь поперечного сечения постоянны**, то **определение перемещения любого сечения** или **конца сте**ржня сводится к **простому суммированию** удлинений каждого из участков от неподвижного сечения до рассматриваемого.

Учет собственного веса.

Рассмотрим стержень, нагруженный **собственным весом** (длина стержня l, объемный вес стержня γ).



и

Таким образом, учет **равномерно распределенной продольной нагрузки** (**собственный веса**) может быть выполнен непосредственным **интегрированием по рассматриваемому участку** или **использованием выражения, подобного абсолютному удлинению стержня при постоянной продольной силе, в котором сила уменьшена вдвое!** (см. результат определения перемещения конца стержня).

Например, **второй результат** (перемещение сечения посредине длины стержня) может быть получен, как **сумма перемещений рассматриваемого сечения стержня от действия собственного веса верхней части, учитываемого как *распределенная* нагрузка, и перемещения его от веса нижней части, действующего на верхнюю часть как *внешняя* сила:**

$$\boxed{w = \frac{\left(\frac{G}{2}\right)\frac{l}{2}}{2EA} + \frac{\left(\frac{G}{2}\right)\frac{l}{2}}{EA} = \frac{3}{4}\cdot\frac{G}{2EA}l.}$$

Перемещение

координаты:

$$w = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{N}{EA}$$

Определим перемещения конца стержня и сечения на расстоянии половины длины:

$$w = \frac{\gamma A}{2EA}(2l-z)z\Big|_{z=l} = \frac{\gamma A}{2EA}l^2 = \boxed{\frac{G}{2EA}l,} \qquad w = \frac{\gamma A}{2EA}(2l-z)z\Big|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma A}{2EA}l^2 = \boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{G}{2EA}l.}$$

Здесь ***G*** **– вес стержня.**

Лекция 7 (продолжение – 7.3)

3.5. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии.

Для решения задач **СМ** необходимо знать **все внешние силы и силы реакции связей** конструкции . Из **ТМ** известно, что для **равновесия твердого тела**, нагруженного **плоской системой сил**, достаточно наложить на тело **три связи**, а нагруженного **пространственной системой сил** – **шесть связей**. Соответственно для таких систем можно составить **три** и **шесть независимых уравнений равновесия**.

Если на систему в плоскости действует **более 3-х реакцией**, то **не хватит 3-х уравнений статики** для определения **этих реакций**. Такие системы называются **статически неопределимыми.** Для решения таких задач необходимо получить столько **дополнительных уравнений** сколько имеется лишних неизвестных**.** Необходимое количество **дополнительных уравнений** называется **степенью статической неопределимости** системы

Дополнительные уравнения получается из **деформации системы**, и называются

При **сборке статически неопределимых систем,** имеющих **неточно изготовленные стержни,** стержни приходится деформировать (удлинять или укорачивать), при этом в них возникают **напряжения**, называемыми **начальными или монтажными**.

В **статически неопределимых конструкциях** при изменении температуры ее элементов по сравнению с температурой, при которой осуществлялась сборка, возникают **дополнительные усилия** и **напряжения,** которые принято называть **температурными**.
Распределение усилий между элементами системы зависит от **их жесткости**. Если **увеличить жесткость** какого-либо элемента, то он примет на себя **большее усилие.** Изменяя соотношение жесткостей элементов конструкций, можно менять **распределение усилий** между ними.

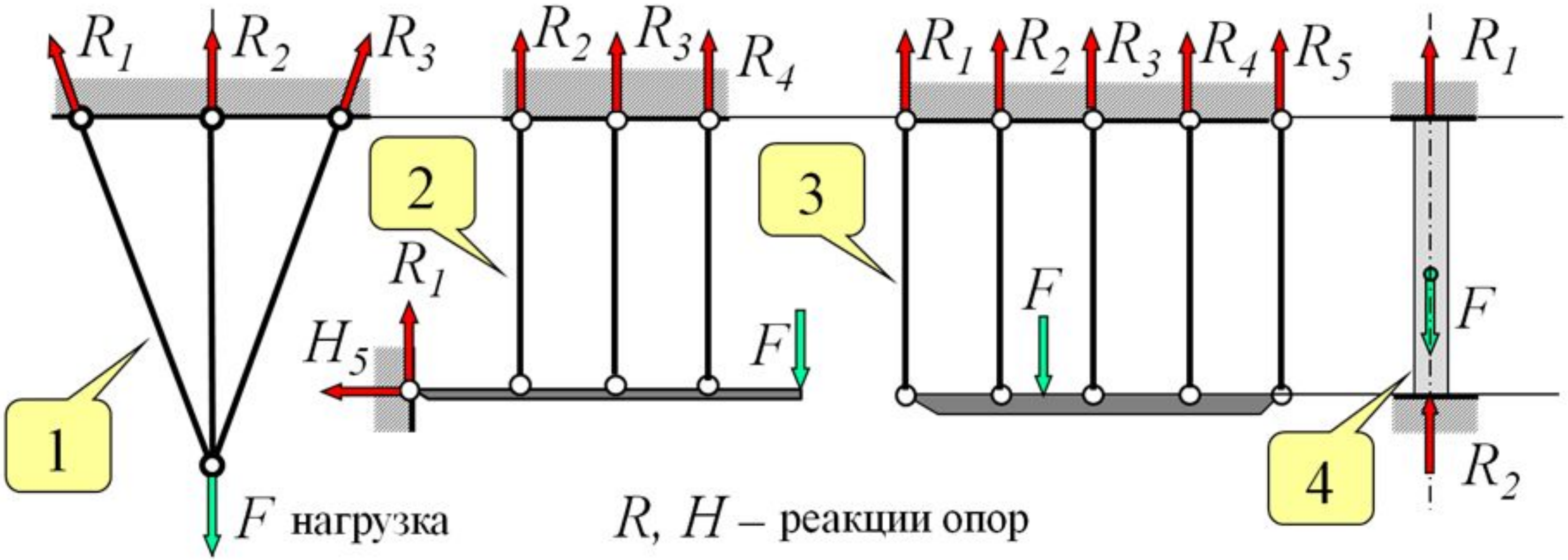
4) смещения мест опорных креплений

Объясняется это тем, что **деформация**

неопределимой системе приводит к де

В технических конструкциях такие системы находят широкое применение. В одних случаях **статическая неопределимость** является **сущностью самой конструкции**.

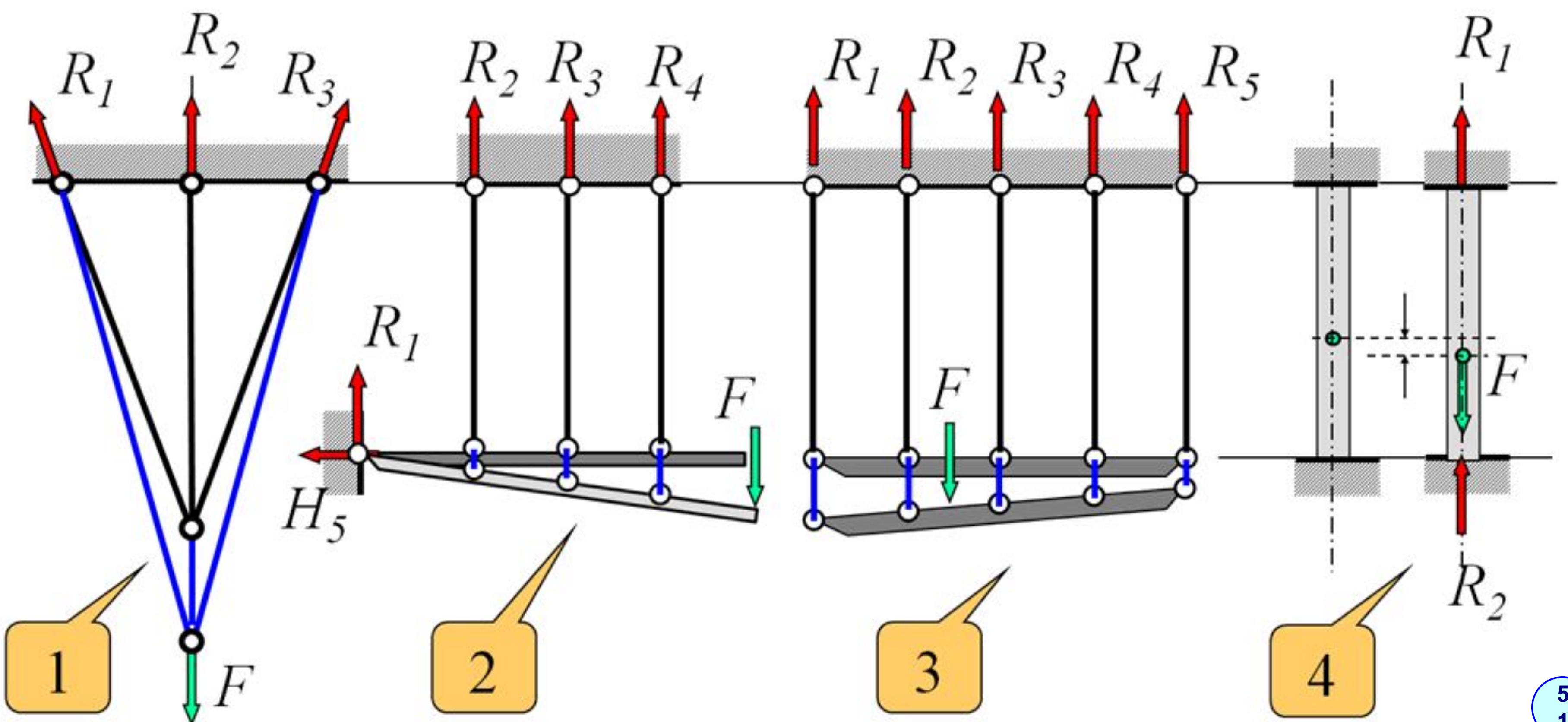
Статически неопределимые стержневые системы



Номер расчётной схемы	1	2	3	4
Число независимых уравнений статики	2	3	2	1
Число неизвестных реакций	3	5	5	2
Степень статической неопределимости ***n***	**1**	**2**	**3**	**1**
Количество лишних связей ***n***	**1**	**2**	**3**	**1**

Статически неопределимые стержневые системы

Деформированный вид стержневых систем



В **СМ** рассматриваются обычно **простейшие статически неопределимые системы (СНС), к которым относятся:**

а) прямые стержни постоянного, кусочно-постоянного и переменного сечений, закрепленные с двух сторон, от нагрузки действующей вдоль оси стержня;

б) системы шарнирно соединяемых стержней с возможным включением жестких недеформируемых элементов.

При решении **статически неопределимых систем,** в стержнях которых действуют **продольные силы**, можно отметить **основные этапы**:

1) анализ работы конструкции с указанием **действующих силовых факторов** и **выяснением деформации ее элементов**, определение **степени статической неопределимости;**

2) статическая сторона задачи – составляют **уравнения равновесия** для системы или отсеченных ее частей;

3) геометрическая сторона задачи – выясняют, как **деформируются стержни системы**, изображают систему в деформированном виде, **устанавливают связи между перемещениями отдельных элементов системы**, составляют **уравнения совместности перемещений;**

4) физическая сторона задачи – выражает **деформации элементов, согласно закону Гука, через действующие в них неизвестные усилия**;

5) синтез – определяют **неизвестные силы**, решая совместно систему **уравнений равновесия** и **перемещений.**

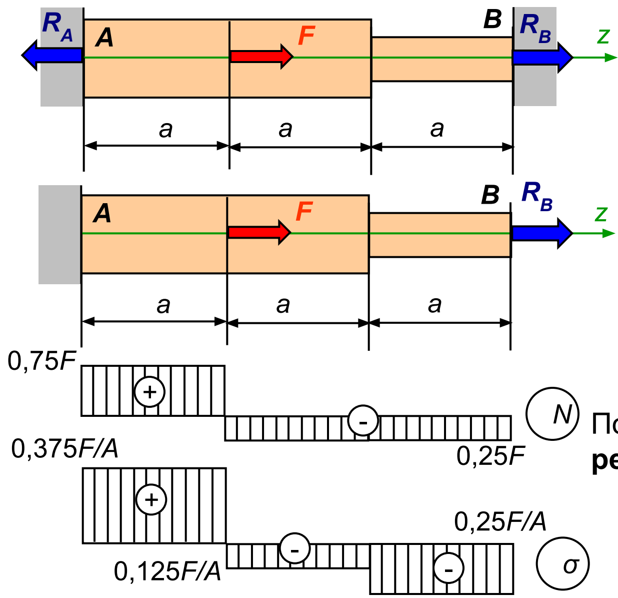
В технических конструкциях такие системы находят широкое применение. В одних случаях **статическая неопределимость** является **сущностью самой конструкции**. Рассмотрим расчеты **статически неопределимых систем на примере простейших конструкций.**

Лекция 7 (продолжение – 7.7)

- **Пример 1.** Стержень сечениями **2*A*** и ***A*** жестко заделан с двух сторон и **нагружен продольной силой**. **Построить эпюры *N* и *σ*.**

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие **реакциями:**

2. *Статика:* Составляем **уравнение равновесия**: $\sum Z_i = 0;\ \boxed{-R_A + F + R_B = 0.}$



Это **единственное уравнение равновесия**, которое можно составить для **линейной системы сил**. Следовательно **система один раз статически неопределима.**

3. *Геометрия*: Составляем **уравнение совместности деформаций**:

$$\Delta l = 0;\quad \boxed{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.}$$

Это уравнение устанавливает **неизменность общей длины стержня при любых воздействиях,** которую обеспечивали **связи** (жесткие заделки) **до их удаления.**

4. *Физика*: Записываем соотношения **связи деформаций с усилиями**:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A};\quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A};\quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}.$$

Получили **систему уравнений**, решающую данную задачу (**5 уравнений** и **5 неизвестных–2 реакции** и **3 перемещения**). Подставляем соотношения упругости в **уравн-я совместности**:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} = 0. \Rightarrow R_A + 3R_B = 0. \Rightarrow R_A = -3R_B.$$

Подставим полученное соотношение в **уравнение равновесия:**

$$3R_B + F + R_B = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = -\frac{F}{4};\quad R_A = \frac{3F}{4}.}$$

...ически неопределимой ...

Составляем **уравнение совместности деформаций**:

$$\Delta l = 0;\quad \boxed{\Delta l_F + \Delta l_R = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta l_R = -\Delta l_F}$$

После определения опорных реакций можно построить **эпюру продольных сил** вычисление значений по участкам:
$N_1 = R_A = 3F/4$,
$N_2 = N_3 = R_B = F/4$.
В сечении, в котором приложена ***сосредоточенная сила,*** получился скачок, равный величине этой силы.
Эпюра нормальных напряжений также строится вычислением значений напряжений по участкам:
$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 3F/8A$,
$\sigma_2 = N_2 / A_2 = F/8A$,
$\sigma_3 = N_3 / A_3 = F/4A$.
В сечении резкого изменения площади получился скачок.

Если имелся **первоначальный зазор**, например между правым концом стержня и заделкой, или напротив **натяг** (первоначальный размер стержня превышает расстояние между опорами), то это учитывается лишь в **уравнениях совместности деформаций**:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta. \qquad (\Delta>0 \text{ зазор}, \Delta<0 \text{ натяг})$$

Если вместо **силового нагружения**, или дополнительно к нему, действует **температурная нагрузка (нагрев)**, то это учитывается **введением температурных удлинений в уравнения совместности деформаций**.

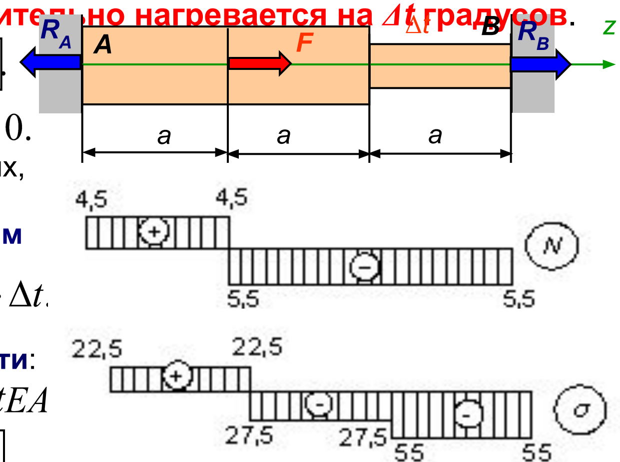
Расчет статически неопределимых систем на действие температуры. В **статически неопределимых системах нагрев (охлаждение)** элементов вызывает ***дополнительные внутренние усилия*** (**напряжения**), которые могут значительно превышать **усилия** от **действия силового нагружения**. **Общий порядок** решения задачи сохраняется, но **уравнения совместности деформаций** (удлинений) **содержат удлинения от действия** **разности температур** $\Delta l_t = \alpha l \cdot \Delta t$:

,

α – коэффициент линейного расширения материала, ***l*** – длина стержня.

Пример 1.1. Стержень с **сечениями** 2*A* и *A*, рассмотренный в **примере 1**, **дополнительно нагревается на *Δt* градусов**.

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их реакциями:



2. *Статика*: Составляем **уравнение равновесия:** $\sum Z_i = 0;\ \boxed{-R_A + F + R_B = 0}$

3. *Геометрия*: Составляем **уравнение совместности деформаций:** $\Delta l = 0;\ \boxed{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_t} = 0.$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, в том числе **от нагрева**, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

4. *Физика*: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями и температурным воздействием**:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A};\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A};\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA};\Delta l_t = \alpha 3a \cdot \Delta t.$$

Подставляем **соотношения** упругости и **температурного** удлинения в **уравн. совместности**:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} + \alpha 3a\Delta t = 0. \Longrightarrow R_A + 3R_B = -6\alpha\Delta tEA. \Longrightarrow R_A = -3R_B - 6\alpha\Delta tEA$$

Подставим полученное соотношение в **уравнение равновесия:**

$$3R_B + 6\alpha\Delta tEA + F + R_B = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{R_B = -\frac{F + 6\alpha\Delta tEA}{4}; \quad R_A = 3\frac{F + 6\alpha\Delta tEA}{4} - 6\alpha\Delta tEA = 3\frac{F - 2\alpha\Delta tEA}{4}.}$$

Теперь, при **температурном воздействии**, в выражения **для реакций** входят абсолютные значения **модуля упругости *E*** и **площади *A***. Вычислим **величины реакций** для **конкретных данных: F = 10 кН, *A* = 1 см², Δ*t* = 10°C, *E* = 2·10⁵ МПа, *α* =10⁻⁵** (сталь):

$$R_B = -\frac{10 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = -5.5 \cdot 10^3 = -5.5\ \text{кН};$$

$$R_A = 3\frac{10 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = 4.5 \cdot 10^3 = 4.5\ \text{кН}.$$

При **отсутствии нагрева** реакции получаются равными –2.5 кН и 7.5 кН соответственно.

Эпюру продольных сил строим **вычислением значений по участкам:** $N_1 = R_A = 4.5$ **кН**, $N_2 = N_3 = R_B = -5.5$ **кН**. В сечении, в котором приложена **сосредоточенная сила**, получился **скачок, равный величине этой силы.**

Эпюра нормальных напряжений также строится вычислением значений **напряжений по участкам:** $\sigma_1 = N_1 / A_1 = 22.5$ **МПа**, $\sigma_2 = N_2 / A_2 = -27.5$ **МПа**, $\sigma_3 = N_3 / A_3 = -55$ **МПа.**

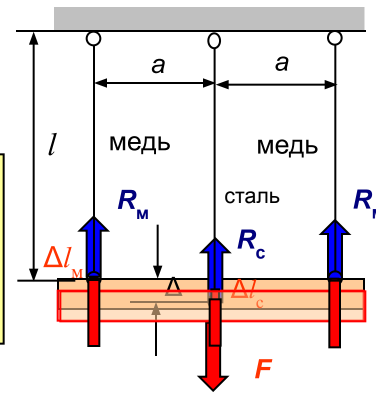
При **отсутствии нагрева** значения напряжений получаются равными 37.5 МПа, - 12.5 МПа, и -25 МПа соответственно (**вид эпюры напряжений см. в примере 1**).
Таким образом, **нагрев всего на 10°C привел** к **увеличению сжимающей силы** и максимальных **сжимающих напряжений** больше, **чем в 2 раза**.
Статически неопределимые системы всегда реагируют на изменение температуры изменением внутренних усилий.
Это же происходит при взаимных смещениях опор (неравномерная осадка опор).

Лекция 7 (продолжение – 7.9 доп. матер.)

- **Расчет статически неопределимых систем (СНС) на неточность сборки** – В **СНС несоответствие длин** изготовленных элементов **проектным** вызывает **дополнительные внутренние усилия**, которые могут заметно влиять на результат **определения усилий от действия внешних сил.** Более того, даже при отсутствии внешних сил, при сборке могут возникать **начальные (монтажные) усилия**. Общий порядок решения задачи сохраняется, но уравнения совместности деформаций (удлинений) содержат **дополнительные удлинения** (**укорочения**) необходимые для осуществления сборки неточно изготовленных элементов.

- **Пример 2.** Абсолютно жесткая балка подвешивается на двух **медных** и одном **стальном** ($E_м/E_с$=1/2) стержнях **одинаковой длины. Стальной стержень длиннее** на величину **Δ**. Определить **монтажные усилия** после сборки и **усилия при нагружении силой *F*.**

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:



2. *Статика*: Составляем **уравнение равновесия**: $\sum Z_i = 0;\ \boxed{2R_м + R_с = 0}$

Реакции от медных стержней равны из-за

3. *Геометрия*: Задаем промежуточное положение балки и составляем **уравнение совместности деформаций**: $\boxed{\Delta l_м + \Delta l_с = \Delta}$

4. *Физика*: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями**:

Знак минус присваивается, поскольку стальной стержень должен укоротиться и внутреннее усилие должно быть отрицательным (сжатие).

$$\Delta l_м = \frac{N_м l}{E_м A} = \frac{R_м l}{E_м A};\quad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = -\frac{R_с l}{E_с A}.$$

Подставляем **соотношения упругости** в **уравнения совместности:**

$$\frac{R_м l}{E_м A} + \left(-\frac{R_с l}{E_с A}\right) = \Delta. \Rightarrow R_м = \left(\Delta + \frac{R_с l}{E_с A}\right)\frac{E_м A}{l}. \Rightarrow \boxed{R_м = \Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{E_м}{E_с} = \Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{1}{2}}$$

Подстановка **соотношений упругости** в **уравнения совместности** приводит к ранее полученному выражению для $R_м=R_м(R_с)$.

Подставим полученное соотношение в **уравнение равновесия:**

$$2\left(\Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{1}{2}\right) + R_с = 0 \Rightarrow \boxed{R_с = \frac{-2\Delta\dfrac{E_м A}{l}}{2} = -\frac{\Delta}{l}AE_м.}$$

Из этого же уравнения равновесия следует:

$$\boxed{R_м = -\frac{R_с}{2} = \frac{\Delta}{2l}AE_м.}$$

В выражения для **реакций** входят **абс. знач**. **модуля упругости $E_м$** , **длины *l*** и **площади *A*** стержней.
Вычислим **величины реакций** для конкретных данных: ***l* = 2 м, *A* = 20 см², Δ = 0.5 мм, $E_м$ = 10⁵МПа:**

$$R_с = -\frac{0{,}5\cdot 10^{-3}}{2}20\cdot 10^{-4}2\cdot 10^{11} = -5\cdot 10^4 = -50\ кН;\quad R_м = -\frac{-50}{2} = 25\ кН.$$

При нагружении балки **силой *F* посередине балка получает дополнительное перемещение *б*:**

Подстановка в **уравнение равновесия** дает:

Уравнения равновесия, совместности деформаций и соотношения упругости принимают вид:

$$\sum Z_i = 0;\ \boxed{2R_м + R_с - F = 0.}\ \boxed{\Delta l_м - \Delta l_с = \Delta.}$$

$$\Delta l_м = \frac{N_м l}{E_м A} = \frac{R_м l}{E_м A};\quad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = \frac{R_с l}{E_с A}.$$

$$\boxed{R_с = \frac{F - 2\Delta\dfrac{E_м A}{l}}{2} = \frac{F}{2} - \Delta\frac{AE_м}{l}.}$$

Из выражения **$R_м=R_м(R_с)$:**

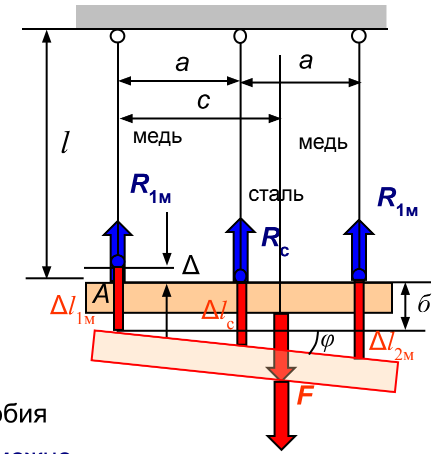
$$\boxed{R_м = \Delta\frac{E_м A}{l} + \left(\frac{F}{2} - \Delta\frac{AE_м}{l}\right)\frac{1}{2} = \frac{F}{4} + \Delta\frac{AE_м}{2l}.}$$

После подстановки значений силы **F=500кН** получаем **$R_с$ = 200 кН** и **$R_м$= 150 кН.**

Лекция 7 (продолжение – 7.10 доп. матер.)

- **Пример 3.** В предыдущем примере рассматриваемая система **была симметричной.** Если система **несимметричная по геометрии**, нагружению, материалам стержней, то **перемещение жесткой балки** при деформации будет **не поступательное**, **а плоское** (с поворотом вокруг некоторого центра). Рассмотрим решение такой задачи, подобной предыдущей, но со следующими данными: **Левый медный стержень изготовлен короче остальных на величину Δ,** сила *F* приложена на расстоянии ***c*** **>** ***a*** от левого стержня. **Найти усилия в стержнях.**

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:



2. ***Статика*** **:** Составляем **уравнение равновесия**:

$$\sum Z_i = 0; \quad R_{1м} + R_с + R_{2м} - F = 0.$$
$$\sum M_{Ai} = 0; \quad R_с a + R_{2м} 2a - Fc = 0.$$

3. ***Геометрия***: Задаем произвольное наклонное положение балки и составляем **уравнения совместности деформаций**:

$$\Delta l_{1м} = \Delta + \delta; \quad \Delta l_с = \delta + \varphi \cdot a; \quad \Delta l_{2м} = \delta + \varphi \cdot 2a.$$

4. ***Физика***: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями**:

$$\Delta l_{1м} = \frac{N_{1м} l}{E_м A} = \frac{R_{1м} l}{E_м A}; \qquad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = \frac{R_с l}{E_с A}. \qquad \boxed{\Delta l_{2м} = \frac{N_{2м} l}{E_м A} = \frac{R_{2м} l}{E_м A};}$$

Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (**8 уравнений и 8 неизвестных – 3 реакции** и **5 перемещений, два из которых поступательное перемещение балки, угловое перемещение - поворот**).
Последние неизвестные можно исключить, составляя одно, но более сложное, уравнение совместности из подобия треугольников в виде:

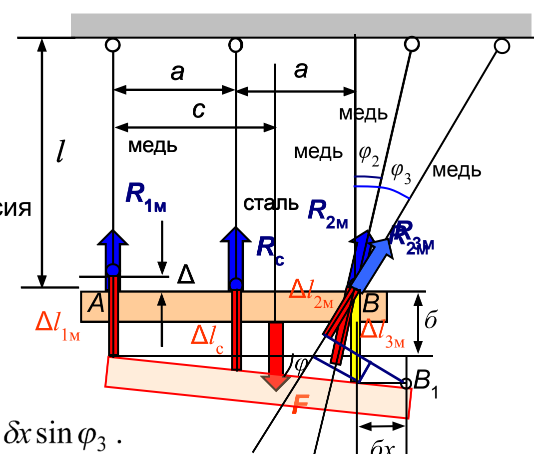
$$\frac{\Delta l_с - (\Delta l_{1м} - \Delta)}{\Delta l_{2м} - (\Delta l_{1м} - \Delta)} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку решать вручную 5 уравнений тоже достаточно сложно можно оставить первоначальную систему из 8 уравнений и решить ее численно, например, в системе **MathCAD**, в которой не требуются какие-либо подстановки и преобразования.

Если **направления одного** или **двух** ... ся
статически определимой (для плос...
уравнений равновесия) и несоответст...
начальных (монтажных) усилий (ба...

Удлинения наклонных стержней определяются отрезками, отсекаемые перпендикулярами, опущенными из **нового положения узла** (конца стержня) на **старое направление стержня**.

Пример 4. Пусть к такой системе добавлен еще **один “лишний” стержень**).
Система становится **статически неопределимой**, для которой можно составить **3** уравнения равновесия и 4 уравнения совместности деформаций (вместе с 4 соотношениями упругости получается система 11 уравнений):



$$\sum X_i = 0; \; R_{2м} \sin\varphi_2 + R_{3м} \sin\varphi_3 = 0.$$
$$\sum Z_i = 0; \quad R_{1м} + R_с + R_{2м} \cos\varphi_2 + R_{3м} \cos\varphi_3 - F = 0.$$
$$\sum M_{Ai} = 0; \quad R_с a + R_{2м} \cos\varphi_2 2a + R_{3м} \cos\varphi_3 2a - Fc = 0.$$

$$\Delta l_{1м} = \Delta + \delta; \;\; \Delta l_с = \delta + \varphi \cdot a; \;\; \Delta l_{2м} = (\delta + \varphi \cdot 2a)\cos\varphi_2 - \delta x \sin\varphi_2; \;\; \Delta l_{3м} = (\delta + \varphi \cdot 2a)\cos\varphi_3 - \delta x \sin\varphi_3 .$$

Теперь в соотношениях упругости длины 2-го и 3-го медных стержней: $l_2 = l / \cos\varphi_2; \;\; l_3 = l / \cos\varphi_3$

(Посмотреть решение этой задачи в системе задачи в системе MathCAD)

Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

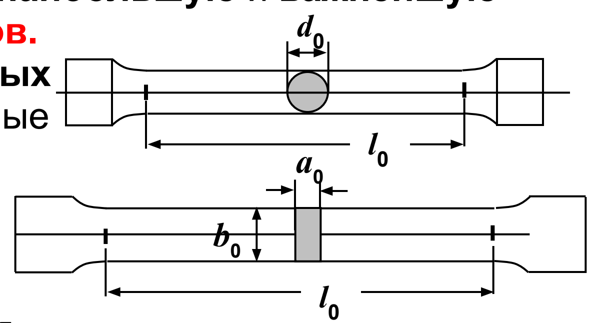
- ЛЕКЦИЯ 8

- Испытание материалов на растяжение-сжатие.
- Характеристики прочности и пластичности.
- Идеализированные диаграммы.
- Потенциальная энергия деформации (полная, удельная).

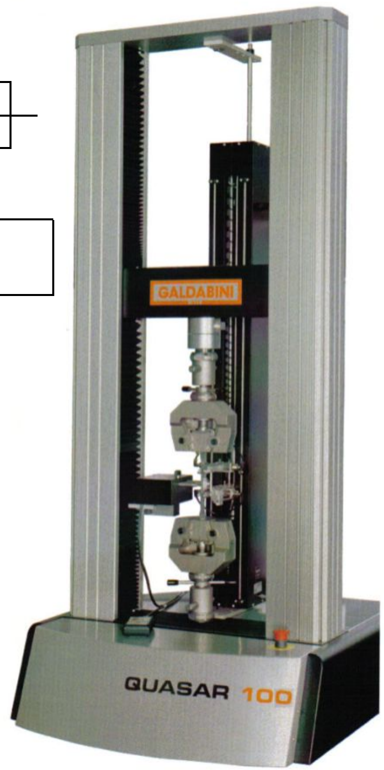
Лекция 8

3.6. Испытание материалов на растяжение – сжатие.

При **проектировании конструкций, машин и механизмов** необходимо знать **прочностные** и **деформационные** свойства материалов. Их **определяют экспериментально** на специальных **испытательных машинах**. **Из всех прочих свойств** (**твердость, сопротивляемость ударным нагрузкам, противодействие высоким** **или** **низким температурам** и т.п.) основными является **сопротивление на растяжение** и **сжатие,** дающие **наибольшую** и **важнейшую** **информацию о** **механических свойствах металлов.**



Испытание на растяжение – проводят на **разрывных** или **универсальных** машинах, имеющих специальные захваты для передачи усилия.



Для испытания на растяжение применяют **стандартные образцы специальной формы – цилиндрические или плоские.**

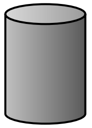
l_0 – **длина рабочей части** (на которой определяется удлинение), Различают образцы с отношением:

l_0/d_0 **= 5 – *короткие*,** l_0/d_0 **= 10 –** ***длинные*):**

Размеры образцов делает **стандартными,** для того, чтобы **результаты испытаний,** полученные в различных лабораторий, **были сравнимы.**

Испытание на **сжатиях** осуществляется при помощи тех же испытательных машин с применением специальных приспособлений.

При **испытаниях на сжатие** применяют цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру ***h*/*d* = 1,5 – 3.**



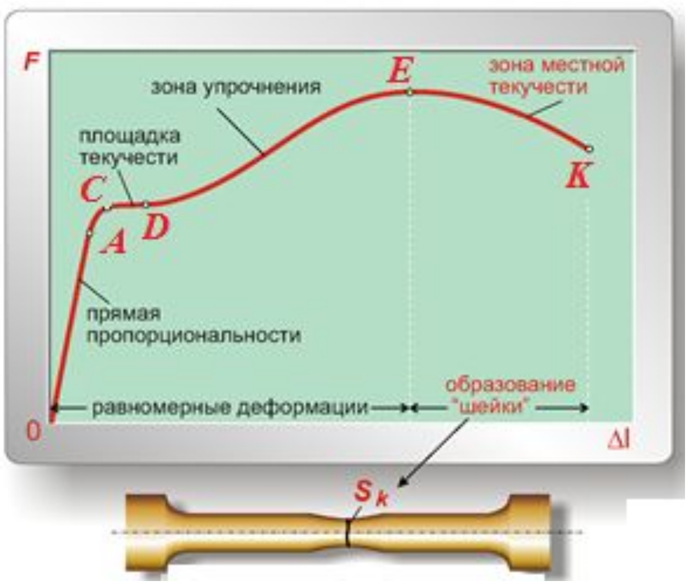
Образцы устанавливаются на опорную поверхность с использованием смазки для ослабления влияния сил трения.

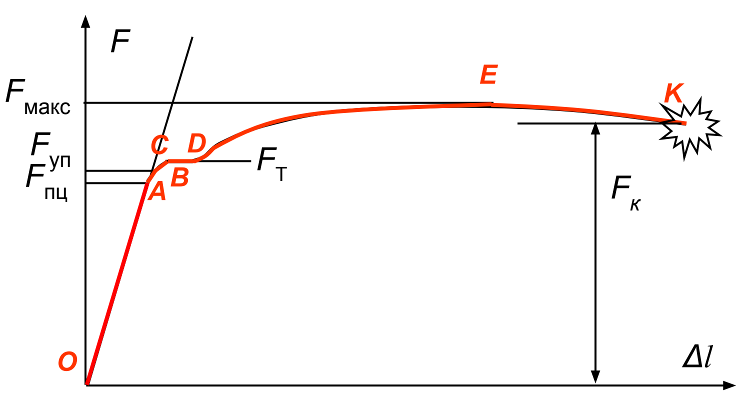
Все машины снабжены устройством для **автоматической записи** в определенном масштабе **диаграммы - графика** зависимости величины растягивающей силы от удлинения образца.

Современные машины **компьютеризированы** и имеют средства управления процессом нагружения по различным задаваемым программам, **вывода данных на экран** и сохранения их в файлах для последующей обработки:

3.7. Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов.

Характерной диаграммой пластичных материалов является **диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали (< 0,25% *C*)**:





1. В начальной стадии (***OA***, до $F_{пц}$) нагружения удлинение растет **прямо пропорционально** величине нагрузки (на этой стадии справедлив **закон Гука**):

2. Далее (***AB***, до $F_{уп}$) деформации начинают расти чуть быстрее и **не линейно**, но остаются **малыми** и **упругими** (исчезающими после снятия нагрузки).

3. При дальнейшем нагружении (***BC***, до $F_т$) **криволинейная часть** переходит в **горизонтальную площадку *CD***, на которой **деформации растут без увеличения нагрузки** (текучесть). Зона ***BCD*** – **зона общей текучести**.

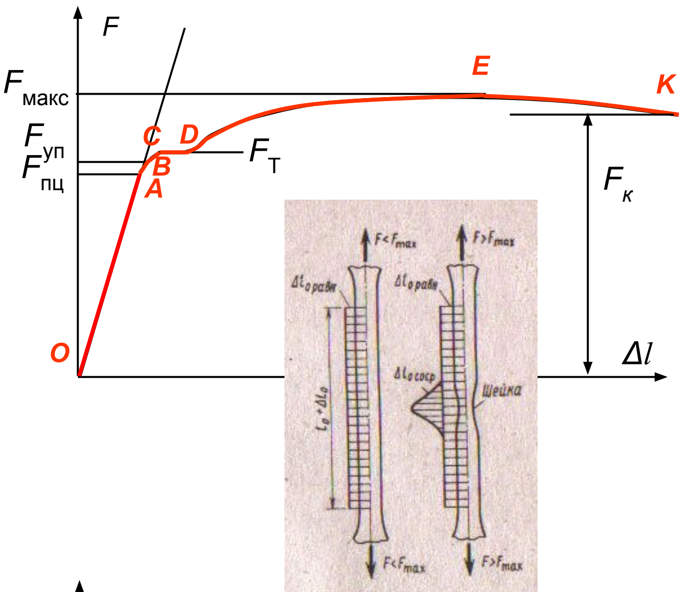
4. При дальнейшем нагружении (***DE***, до $F_{макс}$) **изменяется структура металла** и материал вновь может **воспринимать возрастание нагрузки** (***упрочнение***) вплоть до максимальной.

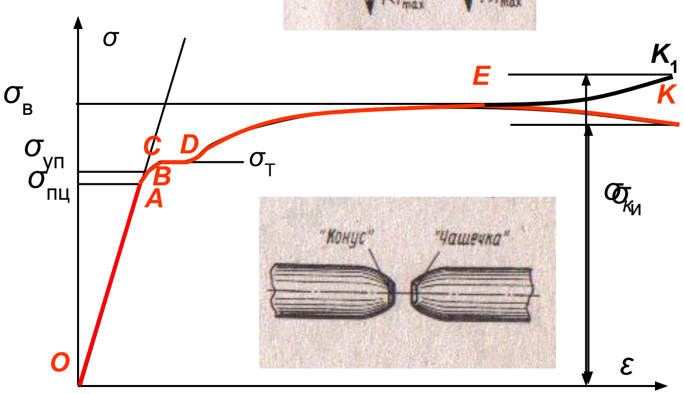
5. Далее (*EK*, до $F_к$) в наиболее слабом месте возникает и **развивается** локальное уменьшение поперечного сечения (***шейка*** S_k). Зона ***EK*** – **зона *местной* текучести**.

В точке *K* образец внезапно разрушается с резким **ударным звуком**, но **без световых эффектов**.

- **Характеристики прочности и пластичности.** Рассмотренная только что **диаграмма растяжения**, связывающая нагрузку с удлинением **не может характеризовать прочность** и **пластичность материала**, поскольку **нагрузка** зависит **от площади поперечного сечения образца**, а **удлинение – от базовой его длины**. Для получения **объективных механических характеристик** материала, **не зависящих от сечения** и **длины образца**, необходимо перейти к **напряжениям** (**σ**) и **относительным удлинениям** (**ε**). Для этого **нагрузка** делится на **начальную** или **текущую площадь поперечного сечения** образца, а по оси абсцисс откладывается соответствующее **относительное удлинение** для каждой их характерных точек.

В результате получается **диаграмма напряжений**, подобная диаграмме растяжения:





В этой диаграмме **характерные точки определяют следующие механические свойства материала:**

1. Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ – наибольшее напряжение, до которого существует пропорциональная зависимость между **нагрузкой** и **деформацией** (**зак. Гука;** для Ст3 **$\sigma_{пц}$ =195-200 МПа**).

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}.$$

2. Предел упругости $\sigma_{уп}$ – наибольшее напряжение, при котором в материале не обнаруживается признаков **пластической** (остаточной) **деформации** (для Ст3 **$\sigma_{уп}$ =205-210 МПа**).

$$\sigma_{уп} = \frac{F_{уп}}{A_0}.$$

3. Предел текучести $\sigma_{т}$ – наименьшее напряжение, при котором образец **деформируется без заметного увеличения растягивающей** нагрузки (для Ст3 **$\sigma_{т}$ =220-250 МПа**).

$$\sigma_{т} = \frac{F_{т}}{A_0}.$$

4. Предел прочности или **временное сопротивление $\sigma_{в}$** – напряжение, соответствующее **наибольшей нагрузке,** предшествующей разрушению образца (для Ст3 **$\sigma_{в}$ =370-470 МПа**).

$$\sigma_{в} = \frac{F_{макс}}{A_0}.$$

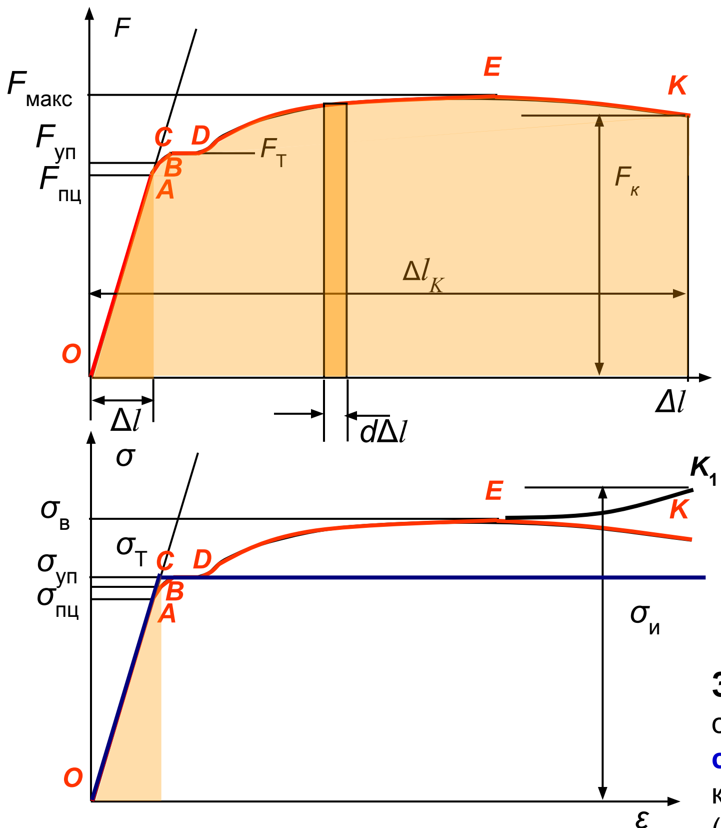
5. Истинный предел прочности или **истинное сопротивление разрыву $\sigma_{и}$** – напряжение, соответствующее **разрушающей силе F_K,** вычисленное для **площади поперечного сечения образца в месте разрыва A_1** или **S_k** (для Ст3 **$\sigma_{в}$=900-1000 МПа**). Поскольку на участке **EK** образуется **шейка** и площадь поперечного сечения быстро уменьшается, напряжение увеличивается (**EK_1**) при регистрируемом падении усилия.

$$\sigma_{и} = \frac{F_K}{A_1}.$$

Механизм разрушения: в области **шейки** образуются мелкие продольные **трещины,** которые затем сливаются в одну **центральную трещину**, перпендикулярную оси растяжения, далее трещина распространяется к поверхности шейки, разворачиваясь примерно на **45^0**, и при выходе на поверхность образует **коническую часть излома.** В результате получается поверхность излома в виде **«конуса»** и **«чашечки».** Стадия образования **конической поверхности** показывает, **что материал в вершине трещины** начинает **разрушаться по механизму скольжения** (по площадкам максимальных касательных напряжений), характерному для **хрупких материалов.**

Характеристики пластичности. **Пластичность** материала является важным **механическим свойством** материала при его **сопротивлении переменным динамическим нагрузкам**, а также технологическим свойством при его обработке (штамповка и др.).

К характеристикам пластичности относятся:



1. Относительное удлинение после разрыва *δ* (%) – отношение **приращения расчетной длины** образца после разрыва к ее **первоначальному значению** (для Ст3 ***δ*** **= 25-27 %**).

$$\delta = \frac{\Delta l_K}{l_0}100\% = \frac{l_K - l_0}{l_0}100\%.$$

2. Относительное сужение после разрыва ***ψ*** (%) – отношение **уменьшения площади** поперечного сечения образца в месте разрыва к **начальной площади** поперечного сечения (для Ст3 ***ψ*** **= 60-70 %**).

$$\psi = \frac{\Delta A_K}{A_0}100\% = \frac{A_K - A_0}{A_0}100\%.$$

Удельная потенциальная энергия (на ед. объема) **характеризует способность поглощения механической энергии при деформации** (вязкость) **материала** (V – объем стержня):

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N^2 l}{2EA} \cdot \frac{1}{Al} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma(E\varepsilon)}{E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

Таким образом, **удельная потенциальная энергия численно равна площади треугольника на диаграмме напряжений** (в пределах соблюдения закона Гука).

3.8. Потенциальная энергия деформации. Эта величина **характеризует** способность материала **совершить работу** при переходе его из **деформированного состояния в исходное.** При деформации **внешние силы** совершают **работу *W***, которая превращается в **потенциальную энергию внутренних упругих сил *U*** (например, при сжатии пружины). При снятии нагрузки **внутренние силы возвращают** материал в исходное (недеформированное) состояние.

Таким образом, для ***упругих*** **материалов** процесс полностью **обратим:** $\boxed{U = W.}$

При **статическом растяжении** образца силой ***F*** **элементарная работа** на малом перемещении равна: $dW = F d\Delta l.$

Полная работа равна:

$$W = \int_0^{\Delta l} F d\Delta l.$$ - площадь, ограниченная кривой растяжения

В пределах соблюдения **закона Гука потенциальная энергия деформации** равна:

$$U = W = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{1}{2}F\left(\frac{Fl}{EA}\right) = \frac{F^2 l}{2EA}.$$

В случае **переменной величины продольной силы** или **площади поперечного сечения** по длине стержня:

$$dU = \frac{F^2 dz}{2EA}. \Rightarrow \boxed{U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EA}.}$$

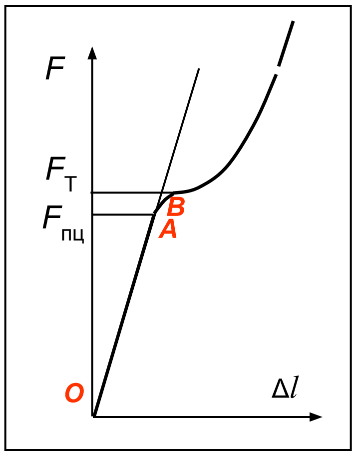
Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

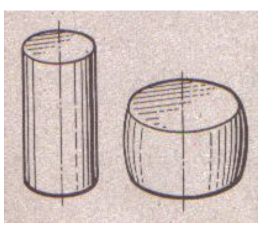
- **ЛЕКЦИЯ 9**

- **Диаграмма сжатия.**
- **Основные механические характеристики.**
- **Особенности разрушения пластических и хрупких материалов при растяжении-сжатии малоуглеродистой стали и чугуна.**
- **Понятие о ползучести и релаксации.**

- **3.9. Диаграммы сжатия различных материалов.**

При **сжатии поведение материала отличается от его поведения при растяжении**.





- **Диаграмма низкоуглеродистой стали**.

Начальный участок диаграммы является **прямолинейным** (до точки **А**) и **совпадает с аналогичным участком диаграммы растяжения**. Это свидетельствует о том, что **модуль упругости** у **стали** можно принимать **одинаковым** при **растяжении** и **сжатии.**

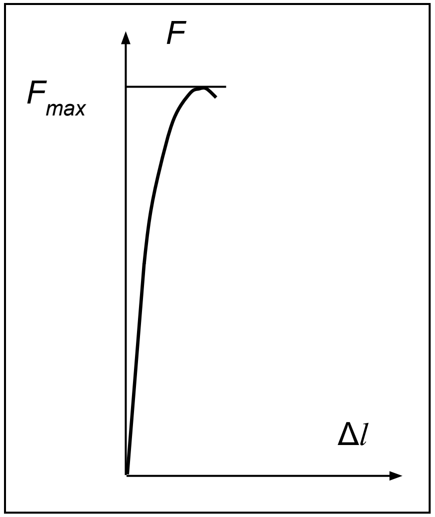
Нелинейный участок до **площадки текучести** также совпадает с подобным участком на **диаграмме растяжения**.

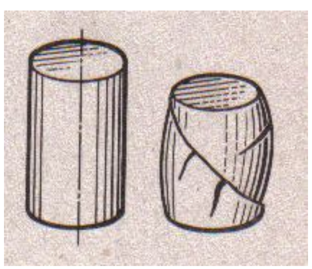
Значения **предела пропорциональности** и **предела текучести** при **растяжении** и **сжатии** **практически одинаковы.**

Площадка текучести при **сжатии** **выражена очень слабо** и после нее кривая уходит все более круто вверх **вследствие развития значительных пластических деформаци**й, приводящих к **увеличению площади поперечного сечения.**

Образец сплющивается принимая **бочкообразную форму**.

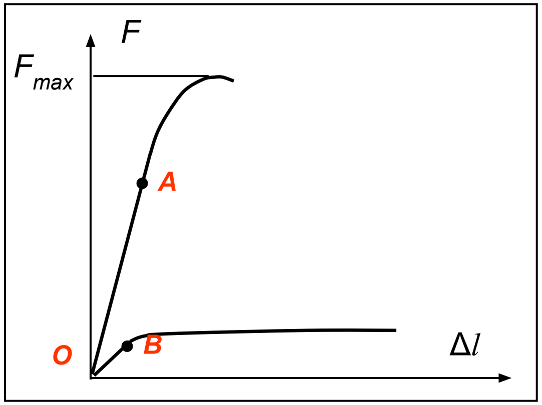
На этом испытания заканчивают, т.к. образец **разрушить не удастся**, **не удается определить и предел прочности**.

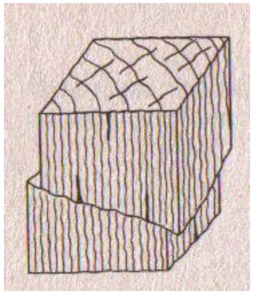




■ **Диаграмма чугуна.**

Начальный участок диаграммы имеет почти **линейную зависимость,** на этом участке форма и размеры образца меняются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке кривая становится более пологой и образец принимает слегка **бочкообразную форму**. При достижении нагрузкой наибольшего значения появляются **трещины под углом примерно 45^0** и наступает **разрушение по площадкам** с наибольшими касательными напряжениями (**хрупкое разрушение**). Другие хрупкие материалы (**ХМ**) (**камень, бетон**) имеют подобную диаграмму и такой характер разрушения. **ХМ сопротивляются сжатию значительно лучше**, чем **растяжению,** например, **предел прочности серого чугуна на сжатие 560-900 МПа**, а **на растяжение** – **120-190 МПа.**





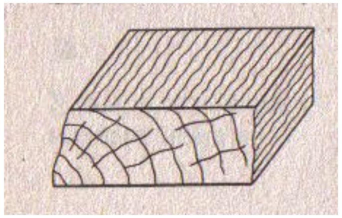
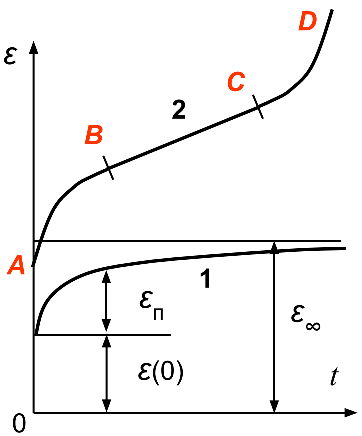


Диаграмма древесины.

Древесина – анизотропный материал.
Сопротивляемость при сжатии зависит от **расположения волокон** относительно направления **сжимающей силы.**
При **сжатии вдоль волокон** на участке ***ОА*** древесина работает почти **упруго**, деформации растут пропорционально увеличению сжимающей силы. Далее **деформации начинают расти более быстро, чем усилие**, вследствие возникновения **пластических деформаций** в отдельных волокнах. **Разрушение** происходит при максимальной нагрузке в результате **потери местной устойчивости ряда волокон,** сопровождаемой сдвигом с образованием **продольных трещин.**

При **сжатии поперек волокон** на участке ***ОВ*** древесина работает почти **упруго**, деформации растут пропорционально увеличению **сжимающей силы**. Далее **деформации начинают расти очень быстро при малом увеличении силы,** следствие уплотнения (спрессовывания) отдельных волокон. При наличии сучков и других пороков (трещин) образец может **разрушиться раскалыванием**.
Разрушающая нагрузка определяется условно при достижении деформации **сжатия,** при которой **высота образца уменьшается на треть исходной высоты .**

- **Понятия о ползучести и релаксации.** Многие строительные конструкции при эксплуатации деформируются при длительном действии постоянных нагрузок. Это обуславливается ***способностью материалов деформироваться во времени при действии постоянных нагрузок***, называемой **ползучестью**. Ползучесть присуща таким материалам, как **кирпич, древесина, полимеры, камень, резина, грунты** и т.п. Металлы также обнаруживают ползучесть при высоких температурах, а цветные металлы – и при обычной (комнатной) температуре. Ползучесть может возникать и при **малых нагрузках,** которые при **кратковременном действии** вызывают только **упругие деформации.**



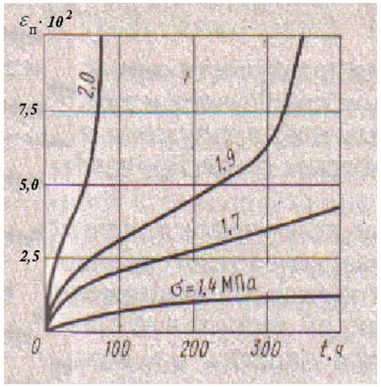
Результаты испытаний на **ползучесть** представляют графиками **изменения деформаций во времени.** В начальный момент времени деформации имеют **ненулевое значение *ε*(0), равное упругой деформации** или **сумме упругой и пластической деформаций.** Считается, что **время предварительной нагрузки** (или **разгрузки**) пренебрежимо **мало** по сравнению со **временем выдерживания нагрузки**, поэтому можно принять, что **деформации *ε*(0)** и **напряжение** появляются как бы **мгновенно.**

При определении **характера процесса ползучести** анализируется **скорость деформации**, вычисляемая как ***производная по времени.***

Если **скорость деформации** монотонно уменьшается со временем, то **деформация ползучести стремится к некоторому пределу (кривая 1).** Это характерно, например, при деформациях, связанных с уплотнением материала с течением времени под нагрузкой (осадка грунта под фундаментом, бетон).

Ползучесть, представленная **кривой 2**, характеризуется на **первом участке** (***AB***) **уменьшением скорости деформации,** соответствующей **обжатию локальных зон**, на **втором участке** (***BC***) **стабилизацией скорости деформации** (установившаяся ползучесть). Для **хрупких материалов** в **точке *C*** испытание заканчивается **хрупким разрушением**, для **пластичных материалов** – **вязким разрушением** с образованием **локальных пластических деформаций** (**третий участок *CD***, на котором **возрастает скорость деформации**).

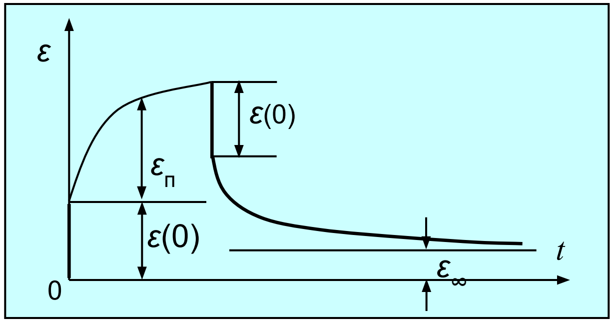
Интересно заметить, что **кривой типа 2** описывается **процесс накопления повреждений**, в том числе **износа**, в **механике разрушения**, **диагностике** и **материаловедении.**



Характер ползучести зависит от **действующих напряжений**. Например, **сталь** при различных уровнях напряжений может иметь **кривые ползучести как типа 1, так и типа 2**.

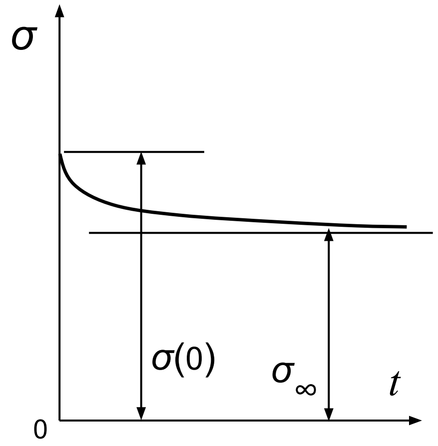
Если **деформации ползучести увеличиваются пропорционально увеличению напряжений** (**бетон, пластмасса** при малых напряжениях), то **ползучесть** – **линейная**, в противном случае (**металл** при высоких температурах) – **нелинейная.**

В некоторых материалах (**бетон, пластмассы, каучук**) происходят длительные, **медленно протекающие химические** или **окислительные процессы,** в результате которых материалы теряют свои первоначальные свойства, так называемое **«старение».** В таких материалах **деформации ползучести** конечно зависят от «возраста» материала.



При **снятии нагрузки упругая часть деформаций материала исчезает**, накопленная **деформация ползучести** начинает **уменьшаться, асимптотически** стремясь к некоторому пределу, подобно перевернутой **кривой 1.** Такое явление носит название **обратной ползучести**. Если при **неограниченном увеличении времени образец полностью восстанавливает свои первоначальные размеры**, то это явление называется **упругим последействием**.

- **Релаксация напряжений.** Если образец выдерживается в течении некоторого длительного времени в состоянии, при котором **деформация остается постоянной**, то **напряжения в материале**, имевшие в начальный момент значение **σ(0)**, ***снижаются* асимптотически** до некоторого значения. ***Явление медленного уменьшения напряжений в образце при постоянной деформации*** называется **релаксацией**.



Таким образом, явление ***релаксации*** в некоторой степени обратное ***ползучести***, но **природа этих двух явлений одна** – **энергия тепловых упругих колебаний атомов добавляется к энергии, обеспечивающейся внешними силами, вызывающими деформацию.**

При **свободной деформации** под действием приложенных сил происходит **дополнительное движение дислокаций** (***дислокации*** – дефекты кристаллической решетки) и **деформация прирастает**. Поскольку при **обыкновенной температуре эта энергия незначительна**, то **ползучесть** (прирост деформации) происходит в этом случае **медленно**.

При **постоянной деформации** поступление **дополнительной энергии тепловых колебаний атомов приводит к перераспределению дислокаций с частичным восстановлением регулярности кристаллической решетки.** При этом **энергия деформации уменьшается**, что приводит к **уменьшению напряжений**, если деформация остается постоянной.

Глава III. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

- **ЛЕКЦИЯ 10**

- Основные сведения о расчете конструкций.
- Методы предельных состояний и допускаемых напряжений.
- Определение предельных нагрузок в статически неопределимых системах из идеального упруго-пластического материала.
- Метод разрушающих нагрузок.

- **3.10. Основные сведения о расчете конструкций.**

Основной задачей расчета конструкции является **обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации**.

Прочность конструкции, выполненной из **хрупких материалов**, считается **обеспеченной**, если **во всех поперечных сечениях фактические напряжения меньше предела прочности** материала.

Величины нагрузки, **напряжения в конструкции** и **механические характеристики материала** не могут быть **установлены точно** из-за следующие **факторов:**

1. случайный характер нагружения;

2. приближенность расчета;

3. погрешность испытаний;

4. разброс механических свойств реальных материалов и т.д.

Существуют 3 метода расчета конструкций:

1. Метод предельных состояний;

2. Методы допускаемых напряжений;

3. Метод разрушающих нагрузок.

university Тюменский индустриальный университет

- **Метод предельных состояний.**

Этот метод был разработан учеными под руководством проф. **Н.С. Стрелецкого с 1955 г.** По методу **предельных состояний** в настоящее время рассчитывают все **конструкции промышленных и гражданских зданий и сооружений, мостов** и др.

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям.

Различают **две группы предельных состояний:**
Первая – непригодность к эксплуатации по причинам потери несущей способности;
Вторая – непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими или бытовыми условиями.
В правильно запроектированном сооружении не должно возникнуть ни одного из указанных предельных состояний, т.е. должна быть обеспечена его надежность.

Надежностью называется **способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании** (например, **нарушения надежности объекта** – авария на **Чернобыльской АЭС** с многочисленными последствиями).

Факторы, от точного учета которых зависит уровень надежности сооружения или отдельного его элемента, следующие:
1. Нагрузки и другие воздействия;
2. Механические свойства материала;
3. Геометрические параметры конструктивных элементов;
4. Условия работы;
5. Степень ответственности сооружения и др.

Лекция 10 (продолжение – 10.3)

- **Методы допускаемых напряжений.**

Для обеспечения прочности в условиях эксплуатации необходимо, чтобы **наибольшие (max) расчетные напряжения не превышали некоторой величины, меньшей предела прочности.**

Эта величина называется **допускаемым напряжением** и устанавливается делением **предела прочности на коэффициент, больший единицы**, называемый **коэффициентом запаса прочности.**

В соответствии с этим **условие прочности**:

$$\sigma^{max}_{раст} \le [\sigma_{раст}]; \quad \sigma^{max}_{сж} \le [\sigma_{сж}],$$

$\sigma^{max}_{раст}$, $\sigma^{max}_{сж}$ – **наибольшее рабочее (расчетное) напряжение** (определяется теоретическо);

$[\sigma_{раст}], [\sigma_{сж}]$ – **допускаемое (придельное) напряжение материала** (определяется экспериментально).

Допускаемые напряжения связаны с **пределами прочности** на **растяжение** и **сжатие** отношениями:

$$[\sigma_{раст}] = \frac{\sigma^{раст}_{В}}{n_В}; \quad [\sigma_{сж}] = \frac{\sigma^{сж}_{В}}{n_В},$$

где $n_В$ – **нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности.** Значение $n_В$ зависит от **ряд факторов**. Например: от **класса конструкции** (капитальная, временная и т.п.), **от срока службы**, **от характера нагрузки** (статическая, динамическая и т.п.), **от условий работы конструкции**, **от качества изготовления материалов** и других факторов. **($n_В$ = 2,5 – 5)**.

Для конструкций из **пластических материалов**, имеющих одинаковые пределы прочности на **растяжение** и **сжатие**, **условие прочности:**

$$\sigma^{max} \le [\sigma],$$

Допускаемые напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где n_T – **нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести** **(n_T = 1,5 – 2,5)**.

Условие прочности по методу допускаемых напряжений при проверке напряжений при **растяжении-сжатии** стержней имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le [\sigma],$$

При подборе сечения принимаемые сечения должны удовлетворять неравенству, вытекающему из **условия прочности:**

$$A \ge \frac{N_{max}}{[\sigma]}.$$

При определении грузоподъемности вычисляется **допускаемая продольная сила** в наиболее нагруженном стержне:

$$[N] \ge A[\sigma].$$

По полученной **допускаемой силе** определяется далее величина **допускаемой нагрузки [F].** **Условие прочности** принимает вид:

$$F \le [F].$$

- **Определение предельных нагрузок в статически неопределимых системах из идеального упругопластического материала.**

Если **материал** работает в **упругой стадии** до **предела текучести**, а затем материал обладает **безграничной площадкой текучести**, то **материал** работающий по такой модели, называется **идеально упругопластическим.**

Ранее был рассмотрен **расчет статически неопределимых стержневых систем** при их работе в **упругой стадии**. **Целью расчета** было **определение усилий, возникающих в стержнях**, знание которых позволяет **подобрать сечения.** Поскольку в **упругом расчете** соотношение **жесткостей** (и, значит, **площадей**) задается предварительно, то всегда оказывается, что в некоторых стержнях, или участках стержней переменного сечения, **напряжения** будут **меньше допускаемых**, чем в стержне (или на участке) , в котором **напряжения максимальны** и которые были использованы при составлении **условия прочности** и **определения требуемой площади поперечного сечения.**

Все это составляет существо **метода расчета по допускаемым напряжениям. Статически неопределимые системы** имеют **«лишние» связи** и **выход одной из них из строя при увеличении нагрузки не означает, что система больше не может оставаться в равновесии.**

Т.о, **предельным состоянием для статически неопределимых систем не является возникновение напряжений больше расчетных (допускаемых) в самом нагруженном стержне** (или на участке ступенчатого стержня).

university
Тюменский индустриальный университет

- **Метод разрушающих нагрузок.**

При достижении **в одном из стержней напряжений больше расчетных (предела текучести)** несущая способность статически системы не исчерпывается, то **следует принять** за **опасное состояние такое, при котором во всех стержнях, обеспечивающих неизменяемость системы** (равновесие при отсутствии каких-либо перемещений) **возникают напряжения, равные пределу текучести**. Для такого состояния **система перестает быть статически неопределимой**, т.к. теперь известны **усилия в этих стержнях**. **Они равны произведению поперечной площади сечения на напряжение, равное пределу текучести.**

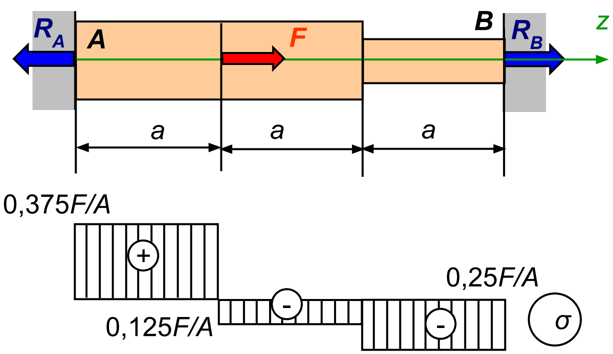
Все это справедливо при использовании **идеализированной диаграммы рас1тяжения-сжатия** (**диаграммы Прандтля**), которая **не учитывает упрочнение материала после прохождения площадки текучести.**
Т.о., **предельная нагрузка может быть определена из условий равновесия**.
Такая нагрузка не может быть допущена во избежание **разрушения системы**.
Поэтому ее **величина делится** на **коэффициент запаса прочности *n*,** подобно тому, как **предельное напряжения** при **упругом расчете делилось на это коэффициент по отношению к пределу прочности** или **пределу текучести.**

Условие прочности по методу разрушающих нагрузок при **растяжении-сжатии** стержней **статически неопределимой системы** имеет вид: $\boxed{F_{max} \le [F]},$ где

$$\boxed{[F] = \frac{F_{пред}}{n}.}$$

В случае **действия нескольких сил** предполагается, что **силы одновременно увеличиваются пропорционально некоторому параметру.** Тогда отыскивается **предельное значение этого параметра**, характеризующее **предельную нагрузку.**

■ **<u>Пример</u>.** Стержень **ступенчатого сечения** находится под действием силы ***F***. Эта **статически неопределимая задача** была рассмотрена и решена**.** Полученное **упругое решение**: σ^{max} **= 0.375F/A.** Определить **грузоподъемность по методу допускаемых напряжений** и **методу разрушающих нагрузок.**



Условие прочности по **<u>допускаемым напряжениям</u>**:

$$\sigma_{\max} = \frac{0{,}375F}{A} \le [\sigma] = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{n}. \Longrightarrow \boxed{F \le \frac{\sigma_{\mathrm{T}} A}{0{,}375n}.}$$

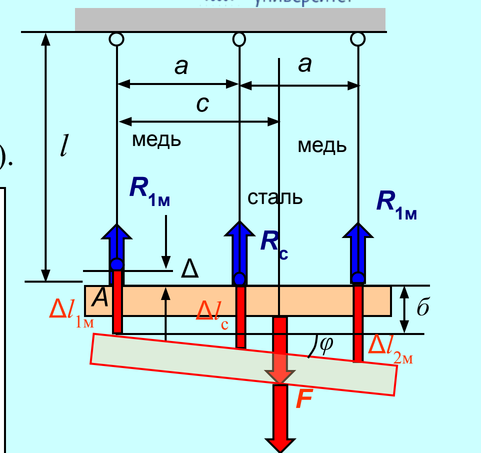
Здесь при $F_{пред} = Fn$ возникает **текучесть на первом участке,** но система может еще **воспринимать нагрузку,** т.к. на **других участках напряжения меньше** σ_T**.**

Условие прочности по **<u>разрушающим нагрузкам:</u>**

$$F_{\max} \le [F] = \frac{F_{пред}}{n}. \quad \sigma_{\mathrm{T}} = \frac{0{,}25F_{пред}}{A}. \Longrightarrow \boxed{F \le [F] = \frac{\sigma_{\mathrm{T}} A}{0{,}25n}.}$$

Теперь при $F_{пред} = [F]n$ возникает **текучесть** еще на **третьем участке** и система уже не может воспринимать нагрузку (второй участок будет перемещаться вследствие текучести на первом и третьем участках).
Грузоподъемность, определенная по **методу <u>разрушающих нагрузок</u>**, больше, чем определенная по **методу <u>допускаемых напряжений</u>**, на **(0,375-0,25)/0,25)100%=50%**, т.е. в **1,5 раза.**

Примеры документов MathCAD



- **Пример 3.** При использовании уравнения совместности в виде $\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)}{\Delta l_{2м} - (\Delta l_{1м} - \Delta)} = \frac{1}{2}$ система уравнений не решается, т. к., блок Given…..Find реализует итерационный процесс решения и неизвестные не должны находиться в знаменателе выражений. Проблему решает небольшое преобразование уравнения к виду: $2(\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)) = \Delta l_{2м} - (\Delta l_{1м} - \Delta)$.

Во второй строке задаются начальные значения неизвестных значения неизвестных произвольным образом, например, равными 1.

$$\Delta := 5\cdot 10^{-4} \quad F := 500\cdot 10^{3} \quad A := 20\cdot 10^{-4} \quad Es := 2\cdot 10^{11} \quad Em := 10^{11} \quad l := 2 \quad a := 1 \quad c := 1.5\cdot a$$

$$Rm1 := 1 \quad Rs := 1 \quad Rm2 := 1 \quad \Delta lm1 := 1 \quad \Delta lm2 := 1$$

$$\text{Given} \quad Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0 \qquad -F\cdot c + Rs\cdot a + Rm2\cdot(2\cdot a) = 0$$

$$2\cdot(\Delta ls - (\Delta lm1 - \Delta)) = (\Delta lm2 - (\Delta lm1 - \Delta))$$

$$\Delta lm1 = \frac{Rm1\cdot l}{Em\cdot A} \qquad \Delta ls = \frac{Rs\cdot l}{Es\cdot A} \qquad \Delta lm2 = \frac{Rm2\cdot l}{Em\cdot A}$$

$$\text{Find}(Rm1, Rs, Rm2, \Delta lm1, \Delta ls, \Delta lm2) = \begin{bmatrix} 1.25\cdot 10^{4} \\ 2.25\cdot 10^{5} \\ 2.625\cdot 10^{5} \\ 1.25\cdot 10^{-4} \\ 0.001125 \\ 0.002625 \end{bmatrix}$$

При использовании первого варианта составления уравнений совместности никаких преобразований не требуется. Результат получается тот же:

$$Rm1 := 1 \quad Rs := 1 \quad Rm2 := 1 \quad \Delta lm1 := 1 \quad \Delta lm2 := 1 \quad \delta := 1 \quad \phi := 1$$

$$\text{Given} \quad Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0 \qquad -F\cdot c + Rs\cdot a + Rm2\cdot(2\cdot a) = 0$$

Документ позволяет легко получать решение при любых разумных исходных данных. Например, при отсутствии силы *F* (монтажные усилия) или при ее симметричном действии:

$$F := 0\cdot 10^{3} \quad Rm1 := 1 \quad Rs := 1 \quad Rm2 := 1 \quad \Delta lm1 := 1 \quad \Delta lm2 := 1 \quad \delta := 1 \quad \phi := 1$$

$$\text{Given} \quad Rm1 + Rm2 + Rs - F = 0 \qquad -F\cdot c + Rs\cdot a + Rm2\cdot(2\cdot a) = 0$$

$$\Delta lm1 = \delta + \Delta \qquad \Delta ls = \delta + \phi\cdot a \qquad \Delta lm2 = \delta + \phi\cdot 2\cdot a$$

$$\Delta lm1 = \frac{Rm1\cdot l}{Em\cdot A}$$

$$\Delta ls = \frac{Rs\cdot l}{Es\cdot A}$$

$$\Delta lm2 = \frac{Rm2\cdot l}{Em\cdot A} \qquad \text{Find}(Rm1, Rs, Rm2, \Delta lm1, \Delta ls, \Delta lm2, \delta, \phi) = \begin{bmatrix} 1.25\cdot 10^{4} \\ -2.5\cdot 10^{4} \\ 1.25\cdot 10^{4} \\ 1.25\cdot 10^{-4} \\ -1.25\cdot 10^{-4} \\ 1.25\cdot 10^{-4} \\ -3.75\cdot 10^{-4} \\ 2.5\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Интересно отметить, что в силу симметрии схемы по расположению и материалу стержней монтажные усилия (и деформации стержней) получаются симметричными, однако положение балки после сборки не будет горизонтальным (повернутым на угол φ по часовой стрелке) в силу несимметричного расположения начального зазора Δ. Такое же будет и при симметричном действии нагрузки (*c* = *a*).

Вернуться…

Примеры документов MathCAD

- **Пример 4.** При использовании уравнения совместности в виде в предложенном виде система уравнений состоит из 11 уравнений. Дополнительными неизвестными являются поступательное перемещение (горизонтальное и вертикальное смещение) балки и ее поворот вокруг полюса A.
-

Исходные данные: ORIGIN := 1

$\Delta := 5\cdot10^{-4}$ $F := 500\cdot10^{3}$ $A := 20\cdot10^{-4}$ $Es := 2\cdot10^{11}$ $Em := 10^{11}$ $l := 2$

$a := 1$ $c := a\cdot1.5$ $\phi2 := 30\cdot\dfrac{\pi}{180}$ $\phi3 := 45\cdot\dfrac{\pi}{180}$ $l2 := \dfrac{l}{\cos(\phi2)}$ $l3 := \dfrac{l}{\cos(\phi3)}$

Задание начальных значений:

$\delta := 0$ $\delta x := 0$ $\phi := 0$ $Rm1 := 1$ $Rs := 1$ $Rm2 := 1$ $Rm3 := 1$

$\Delta lm1 := 1$ $\Delta ls := 1$ $\Delta lm2 := 1$ $\Delta lm3 := 1$

Given

Уравнения равновесия:

$Rm2\cdot\sin(\phi2) + Rm3\cdot\sin(\phi3) = 0$ $Rm1 + Rs + Rm2\cdot\cos(\phi2) + Rm3\cdot\cos(\phi3) - F = 0$

$Rs\cdot a + Rm2\cdot\cos(\phi2)\cdot2\cdot a + Rm3\cdot\cos(\phi3)\cdot2\cdot a - F\cdot c = 0$

Уравнения совместности деформаций:

$\Delta lm1 = \delta + \Delta$ $\Delta lm2 = (\delta + \phi\cdot2\cdot a)\cdot\cos(\phi2) - \delta x\cdot\sin(\phi2)$

$\Delta ls = \delta + \phi\cdot a$ $\Delta lm3 = (\delta + \phi\cdot2\cdot a)\cdot\cos(\phi3) - \delta x\cdot\sin(\phi3)$

Соотношения упругости:

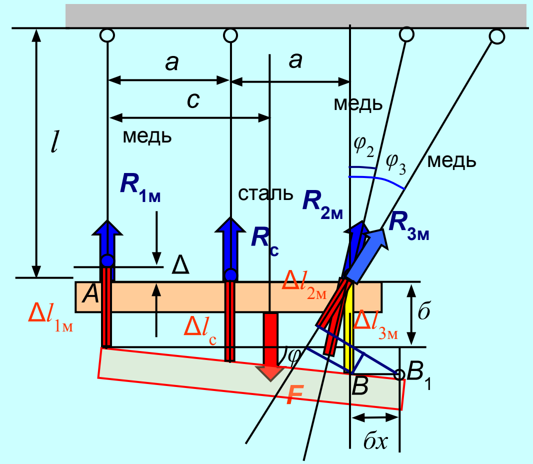
$\Delta lm1 = \dfrac{Rm1\cdot l}{Em\cdot A}$ $\Delta lm2 = \dfrac{Rm2\cdot l2}{Em\cdot A}$

$\Delta ls = \dfrac{Rs\cdot l}{Es\cdot A}$ $\Delta lm3 = \dfrac{Rm3\cdot l3}{Em\cdot A}$

$Find(Rm1, Rs, Rm2, Rm3, \Delta lm1, \Delta ls, \Delta lm2, \Delta lm3, \delta, \delta x, \phi) =$

	1
1	$-1.879\cdot10^{5}$
2	$6.257\cdot10^{5}$
3	$1.698\cdot10^{5}$
4	$-1.2\cdot10^{5}$
5	-0.002
6	0.003
7	0.002
8	-0.002
9	-0.002
10	0.011
11	0.006

Документ позволяет легко получать решение при любых разумных исходных данных. Например, при отсутствии силы *F* (монтажные усилия) или при другом расположении стержней и силы. Достаточно скорректировать исходные данные и уравнения. Дерзай, студент!



При использовании этого варианта составления уравнений совместности никаких дополнительных преобразований не требуется.
Конечно при ручном счете можно исключить перемещения балки как жесткого тела, например, составить из подобия треугольников соотношения:

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)}{(\Delta l_{2м} + \delta x \sin\varphi_2) - (\Delta l_{1м} - \Delta)} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)}{(\Delta l_{3м} + \delta x \sin\varphi_3) - (\Delta l_{1м} - \Delta)} = \frac{1}{2}$$

или

$$2(\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)) = (\Delta l_{2м} + \delta x \sin\varphi_2) - (\Delta l_{1м} - \Delta),$$

$$2(\Delta l_c - (\Delta l_{1м} - \Delta)) = (\Delta l_{3м} + \delta x \sin\varphi_3) - (\Delta l_{1м} - \Delta)$$

и далее исключить *бx*. Получатся достаточно сложные выражения. А зачем? Для MathCAD не имеет никакого значения число уравнений (11 или 8, или того меньше).

Вернуться…