Раздел 4. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

Тема 4.1. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

План

1. **Основные понятия и определения дифференциального уравнения.**
2. **Методы решения некоторых дифференциальных уравнений.**
3. **Применение дифференциальных уравнений первого порядка для решения задач.**

Основные понятия и определения дифференциального уравнения

- **<u>Опр.</u>** Равенство, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y = f(x), а так же её производные y’,y”,….. y^n, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***.

F(x,y.y’,y”………) = 0, где F – известная функция, заданная в некоторой фиксированной области; x – независимая переменная; y – зависимая переменная; y’,y”,….. y^n – её производные.

- **<u>Опр.</u>** Решением дифференциального уравнения называется функция y = f(x), которая будучи представлена в уравнении F(x,y.y’,y”………) = 0, обращает его в тождество. График этой функции называется интегральной кривой.

Пример 1.1. Дифференциальное уравнение $y' = 3x^2;\ \frac{dy}{dx} = 3x^2.$

- Представим в виде: $dy = 3x^2dx$; возьмём интеграл от левой и правой части уравнения: $\int dy = \int 3x^2dx.$ Получим $y = \frac{3x^3}{3} + c, y = x^3 + c$ – общее решение дифференциального уравнения, которое включает произвольную постоянную с.

Методы решения некоторых дифференциальных уравнений

- Выбор метода решения дифференциального уравнения зависит от его вида.

1. ***Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.***

- Уравнения вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется ***уравнением с разделяющимися переменными***, если функция $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной: $f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$.

- После резделения переменных, когда каждый член будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0.$$

- Решением этого уравнения будет: $F(x) + \varphi(y) = c$.

Пример 2.1. Найти решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2).$$

- Разделим уравнение на множители, зависящие только от одной переменной:

$$\frac{dy}{1+y^2} = xdx.$$

- Проинтегрируем левую и правую части:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int xdx, \text{ получим } \quad arctg\, y = \frac{x^2}{2} + c.$$

- Общее решение: $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

- **<u>Опр.</u>** Уравнения вида: $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции, называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.
- При $q(x) = 0$ уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ – называется ***линейным однородным уравнением***. $y' + p(x)y = 0$. Общее решение: $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.
  - При $q(x) \neq 0$ уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ – называется ***линейным неоднородным уравнением***. Общее решение: $y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$.

Применение дифференциальных уравнений первого порядка для решения задач

- Этапы решения задач с помощью дифференциальных уравнений:

1. Оформить условия, в которых протекают изучаемые процессы;
2. Выбрать зависимые и независимые переменные;
3. Определить функциональные зависимости между ними
4. Решение уравнения;
5. Анализ полученных решений.

- В уравнениях, описывающих медико-биологические процессы, в качестве независимой переменной чаще всего используется временная компонента.

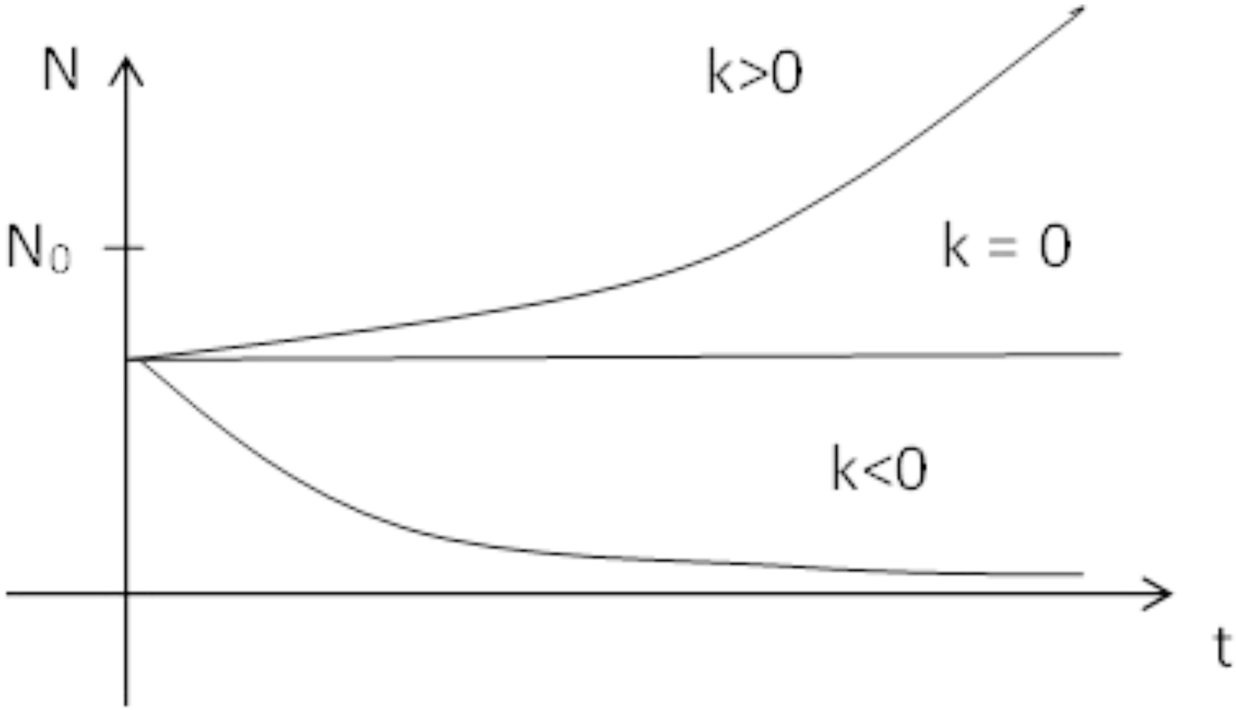
Размножение бактерий

- Если бактерии обитают в благоприятной среде, то скорость размножения бактерий пропорциональна размеру популяции. Такое предположение описывается дифференциальным уравнением: $\frac{dx}{dt} = kx,$ где x – количество бактерий; k – коэффициент пропорциональности. Тогда, разделяя переменные и интегрируя левую и правую части уравнения $\frac{dx}{dt} = kx,$ получим: $\int_{N_0}^{N} \frac{dx}{x} = k\int_0^t dt,$ где N_0 – начальное количество бактерий; N - количество бактерий в момент времени t.

- Вычислим определённые интегралы:

$$\ln|x|\Big|_{N_0}^{N} = kt\Big|_0^t ; \ln\frac{N}{N_0} = kt ; N = N_0e^{kt} .$$

- Получим экспоненциальную кривую, которая зависит от времени и k. Если $k > 0$, то количество бактерий будет возрастать по экспоненциальному закону, при $k < 0$ – убывать, а при $k = 0$ - оставаться на постоянном уровне.



Для определения значения k необходимо иметь дополнительные сведения об изменении численности бактерий за определённый промежуток времени.

Внутривенное введение глюкозы

- При внутривенном введении с помощью капельницы скорость поступления глюкозы в кровь постоянна и равна c. В крови глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид: $\frac{dx}{dt} = c - \alpha x$, где x – количество глюкозы в крови в текущий момент времени; c – скорость поступления глюкозы в кровь; α - положительная постоянная. Запишем это уравнение в виде: $x' + \alpha x = c$.

- Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и его общее решение находиться по формуле:
$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$
- $x(t) = e^{-\int \alpha dt}\left(k + \int c e^{\int \alpha dt}dt\right) = e^{-\alpha t}\left(k + c\int e^{\alpha t}dt\right) = e^{-\alpha t}\left(k + \frac{c}{\alpha}\cdot e^{\alpha t}\right) = ke^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}$, где k- постоянная интегрирования. Чтобы найти постоянную k, необходимо знать начальное значение глюкозы в крови x (0).

- Тогда $x(0) = k + \frac{c}{\alpha}; k = x(0) - \frac{c}{\alpha}$.
- Частное решение уравнения $\frac{dx}{dt} = c - \alpha x$ имеет вид: $x(t) = \frac{c}{\alpha} + \left[x(0) - \frac{c}{\alpha}\right]e^{-\alpha t}$.
- При увеличении времени уровень глюкозы в крови приближается к $\frac{c}{\alpha}$.