

## 21.8. ЛИНЕЙНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим случай, когда в уравнении

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x)$$

функции  $p(x)$  и  $g(x)$  – постоянные величины.



*Уравнение вида*

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)$$

*называется линейным ДУ с  
постоянными коэффициентами*



Где  $y$  – искомая функция,  $p$ ,  $g$  – постоянные величины.

*Если  $f(x)=0$ , то уравнение называется линейным однородным.*

*Если  $f(x)$  не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.*



**Рассмотрим сначала однородное уравнение:**

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0$$

**10**

**Будем искать решение этого уравнения в виде**

$$y = e^{kx}$$

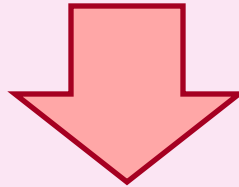
**Где  $k$  - некоторое число.**

**Находим производные и подставляем в исходное уравнение:**



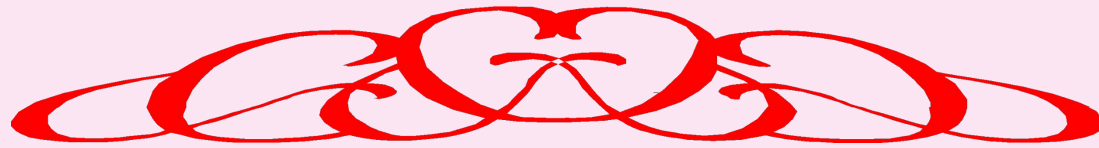
$$y' = k \cdot e^{kx} \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + g \cdot e^{kx} = 0$$



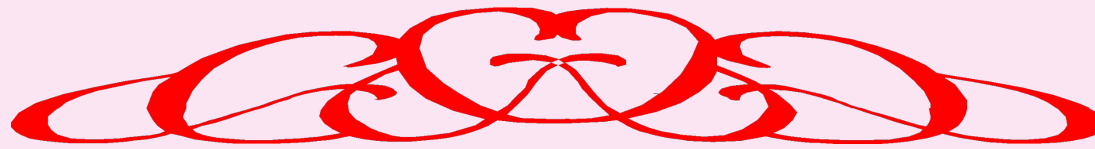
$$k^2 + p \cdot k + g = 0$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для уравнения (10).



**Вид решения линейного однородного ДУ (10) существенно зависит от того, какие корни имеет его характеристическое уравнение.**

**Обозначим эти корни как  $k_1$  и  $k_2$ .**



# ТЕОРЕМА.

*Если корни характеристического уравнения вещественные и разные*

$$k_1 \neq k_2$$

*то общее решение однородного уравнения (9) имеет вид:*

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$



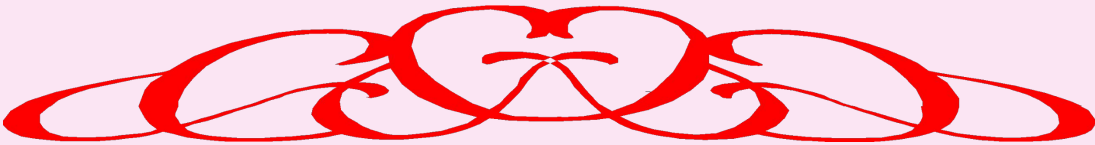
*Если корни характеристического уравнения вещественные и равные*

$$k_1 = k_2 = k$$

*то общее решение однородного уравнения (10) имеет вид:*

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$$





*Если характеристическое уравнение не имеет вещественных корней, то общее решение однородного уравнения (10) имеет вид:*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

*где*

$$k_1 = \alpha + i \cdot \beta$$

$$k_2 = \alpha - i \cdot \beta$$

*-комплексные корни  
характеристического уравнения.*



# ПРИМЕРЫ.

1

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$



# Решение:

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 1$$

Корни вещественные и разные, поэтому общее решение будет иметь вид:

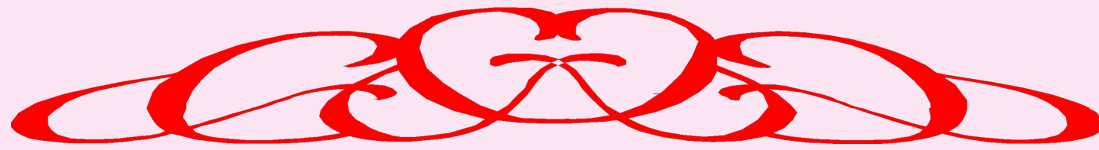
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$



2

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$



# Решение:

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 = k$$

**Корни вещественные и одинаковые, поэтому общее решение будет иметь вид:**

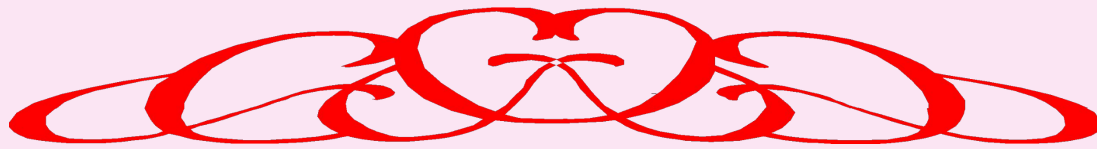
$$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$$



3

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$



# Решение:

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 - 2k + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$$k_1 = 1 + i$$

$$k_2 = 1 - i$$

Корни комплексные, поэтому общее решение будет иметь вид:

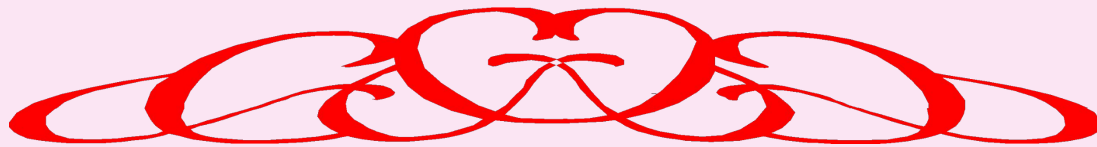
$$y = C_1 e^x \cdot \cos x + C_2 e^x \cdot \sin x$$



Теперь рассмотрим решение неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами (9).

*Общее решение неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами находится как сумма общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.*

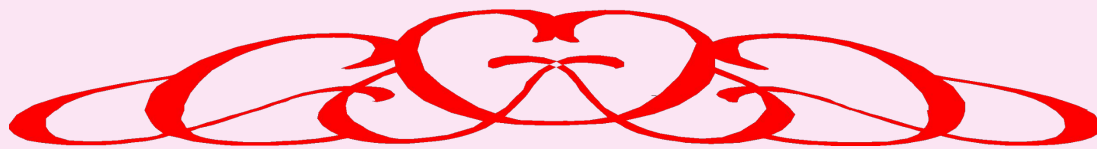




# ПРИМЕР.

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$



# Решение:

Сначала находим общее решение однородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 1$$



**Корни вещественные и разные, поэтому общее решение будет иметь вид:**

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

**Теперь находим частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных в виде:**

$$Y(x) = C_1(x) \cdot e^{2x} + C_2(x) \cdot e^x$$

$$Y'(x) = C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_1(x) \cdot 2 \cdot e^{2x} + \\ + C_2'(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot e^x$$



**Пусть**

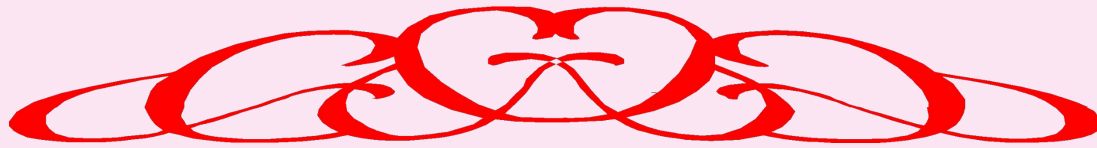
$$C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0$$

**Тогда**

$$Y'(x) = C_1(x) \cdot 2e^{2x} + C_2(x) \cdot e^x$$

$$Y'' = C_1'(x) \cdot 2e^{2x} + C_1(x) \cdot 4e^{2x} + \\ + C_2'(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot e^x$$

**Подставляем в уравнение:**



$$\begin{aligned} & C_1'(x) \cdot 2e^{2x} + \cancel{4C_1(x) \cdot e^{2x}} + C_2'(x) \cdot e^x + \\ & + \cancel{C_2(x) \cdot e^x} - \cancel{6C_1(x) \cdot e^{2x}} - \cancel{3C_2(x) \cdot e^x} + \\ & + \cancel{2C_1(x) \cdot e^{2x}} + \cancel{2C_2(x) \cdot e^x} = e^x \end{aligned}$$

**Получаем:**

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ 2C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^x = e^x \end{cases}$$



**Вычитаем из второго уравнения первое:**

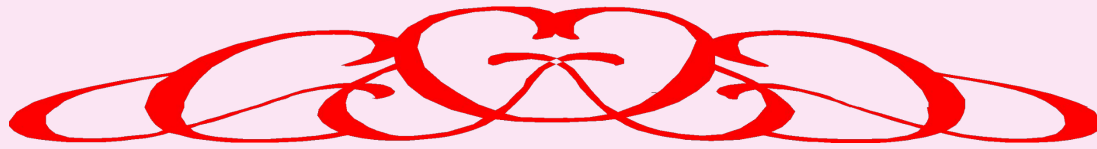
$$C_2'(x) \cdot e^{2x} = e^x$$

$$C_2'(x) = e^{-x}$$

**Теперь подставляем в первое уравнение:**

$$C_1'(x) \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{2x} = 0$$

$$C_1'(x) = -e^{-x} \cdot e^x = -1$$



**Интегрируем эти выражения:**

$$C_1(x) = -\int dx = -x$$

$$C_2(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

**Частное решение неоднородного уравнения  
имеет вид:**

$$Y = -xe^x - e^{-x} \cdot e^{2x} = -xe^x - e^x$$

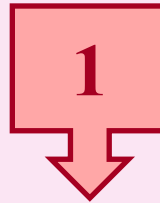
**Общее решение будет:**

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} - x \cdot e^x - e^x$$



**Частное решение неоднородного уравнения  
можно найти, используя следующую схему:**



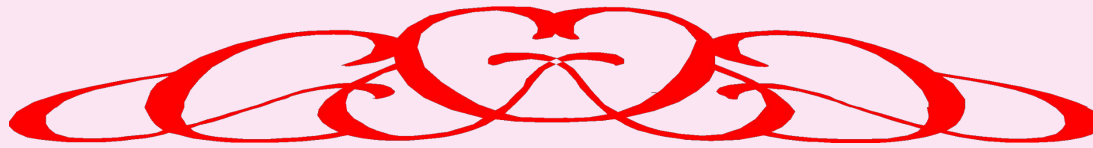


*Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:*

$$f(x) = P(x) \cdot e^{mx}$$

где  $P(x)$  – многочлен.

Тогда частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:



$$y(x) = x^r \cdot Q(x) \cdot e^{tx}$$

где  $Q(x)$  – многочлен той же степени, что и  $P(x)$ .

Причем, если  $t$  не является корнем характеристического уравнения, то

$$r=0,$$

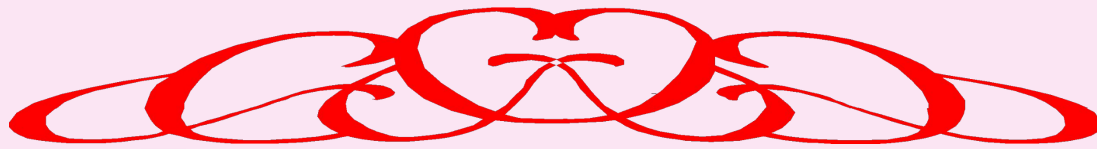
а если является, то  $r$  – кратность этого корня.



# ПРИМЕР.

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' - 2y' + y = 1 + x$$



# Решение:

Сначала решаем однородное уравнение:

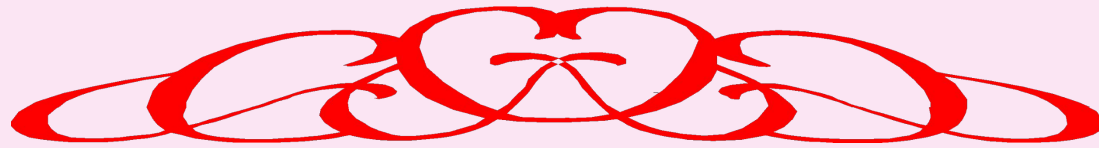
$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{2}{2} = 1 = k$$

Корни вещественные и одинаковые, поэтому общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$



Теперь решаем неоднородное уравнение. Правая часть представляет собой рассмотренный случай:

$$P(x) = 1 + x$$

$$m = 0$$

$m$  – не является корнем характеристического уравнения, следовательно  $r=0$ . Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$Y(x) = A \cdot x + B$$



**Находим производные и подставляем в исходное уравнение:**

$$Y'(x) = A$$

$$Y''(x) = 0$$

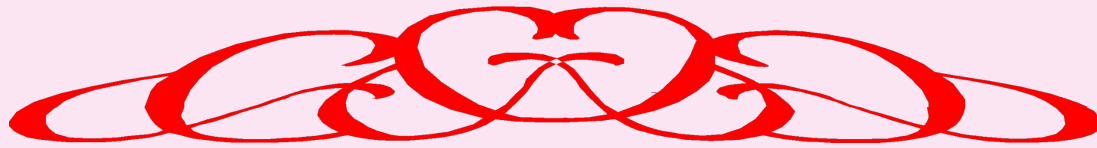
$$-2A + Ax + B = 1 + x$$

$$A = 1$$

$$B = 3$$

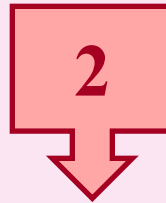
**Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:**

$$Y(x) = x + 3$$



Общее решение неоднородного уравнения  
запишем как сумму общего решения  
однородного уравнения и частного решения  
неоднородного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + x + 3$$



*Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:*

$$f(x) = a \cos nx + b \sin nx$$





Если числа  $\pm in$

не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:

$$y = A \cos nx + B \sin nx$$

Если числа  $\pm in$

являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

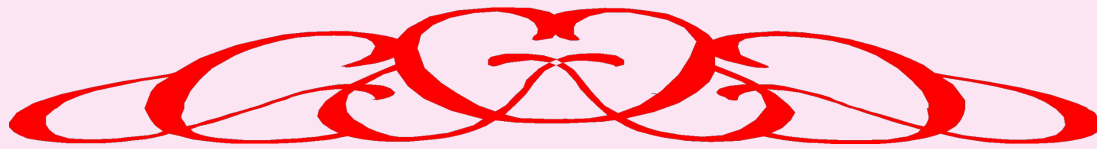
$$y = x \cdot (A \cos nx + B \sin nx)$$



# ПРИМЕР.

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2x$$



# Решение:

Сначала решаем однородное уравнение:

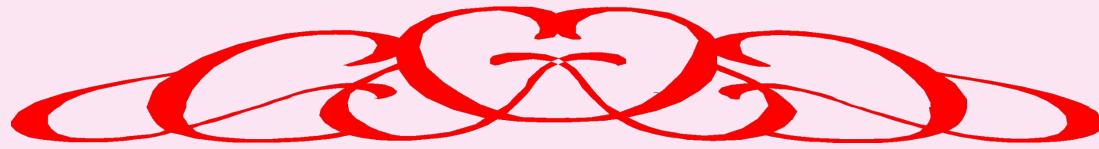
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$y = e^{kx} \Rightarrow k^2 + 4k + 13 = 0$$

$$D = 16 - 52 = -36 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

$$k_1 = 2 + 3i$$

$$k_2 = 2 - 3i$$



**Корни комплексные, поэтому общее решение будет иметь вид:**

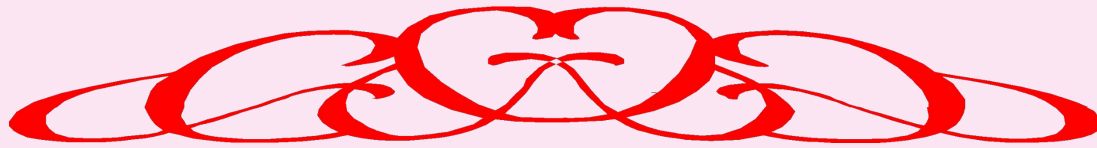
$$\tilde{y}(x) = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x)$$

**Теперь решаем неоднородное уравнение. Правая часть представляет собой рассмотренный случай:**

$$n = 2$$

**$2i$  и  $-2i$  не являются корнями характеристического уравнения, следовательно частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:**

$$Y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$



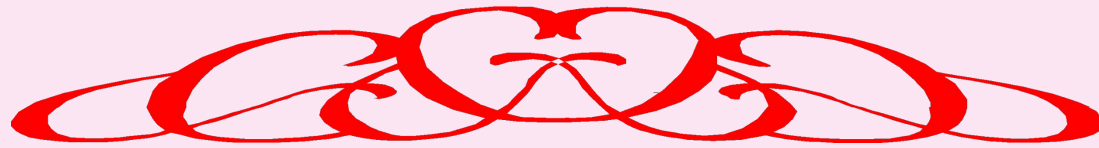
**Находим производные и подставляем в исходное уравнение:**

$$Y'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$Y''(x) = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

$$\begin{aligned} & -4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x + \\ & + 13A \cos 2x + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -4B - 8A + 13B = 5 \\ -4A + 8B + 13A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{8}{29} \\ B = \frac{9}{29} \end{cases}$$



**Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:**

$$Y(x) = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x$$

**Общее решение неоднородного уравнения запишем как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:**

$$y = e^{-2x} (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x$$



3

*Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:*

$$f(x) = e^{mx} (P_1(x) \cos nx + P_2(x) \sin nx)$$

где  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  – многочлены.



Если числа  $m \pm in$

не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:

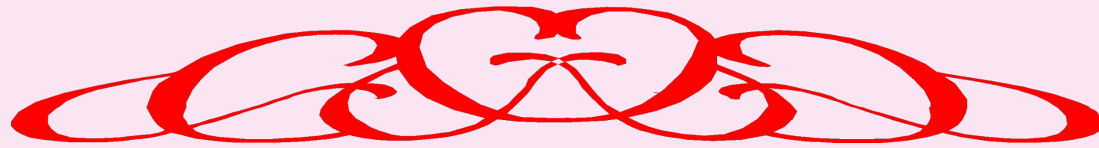
$$y = e^{mx} (R_1(x) \cos nx + R_2(x) \sin nx)$$

Если числа  $m \pm in$

являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$y = x \cdot e^{mx} (R_1(x) \cos nx + R_2(x) \sin nx)$$





где  $R_1(x)$  и  $R_2(x)$  – многочлены той же степени, что  
и многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  .