Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Это – постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах.

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют соленоидальным или вихревым.

Уравнения Максвелла – материальные уравнения

В систему уравнений Максвелла помимо указанных четырех входят еще три уравнения, которые называются ***материальными уравнениями***.

Материальные уравнения описывают характеристики среды, в которой распространяется электромагнитная волна, а именно – наличие диэлектриков (ε) ферромагнетиков (μ), удельной проводимости (γ).

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}} \qquad \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$

где ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные;

ε и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости;

γ - удельная проводимость вещества.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, *дифференциальную форму дополняют граничными условиями,* которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Интегральная форма уравнений содержит эти условия

$$\boxed{D_{n1} = D_{n2}} \quad \boxed{E_{\tau 1} = E_{\tau 2}} \quad \boxed{B_{n1} = B_{n2}} \quad \boxed{H_{\tau 1} = H_{\tau 2}}$$

Первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса, можно представить полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S}$$

Теорема Стокса

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V div\,\vec{D}\cdot dV$$

Теорема Гаусса

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$div\vec{D} = \rho.$$

$$div\vec{B} = 0.$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла – интегральная и дифференциальная – *эквивалентны.*

Однако если имеются поверхности разрыва – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Свойства уравнений Максвелла

1. ***Уравнения Максвелла линейны.***

Они содержат только первые производные полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ по времени т пространственным координатам и первые степени плотности пространственных зарядов ρ и токов $\vec{j}$

Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.

2. ***Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности***, выражающее закон сохранения электрического заряда.

3. ***Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.*** Уравнения Максвелла *инвариантны* по отношению к преобразованиям Лоренца (релятивистски инвариантны).

3. ***Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета***.

Вид уравнений не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Из принципа относительности Эйнштейна вытекает, что *отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.*

4. ***Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей***.

Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. ***Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов***. Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света.

Теория Максвелла

В основе теории Максвелла лежат два положения.

1. ***Всякое переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле.***

2. Всякое переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле

Вихревое электрическое поле

По Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле (вихревое поле) $\vec{E}_B$, циркуляция которого

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bl} dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Если поверхность и контур неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами

Вихревое электрическое поле

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{dt} d\vec{S}}$$

Циркуляция вектора напряженности *электростатического* поля

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$$

Циркуляция вектора напряженности *вихревого* поля

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \varepsilon_i$$

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}}$$

Первое уравнение Максвелла

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющееся во времени магнитные поля

Уравнения Максвелла для стационарных полей

$$(E = const;\ B = const)$$

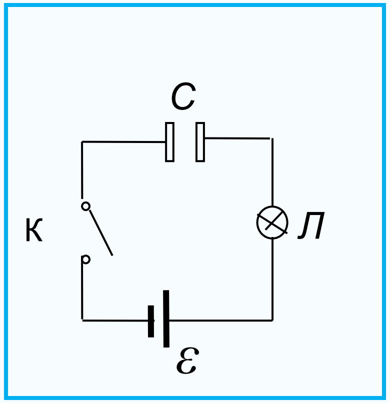
$$\boxed{\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0} \qquad \boxed{\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = I}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q} \qquad \boxed{\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0}$$

Т.е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, а источниками магнитного – только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать отдельно *постоянные* электрические и магнитные поля.

Ток смещения

Согласно Максвеллу, если всякое магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля.

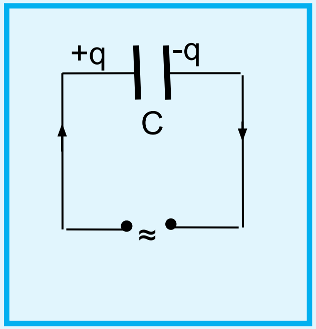


Для установления количественных отношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый ***ток смещения.***

Рассмотрим цепь постоянного тока, содержащую конденсатор.

Если замкнуть ключ, то лампа гореть не будет. Зазор между обкладками конденсатора – разрыв в цепи **постоянного** тока. Но в момент выключения лампа вспыхивает. Если взять прибор, регистрирующий магнитное поле, то в промежутке между обкладками обнаружится магнитное поле. Источником магнитного поля, как известно, является ток. Переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле.

Ток смещения

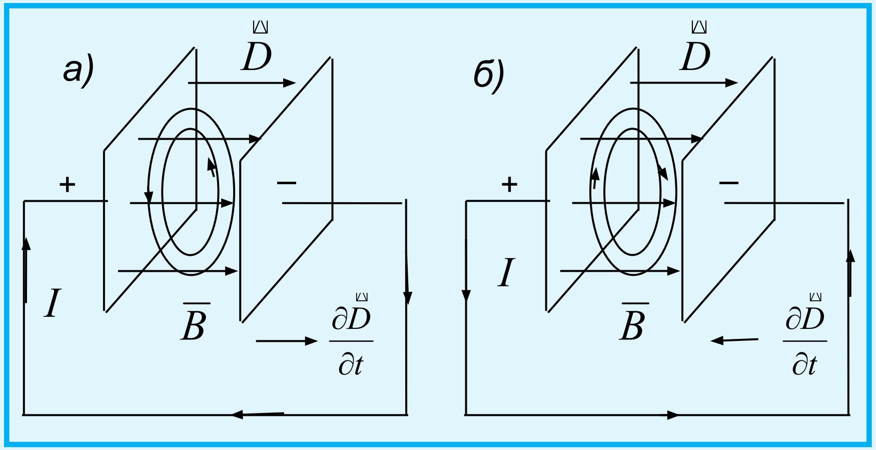


Рассмотрим цепь *переменного* тока, содержащую конденсатор. *Между пластинами конденсатора заряды не могут перемещаться.*
Согласно Максвеллу, через конденсатор “протекают” токи смещения, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Максвелл ввел ***понятие плотность тока смещения***

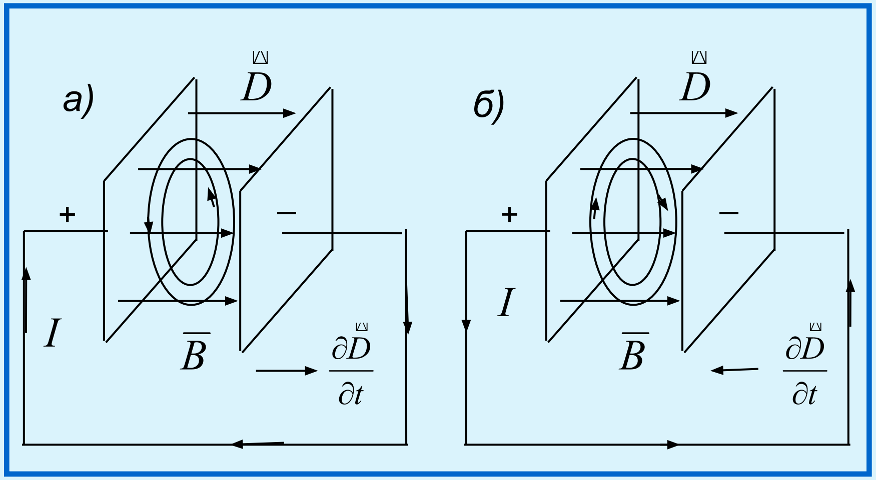
$$\boxed{\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Рассмотрим, каково направление векторов плотностей токов проводимости и смещения.



При зарядке конденсатора (рис.а) ток течет течет от правой обкладки к левой , поле в конденсаторе усиливается ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$), направления векторов $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\vec{j}_{см}$ совпадают .

Плотность тока смещения



При разрядке конденсатора (рис.б) ток течет течет от левой обкладки к правой , поле в конденсаторе ослабляется ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$), т.е. вектор $\frac{\partial D}{\partial t}$ направлен против вектора $\vec{D}$.

Однако вектор $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ направлен опять так же, как и вектор $\vec{j}$.

Таким образом, ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле (на рис. – штриховые линии)

В диэлектрике ток смещения состоит из двух составляющих $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

$\vec{E}$ - напряженность электрического поля;

$\vec{P}$ - поляризованность,

$$\boxed{\vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

$\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - Плотность тока смещения в вакууме

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - Плотность тока поляризации

Закон полного тока

Так как числовые значения плотности тока смещения $j_{см}$ и плотности тока проводимости j равны, то линии плотности тока проводимости внутри проводника непрерывно переходят в линии плотности тока смещения между обкладками конденсатора.

Для того, чтобы ток был замкнут, вводится понятие *полного тока,* который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения

$$\boxed{j_{полн} = j + \frac{dD}{dt}} \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}}$$

Плотность полного тока

Ток смещения – переменное электрическое поле;

Ток смещения, подобно току проводимости, порождает магнитное поле, силовые линии которого всегда замкнуты.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \mu I$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I$$

$$I_{полн} = \int_S \vec{j}_{полн} d\vec{S}$$

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

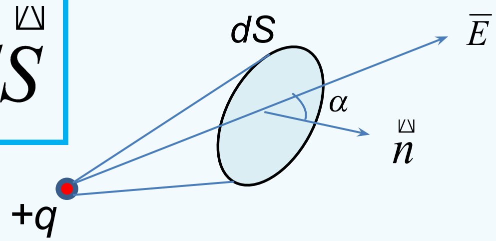
Второе уравнение Максвелла

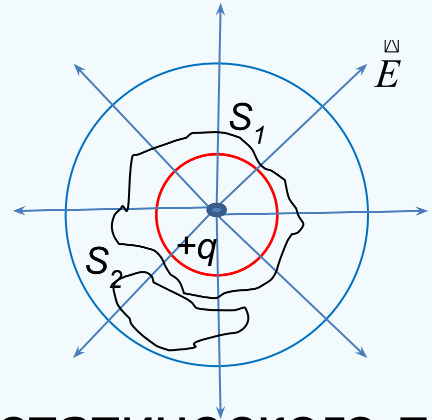
Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями

Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$

Поток вектора напряженности электрического поля

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S}$$





$$[\Phi] = Вб$$

Теорема Гаусса для электростатического поля

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$$

$$q = \oint_V \rho dV$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}dS = \int_V \rho dV}$$

Третье уравнение Максвелла

Это – постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах.

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$

$$\boxed{\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0}$$

Четвертое уравнение Максвелла

Четвертое уравнение отражает тот факт, что магнитных зарядов в природе нет.

Магнитное поле называют соленоидальным или вихревым.

Заключение

Какие выводы можно сделать, рассмотрев электрические и магнитные поля?

Во многом эти поля сходны – выполняется принцип суперпозиции, силовое действие, влияние среды и др. Однако имеются принципиальные различия:

- *Электрическое поле создается как неподвижными, так и подвижными зарядами. Магнитных зарядов в природе нет. Магнитное поле создается только движущимися электрическими зарядами и действует только на движущиеся заряды.*

- *Характер поля:*

электростатическое поле – потенциальное (силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных).

магнитное поле **-** *вихревое. Силовые линии замкнуты.*

- *Электрическое поле изменяет энергию заряженной частицы, магнитное поле – нет (изменяется только направление движения).*

Взаимодействие между электрическими зарядами в электрических и магнитных полях, а также между электрическими и магнитными полями является одним из четырех фундаментальных видов взаимодействия – *электромагнитного взаимодействия.*

Спасибо за внимание

Успехов!