

# Тема 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

2.1. Силовые линии электростатического поля

2.2. Поток вектора напряженности

2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

2.4. Дифференциальная форма теоремы 2.4.

Дифференциальная форма теоремы 2.4.

Дифференциальная форма теоремы

Остроградского-Гаусса

2.5. Вычисление электростатических полей с помощью

теоремы Остроградского 2.5. Вычисление

электростатических полей с помощью

теоремы Остроградского 2.5. Вычисление

электростатических полей с помощью

теоремы Остроградского 2.5. Вычисление

электростатических полей с помощью

теоремы Остроградского - 2.5. Вычисление

электростатических полей с помощью

теоремы Остроградского - Гаусса

2.5.1. Поле бесконечной равномерно заряженной

## 2.1. Силовые линии электростатического поля

- Теорема Остроградского-Гаусса, которую мы докажем и обсудим позже, устанавливает связь между электрическими зарядами и электрическим полем. Она представляет собой более общую и более изящную формулировку закона Кулона.



- **Остроградский Михаил Васильевич** (1801 – 1862)
- отечественный математик и механик. Учился в Харьковском ун-те (1816 – 1820), совершенствовал знания в Париже (1822 – 1827).
- Основные работы в области математического анализа, математической физики, теоретической механики. Решил ряд важных задач гидродинамики, теории теплоты, упругости, баллистики, электростатики, в частности задачу распространения волн на поверхности жидкости (1826 г.). Получил дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Известен теоремой Остроградского-Гаусса в электростатике (1828 г.).



## Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855)

*немецкий математик, астроном и физик.*

Исследования посвящены многим разделам физики.

В 1832 г. создал абсолютную систему мер (СГС), введя три основных единицы: единицу времени – 1 с, единицу длины – 1 мм, единицу массы – 1 мг.

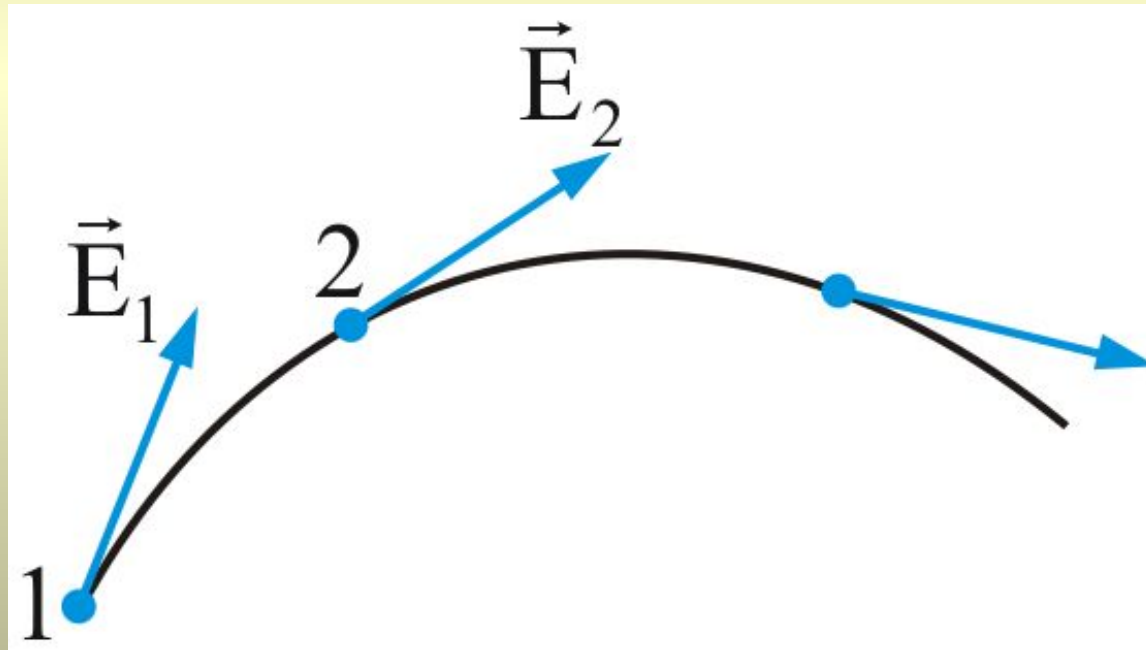
В 1833 г. совместно с В. Вебером построил первый в Германии электромагнитный телеграф.

- Еще в 1845 г. пришел к мысли о конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Изучал земной магнетизм, изобрел в 1837 г. униполярный магнитометр, в 1838 г. – бифилярный. В 1829 г.
- Сформулировал принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса).
- Один из первых высказал в 1818 г. предположение о возможности существования неевклидовой геометрии.

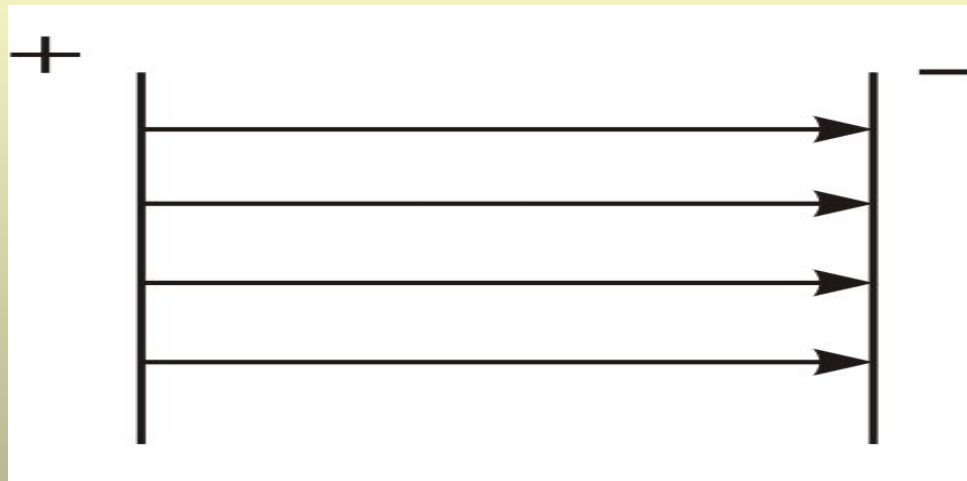
- Основная ценность теоремы Остроградского-Гаусса состоит в том, что она позволяет *глубже понять природу электростатического поля и устанавливает более общую связь между зарядом и полем.*



- **силовые линии** – это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности



- **Однородным** называется электростатическое **поле**, во всех точках которого **напряженность одинакова по величине и направлению**.
- Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга

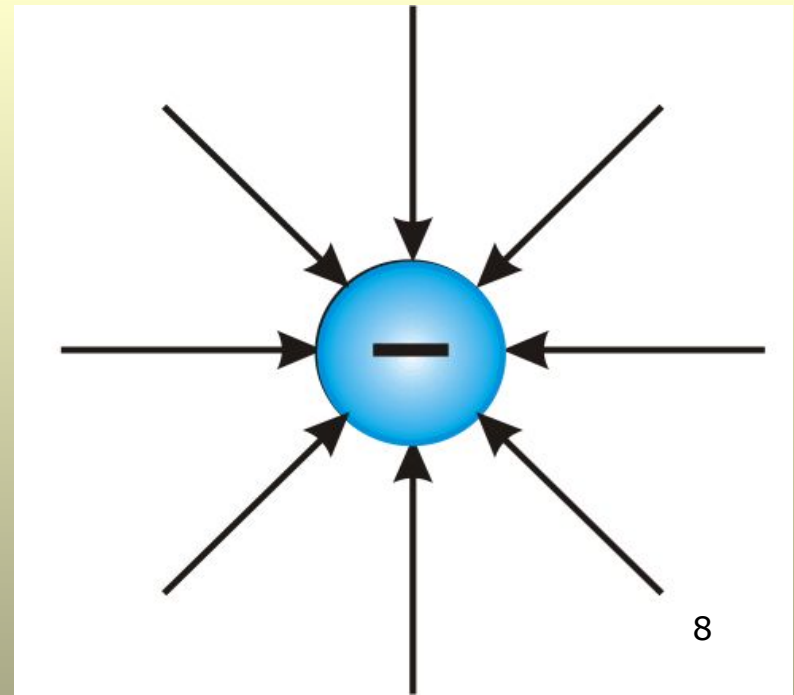
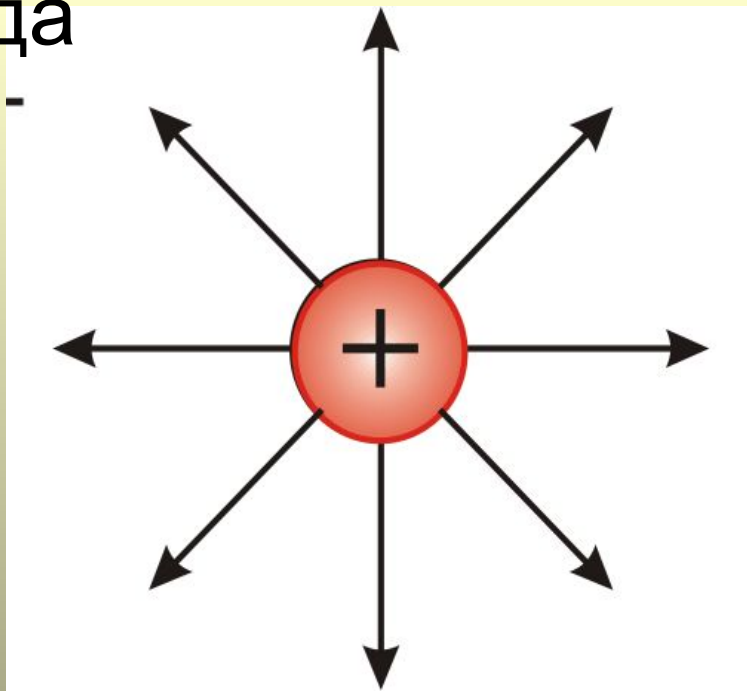


## В случае точечного заряда поле

**неоднородно**, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд.

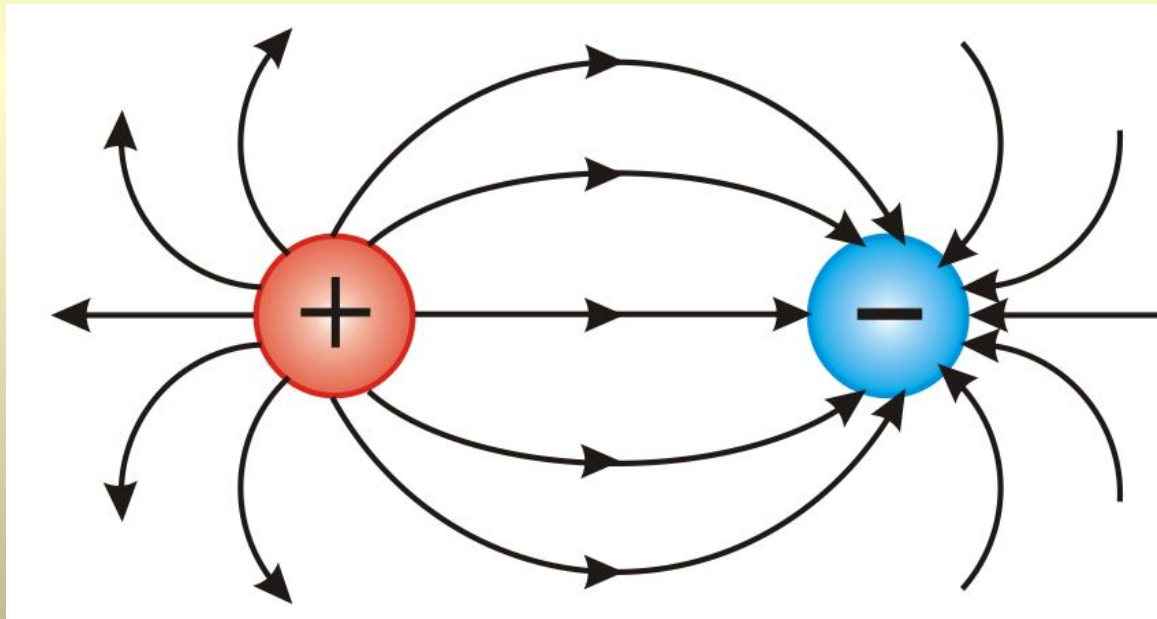
Т.к.  $E \sim 1/r^2$ ,

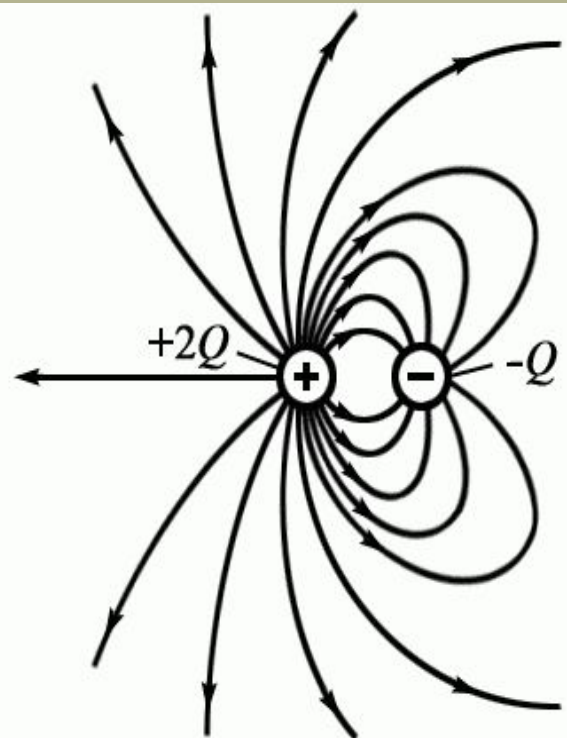
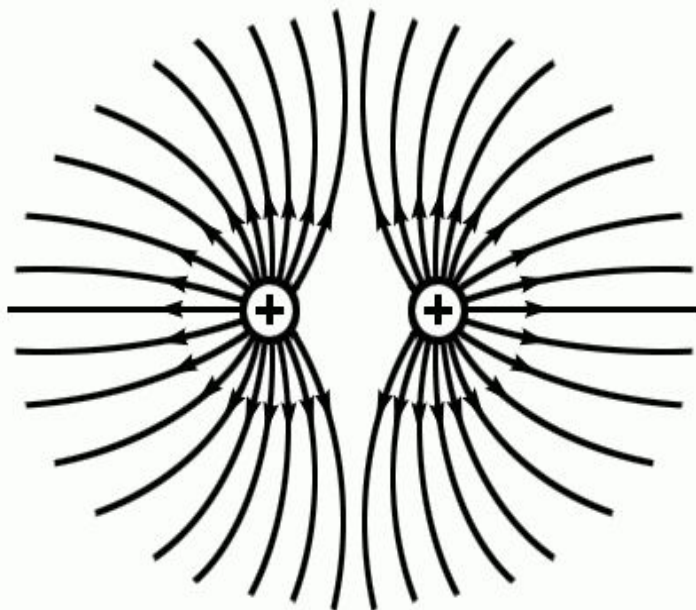
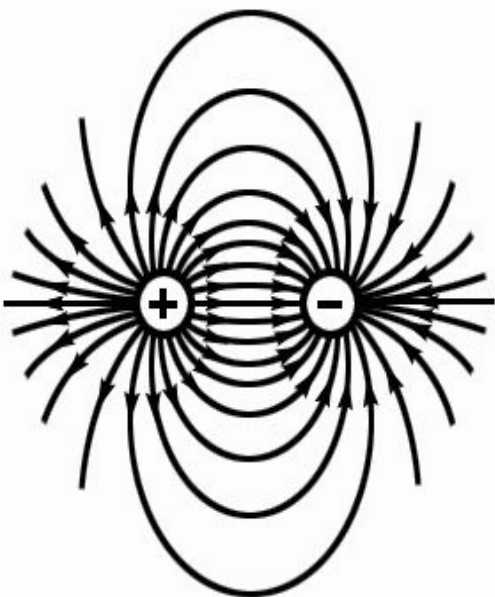
то густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда





- Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному





- Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности, т.е.  $|\vec{E}|$ :

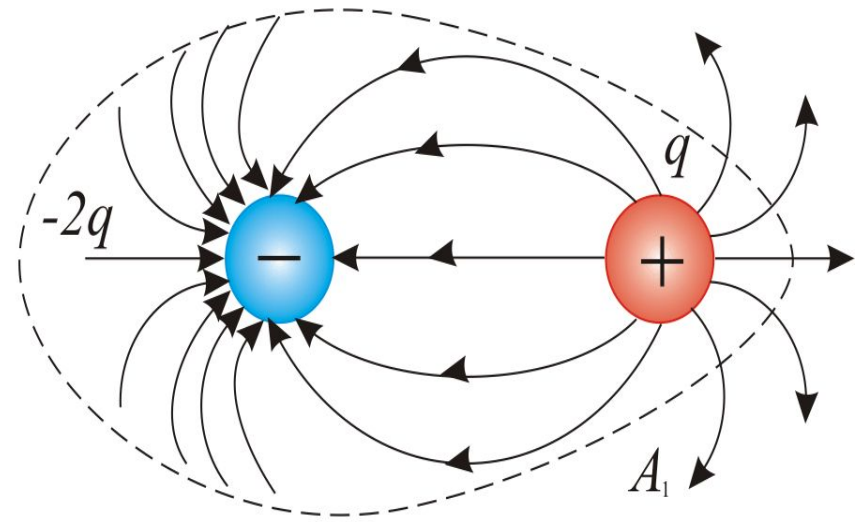
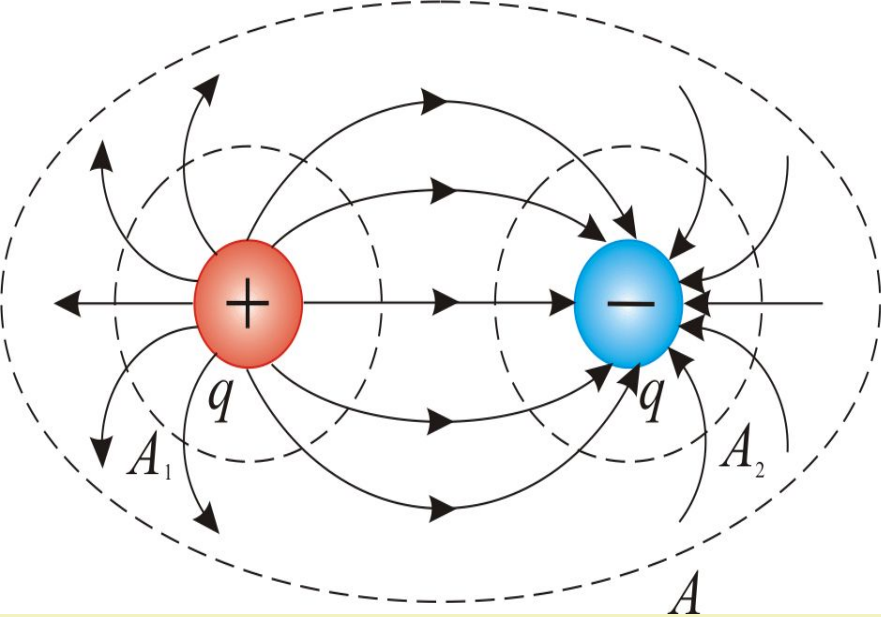
$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

## 2.2. Поток вектора напряженности

- Полное число силовых линий, проходящих через поверхность  $S$  называется **поток вектора напряженности  $\Phi$**  через эту поверхность
- В векторной форме можно записать
$$\Phi_E = (\overset{\vee}{\mathbf{E}}, \overset{\vee}{\mathbf{S}})$$
– скалярное произведение двух векторов, где вектор  $\overset{\vee}{\mathbf{S}} = \overset{\vee}{\mathbf{n}}S$ .

$$\Phi_E = \left( \overset{\vee}{\mathbf{E}}, \overset{\vee}{\mathbf{S}} \right)$$

- Таким образом, поток вектора есть скаляр, который в зависимости от величины угла  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным.



Для первого рисунка – поверхность  $A_1$  окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е.  $\Phi_E > 0$ .

Поверхность  $A_2$  – окружает отрицательный заряд, здесь  $\Phi_E < 0$  и направлен внутрь.

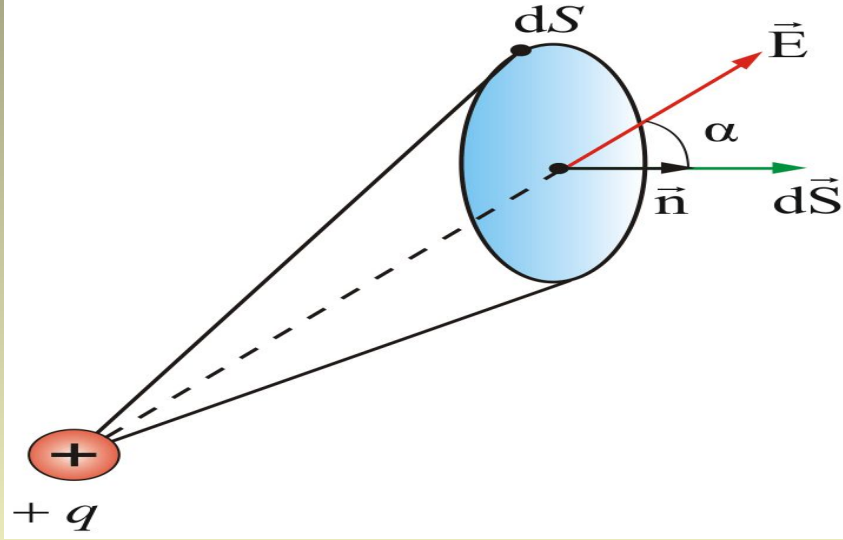
**Общий поток через поверхность  $A$  равен нулю.**

**Опишите второй рисунок самостоятельно.**



## 2.3. Теорема Остроградского-Гаусса

- *Итак, по определению, поток вектора напряженности электрического поля равен числу линий напряженности, пересекающих поверхность  $S$ .*

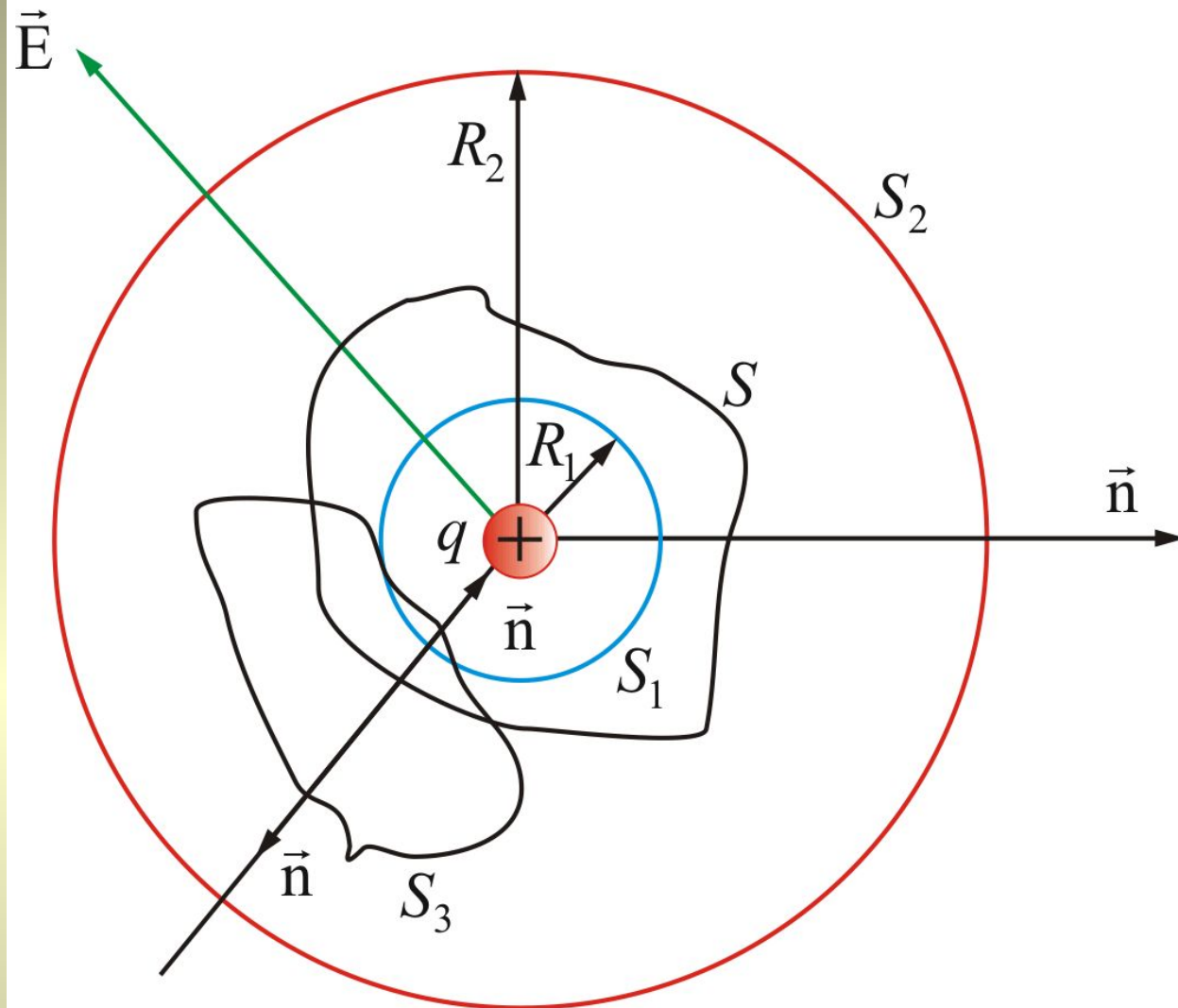


- поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку  $dS$  будет равен:

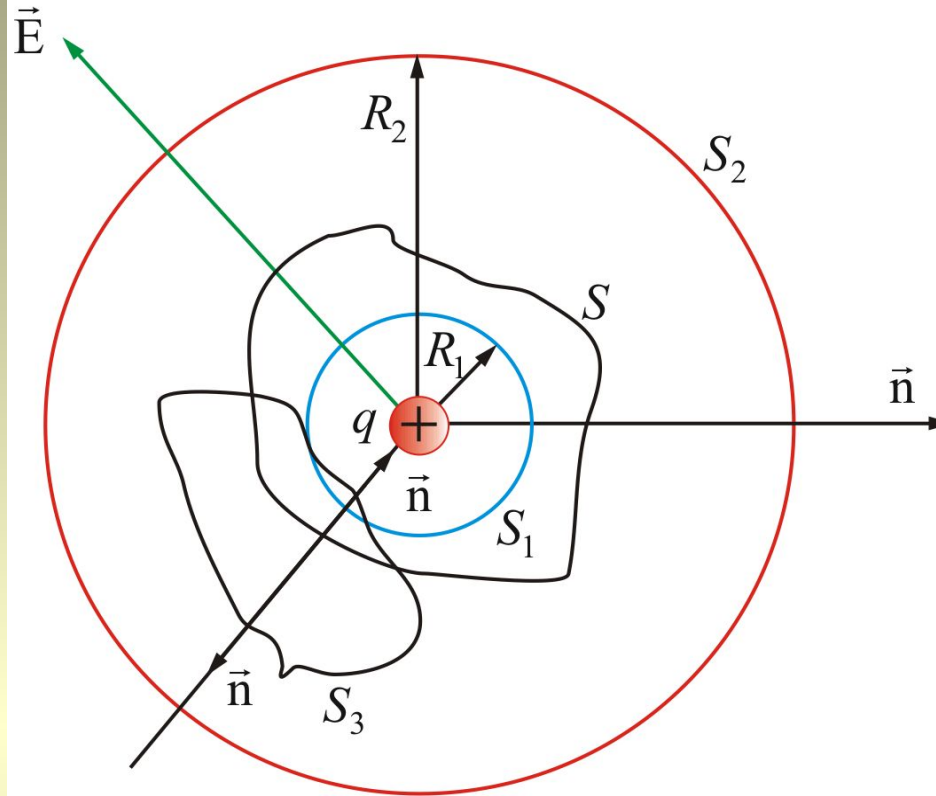
$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS.$$

- Т.е. в однородном поле  $\Phi_E = ES$ .
- В произвольном электрическом поле

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$



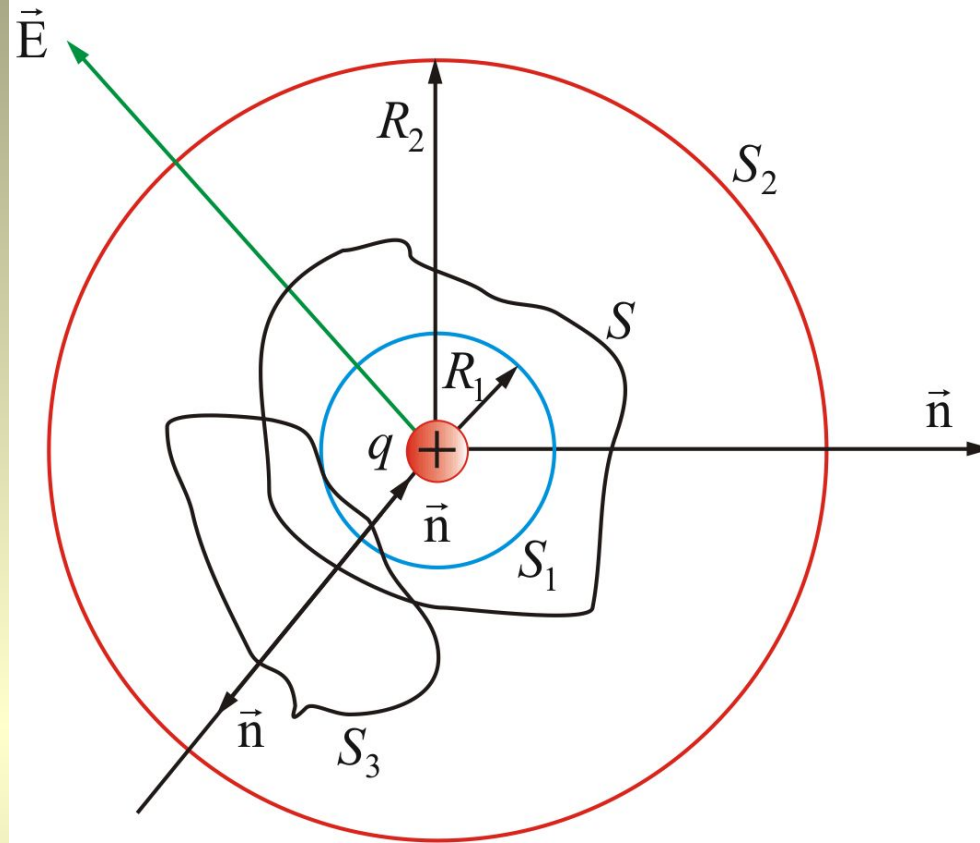
- Подсчитаем поток вектора через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точечный заряд  $q$ . Окружим заряд  $q$  сферой  $S_1$ .



- Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы  $S_1$  равен  $R_1$ .
- В каждой точке поверхности  $S_1$  проекция  $E$  на направление

внешней нормали  
одинакова и равна

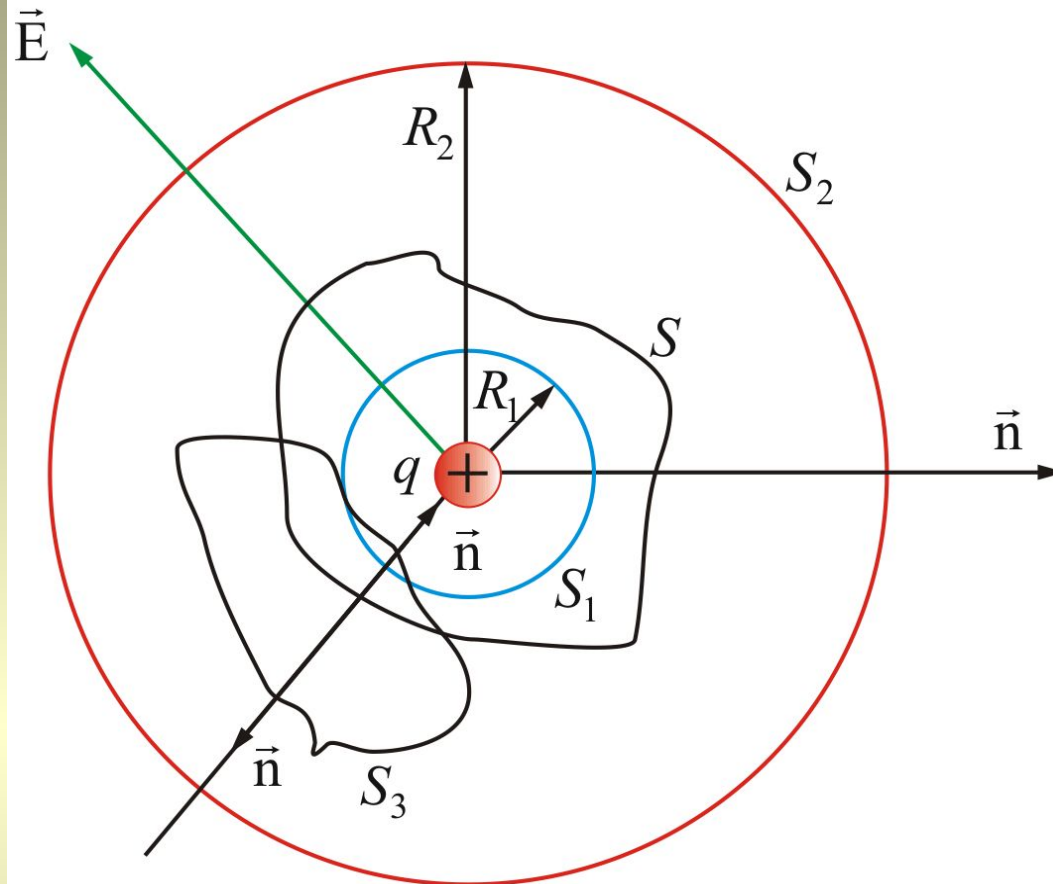
$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$



♦ Тогда поток через  $S_1$

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

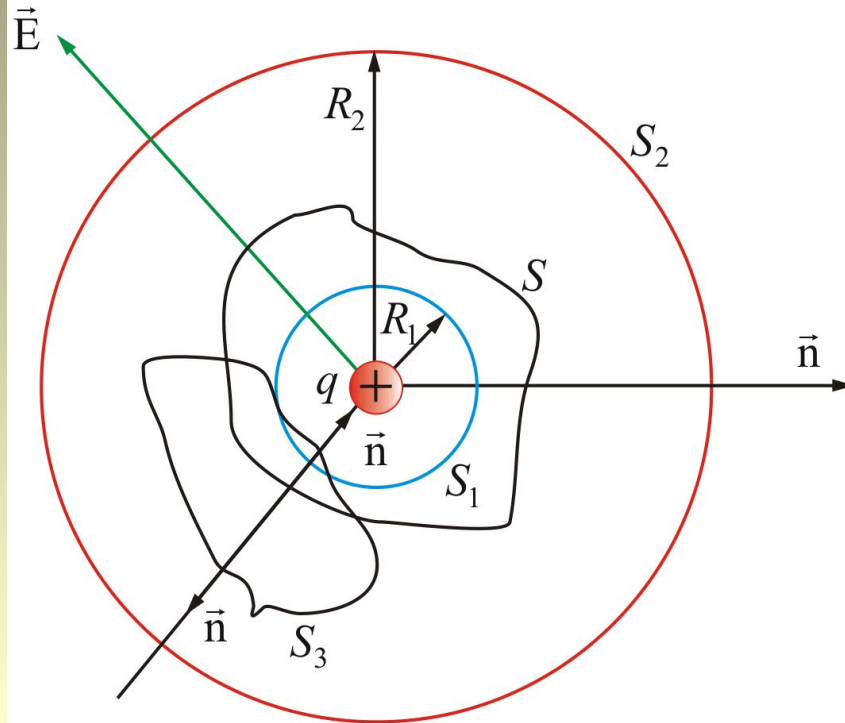


- Подсчитаем поток через сферу  $S_2$ , имеющую радиус  $R_2$ :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$





- Из непрерывности линии  $\vec{E}$  следует, что поток и через любую произвольную поверхность  $S$  будет равен этой же величине:

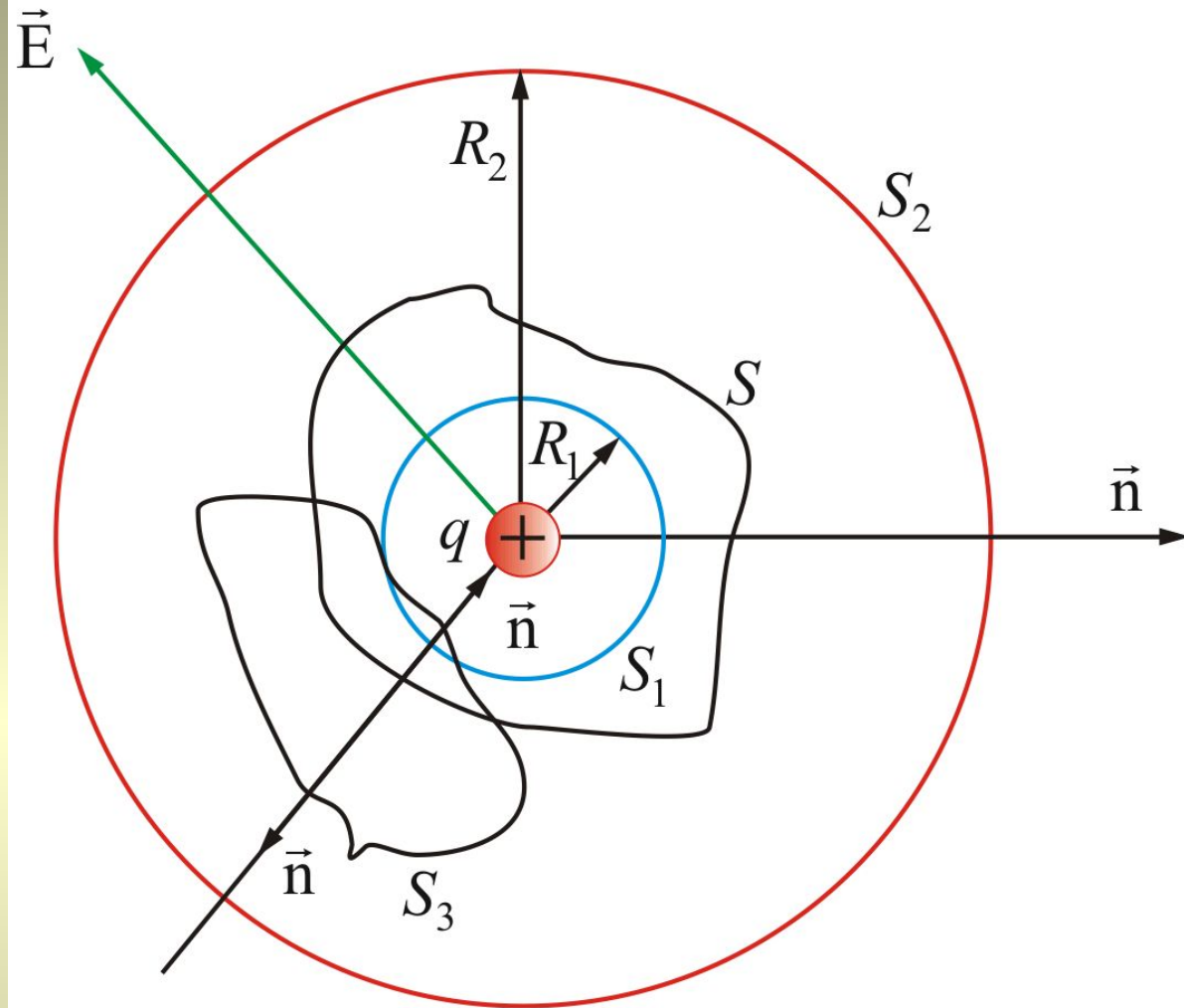
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- – теорема Гаусса для одного заряда.

- Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

- – **теорема Гаусса для нескольких зарядов:**
- **Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .**



Полный поток проходящий через  $S_3$ , не охватывающую заряд  $q$ , равен нулю:

$$\Phi_3 = 0$$

- Таким образом, для точечного заряда  $q$ , полный поток через любую замкнутую поверхность  $S$  будет равен:

- $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$  – если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;
- $\Phi_E = 0$  – если заряд расположен вне замкнутой поверхности;
- этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

- Электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой **объемной плотностью** различной в разных местах пространства:

$$\rho = dq / dV$$

- Здесь  $dV$  – **физически бесконечно малый объем**, под которым следует понимать такой объем, который с одной стороны достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой – достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда, т.е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона или протона .

- Суммарный заряд объема  $dV$  будет равен:

$$\sum q_i = \int \rho dV.$$

- Тогда из теоремы Гаусса  $\overset{V}{\int} \text{можно получить:}$

- $$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

- – *это ещё одна форма записи теоремы Остроградского-Гаусса, если заряд неравномерно распределен по объему.*



## 2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

- Пусть заряд распределен в пространстве  $\Delta V$ , с объемной плотностью  $\langle \rho \rangle$ . Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\epsilon_0} \qquad \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

- Теперь устремим  $\Delta V \rightarrow 0$  стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом  $\langle \rho \rangle$  будет стремиться к  $\rho$  в данной точке, т.е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

- **Величину, являющуюся пределом отношения  $\oint \vec{E} d\vec{S}$  к  $\Delta V$ , при  $\Delta V \rightarrow 0$  называют дивергенцией поля  $\vec{E}$**

$$\text{div } \vec{E}$$

- *Дивергенция поля  $\mathbf{E}$*

- $$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (2.4.1)$$

- Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля.

- Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат.*

- В декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

- Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.4.3)$$

- **Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.**
- Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор  $\nabla$  (Набла)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты осей (единичные векторы).

- Сам по себе оператор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- **дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.**

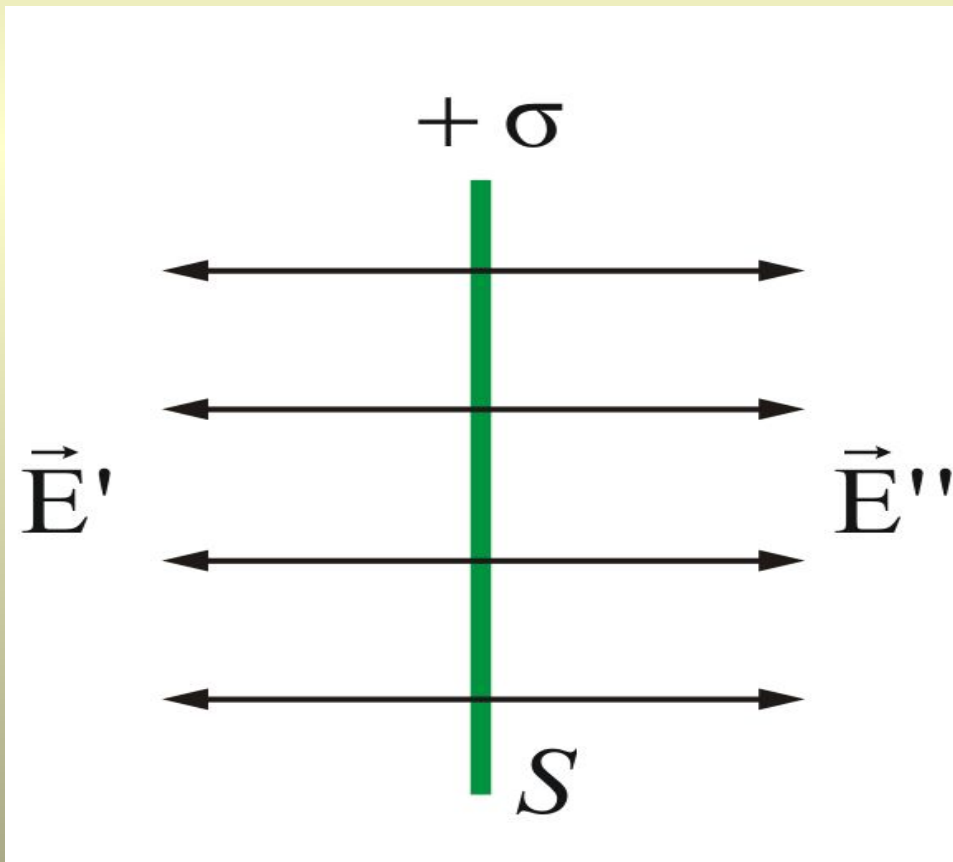
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- В тех точках поля, где  $\operatorname{div} E > 0$  – **источники** поля  
(положительные заряды),
- где  $\operatorname{div} E < 0$  – **стоки** (отрицательные заряды).
- **Линии напряженности выходят из источников и заканчиваются в стоках.**



## 2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

### 1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости



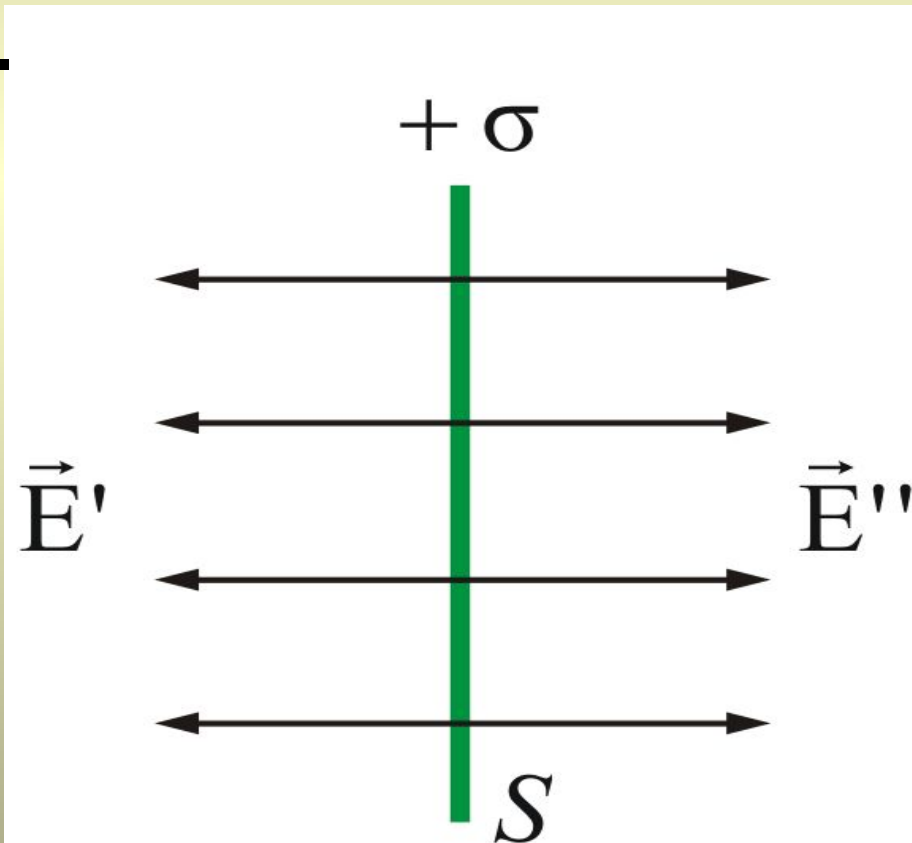
$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

**Поверхностная плотность заряда** на

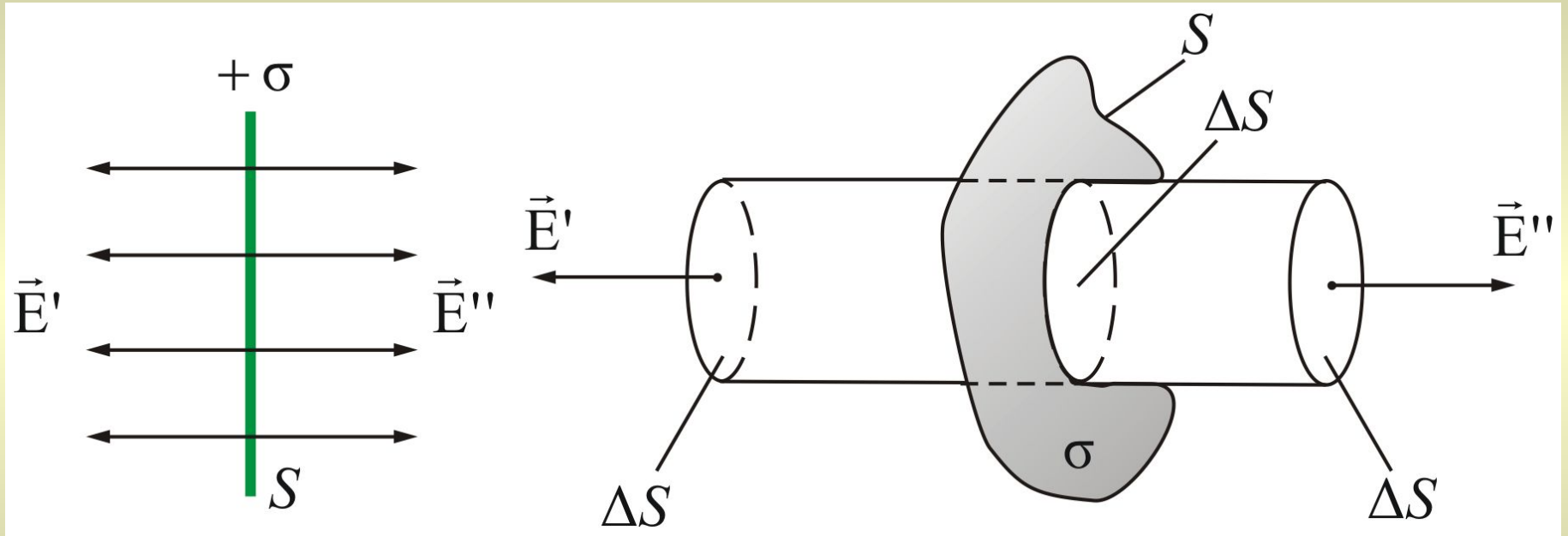
произвольной плоскости площадью  $S$  определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

$dq$  – заряд, сосредоточенный на площади  $dS$ ;  
 $dS$  – физически бесконечно малый участок поверхности.



- Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями  $\Delta S$ , расположенными симметрично относительно плоскости



- Тогда

$$E' = E'' = E.$$

- Суммарный **поток** через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен:

$$\Phi_E = 2\Delta SE.$$

- Внутри поверхности заключен заряд .  
Следовательно, из теоремы  
Остроградского-Гаусса получим:

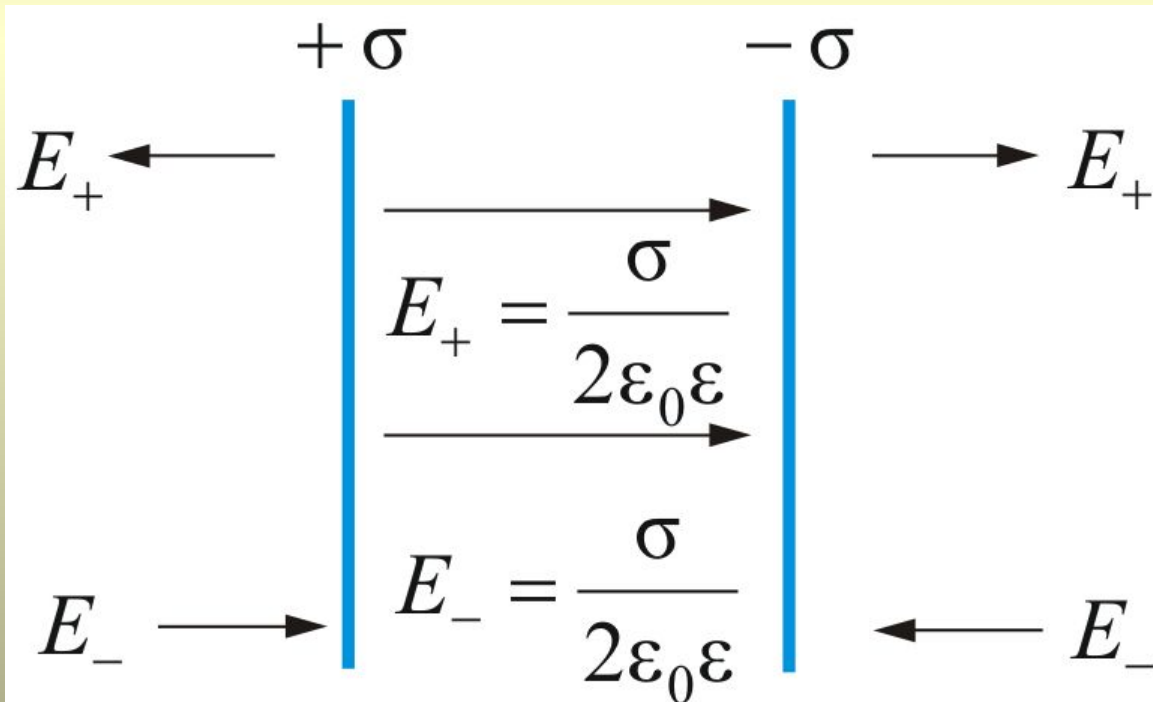
$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 2\Delta SE = \sigma\Delta S \frac{1}{\epsilon_0}$$

- откуда видно, что **напряженность поля плоскости S:**

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.5.1)$$

## 2.5.2. Поле двух равномерно заряженных плоскостей

- Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине плотностью  $\sigma$



- **Результирующее поле**, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей.
- Тогда **внутри плоскостей**

$$E = E_+ + E_- \quad \text{отсюда} \quad E = \sigma / \epsilon_0$$

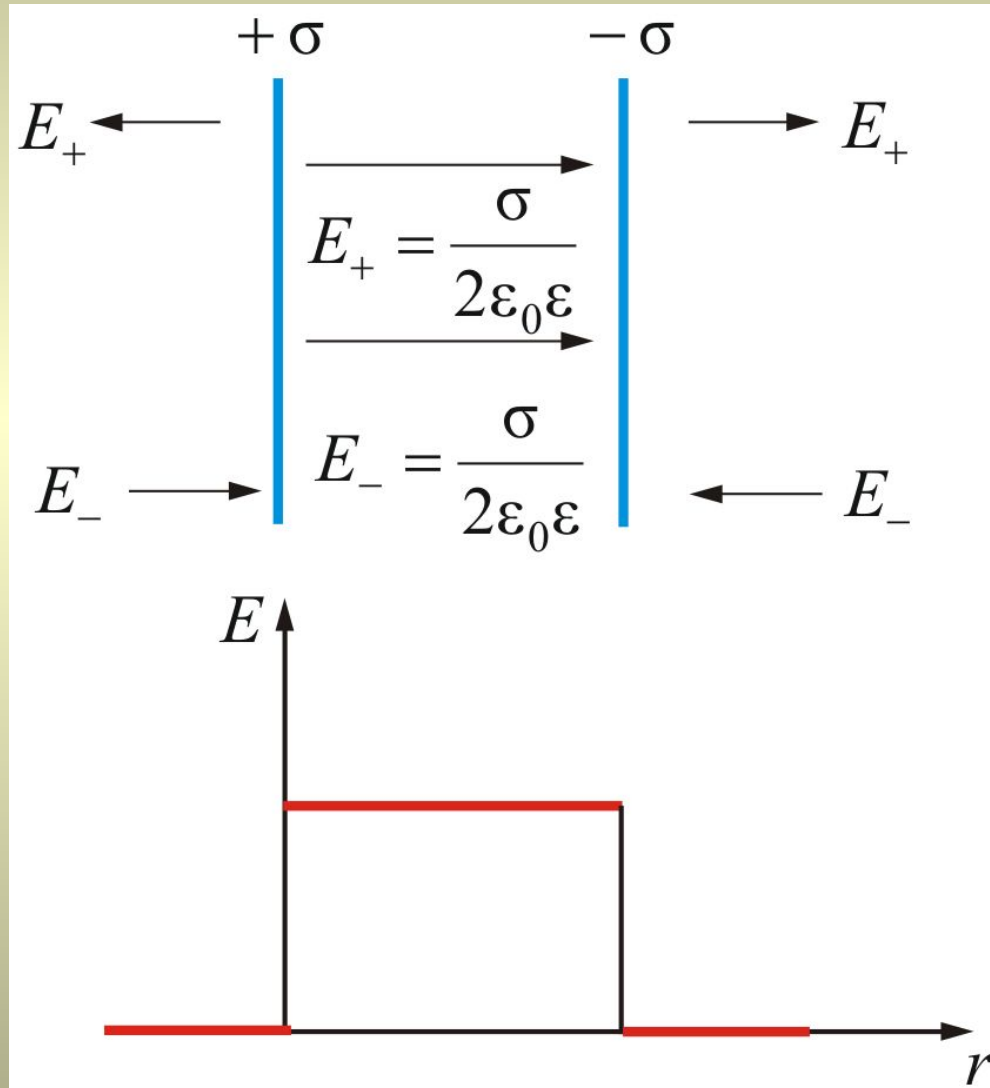
- **Вне плоскостей напряженность поля**

$$E = 0.$$

- Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (**плоский конденсатор**).

# ● **Распределение напряженности**

электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке:



- Между пластинами конденсатора действует **сила взаимного притяжения** (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S} \text{ т.е.} \quad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

- *Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.*



- Сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

- где  $S$  – площадь обкладок конденсатора.

- Т.к. 
$$\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$$

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}$$

- Это формулы для расчета **пондермоторной силы**

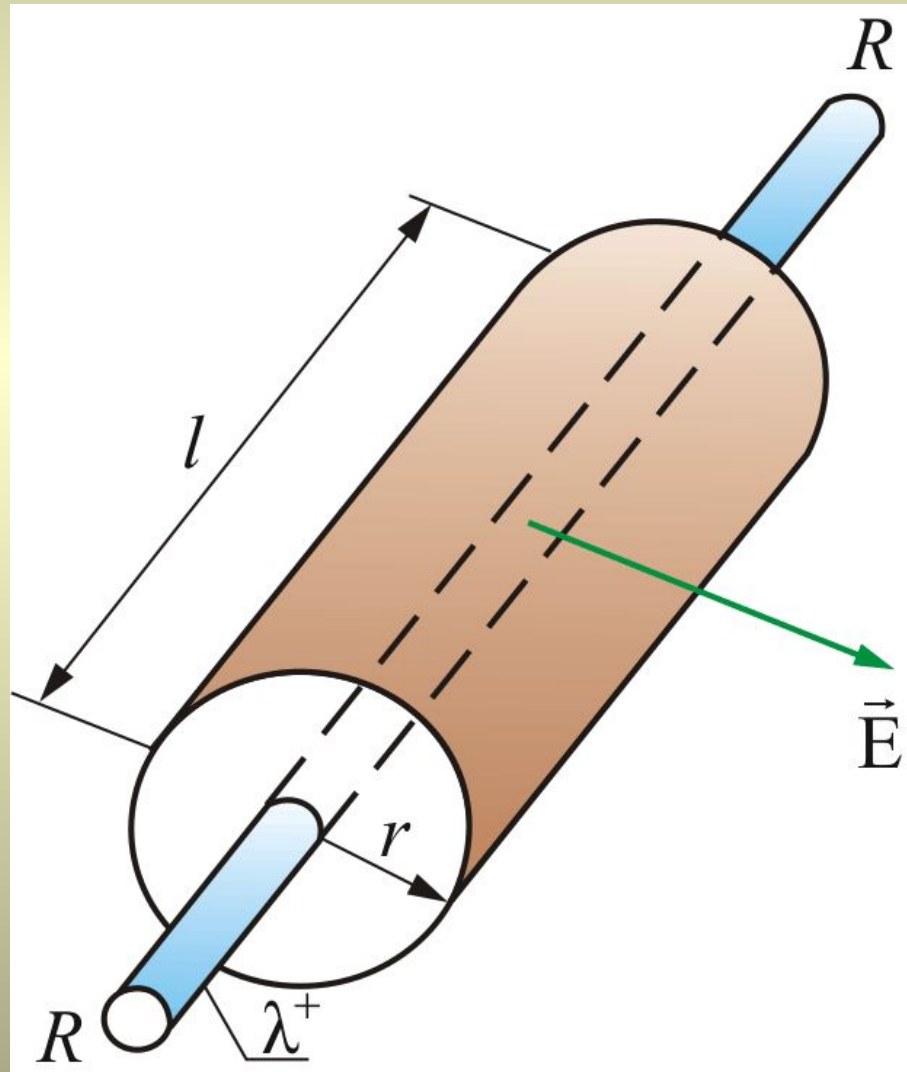
## 2.5.3. Поле равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра (нити)

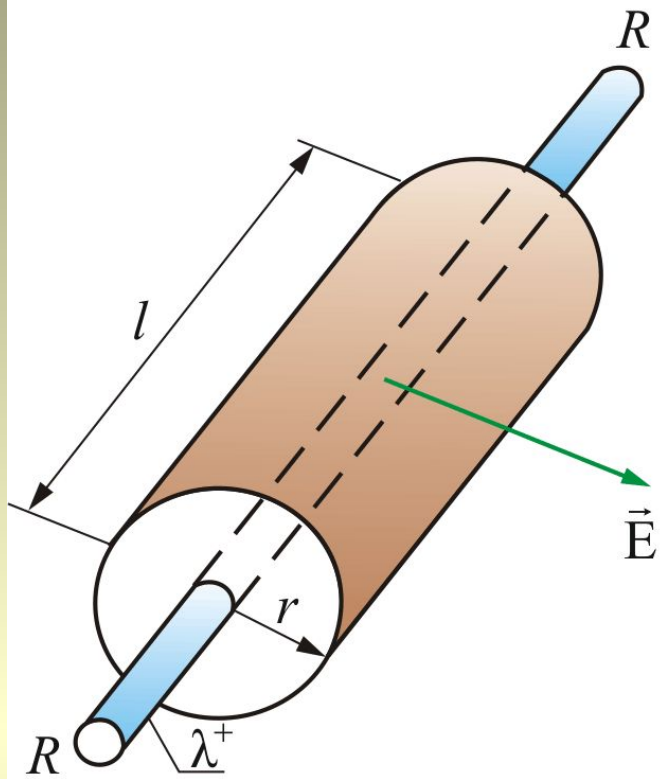
- Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса  $R$* , заряженной с постоянной линейной плотностью

$$\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$$

- где  $dq$  – заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра

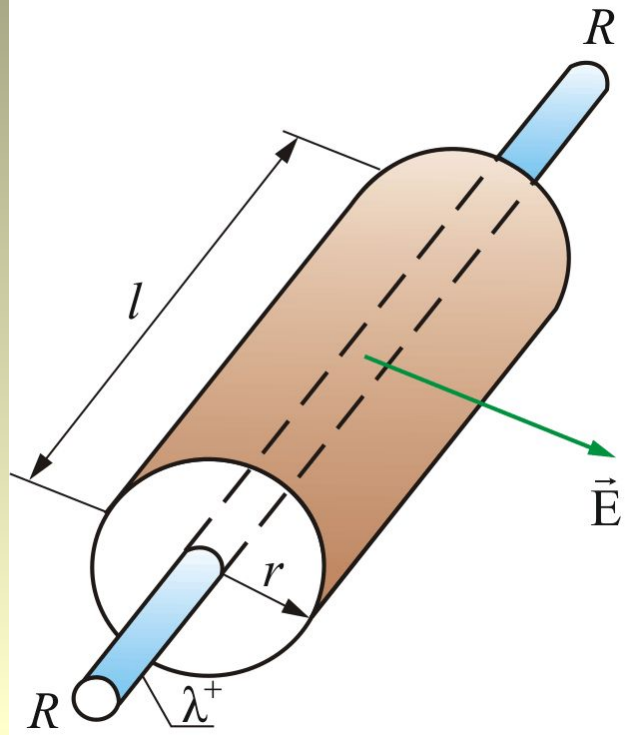
Представим вокруг цилиндра (нити) коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре) радиуса  $r$  и длиной  $l$  (основания цилиндров перпендикулярно оси).





- Для оснований цилиндров  $E_n = 0$ ,
- для боковой поверхности  $E_n = E(r)$ , т.е. зависит от расстояния  $r$ .
- Следовательно, **поток вектора через рассматриваемую поверхность**, равен

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl.$$



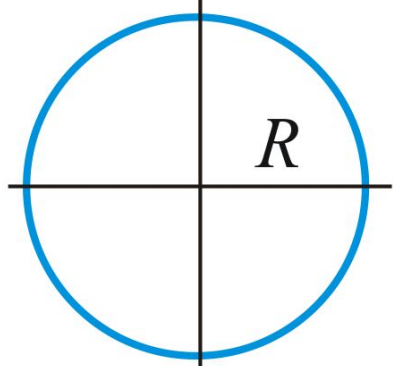
• При  $r \geq R$ , на поверхности будет заряд  $q = \lambda l$ .

• По теореме Остроградского-Гаусса  $E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$

• Тогда

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ при } r \geq R$$

• Если  $r < R$ ,  $E(r) = 0$ , т.к. внутри замкнутой поверхности зарядов нет.



$\vec{E}$

$\sim \frac{1}{r}$

0

R

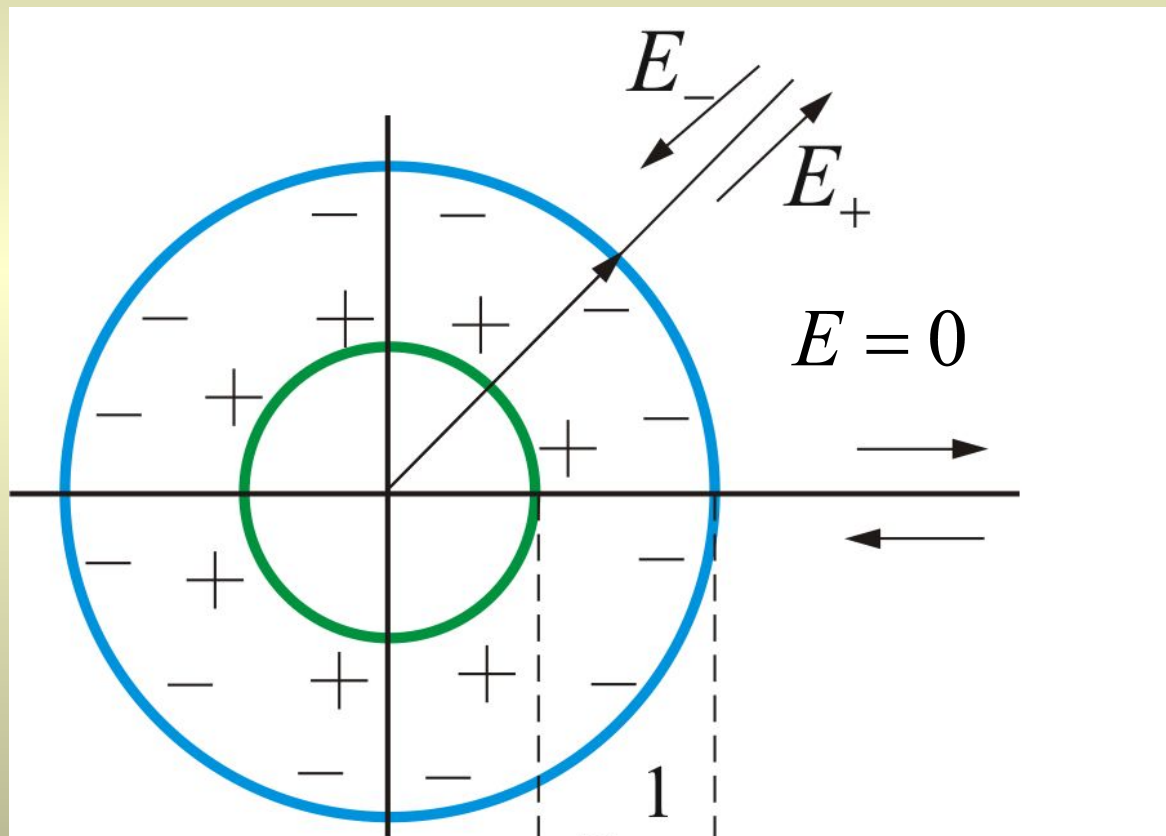
r

- График распределения напряженности электростатического поля цилиндра

0 – внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов

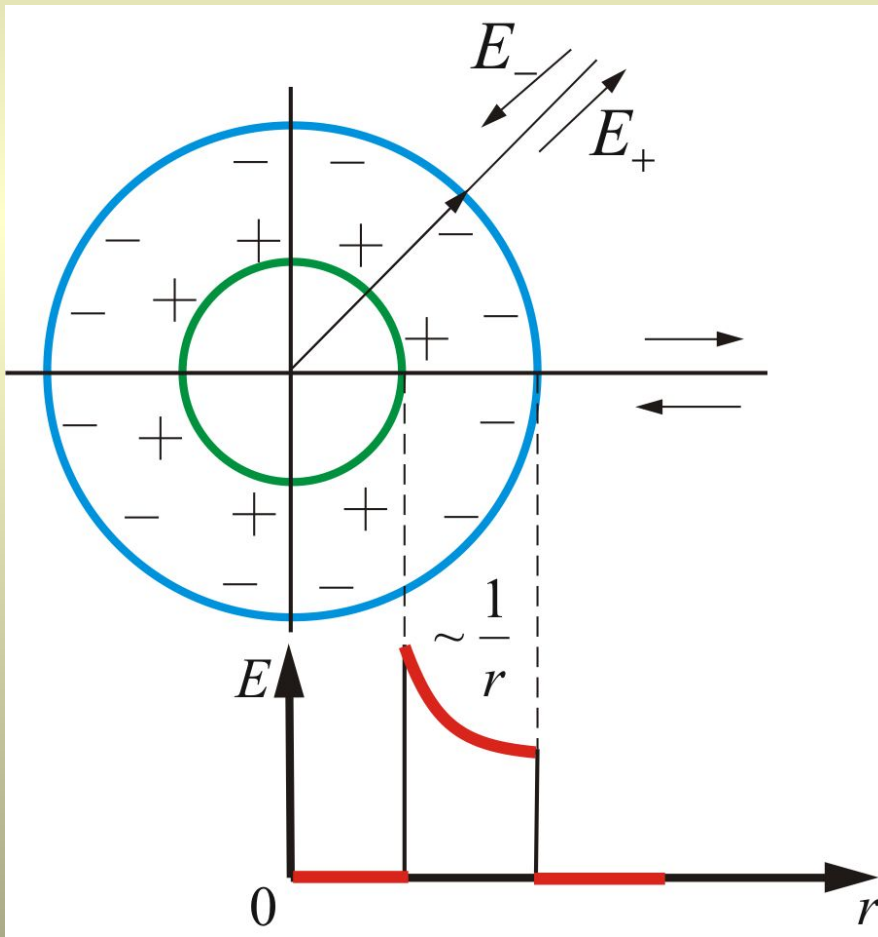
$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра} \end{cases}$$

## 2.5.4. Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью $\lambda$ , но разным знаком



Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать  $E = 0$

В зазоре **между цилиндрами**, поле определяется так же, как в п. 2.5.3:



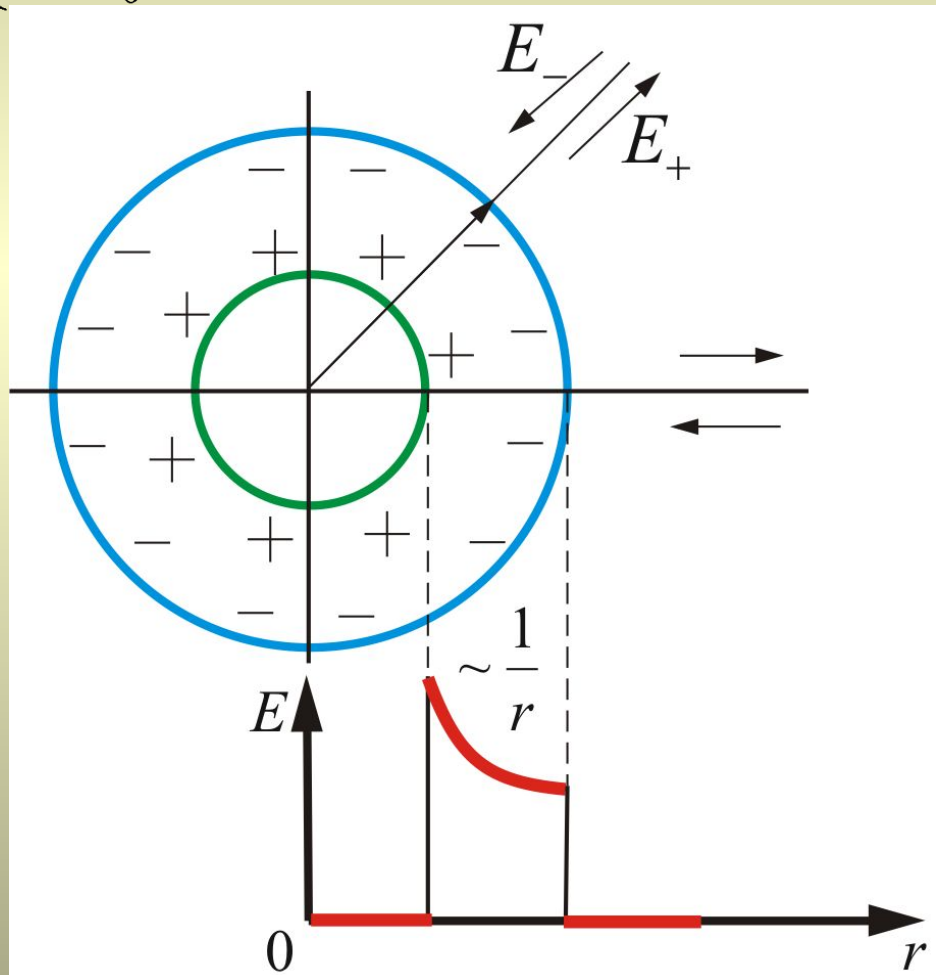
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



Таким образом для коаксиальных цилиндров

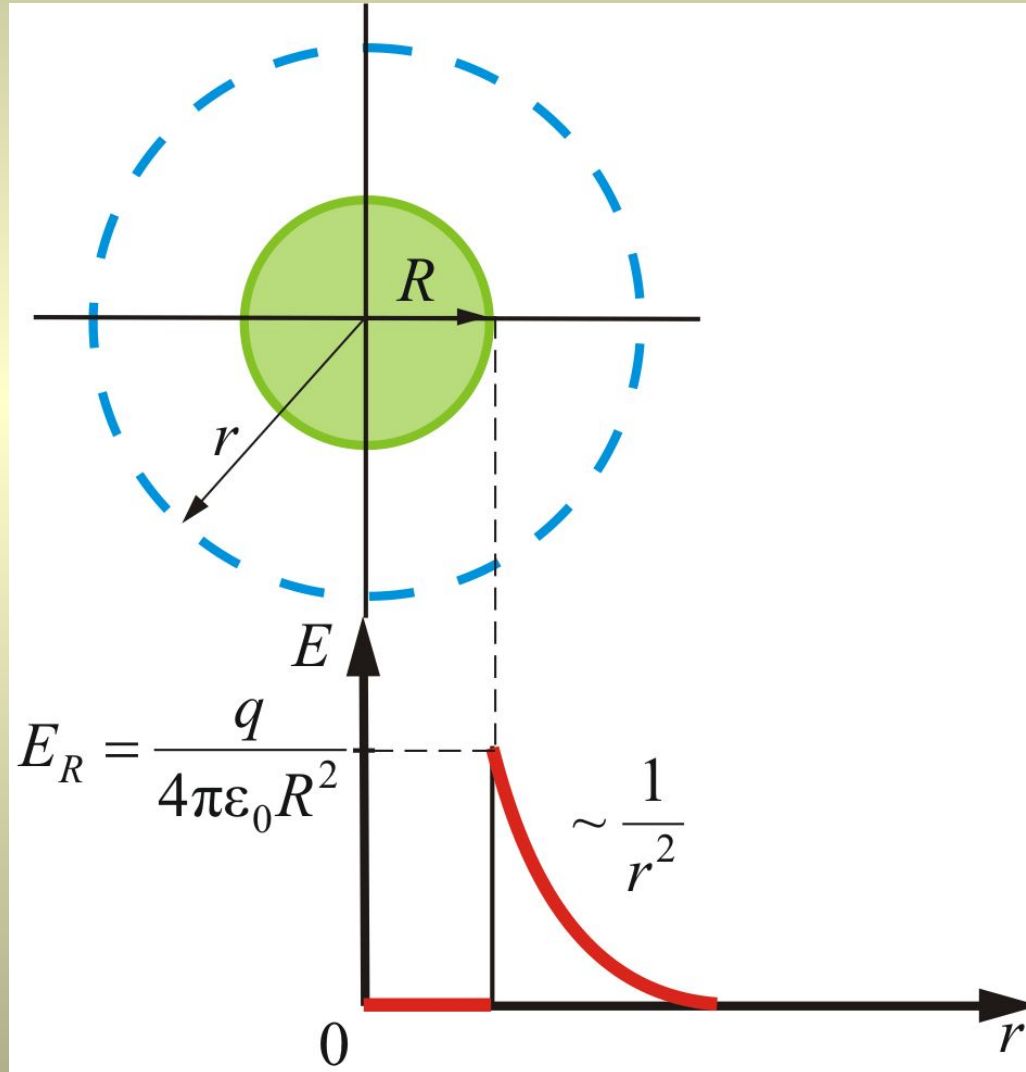
имеем:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{— внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{— между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

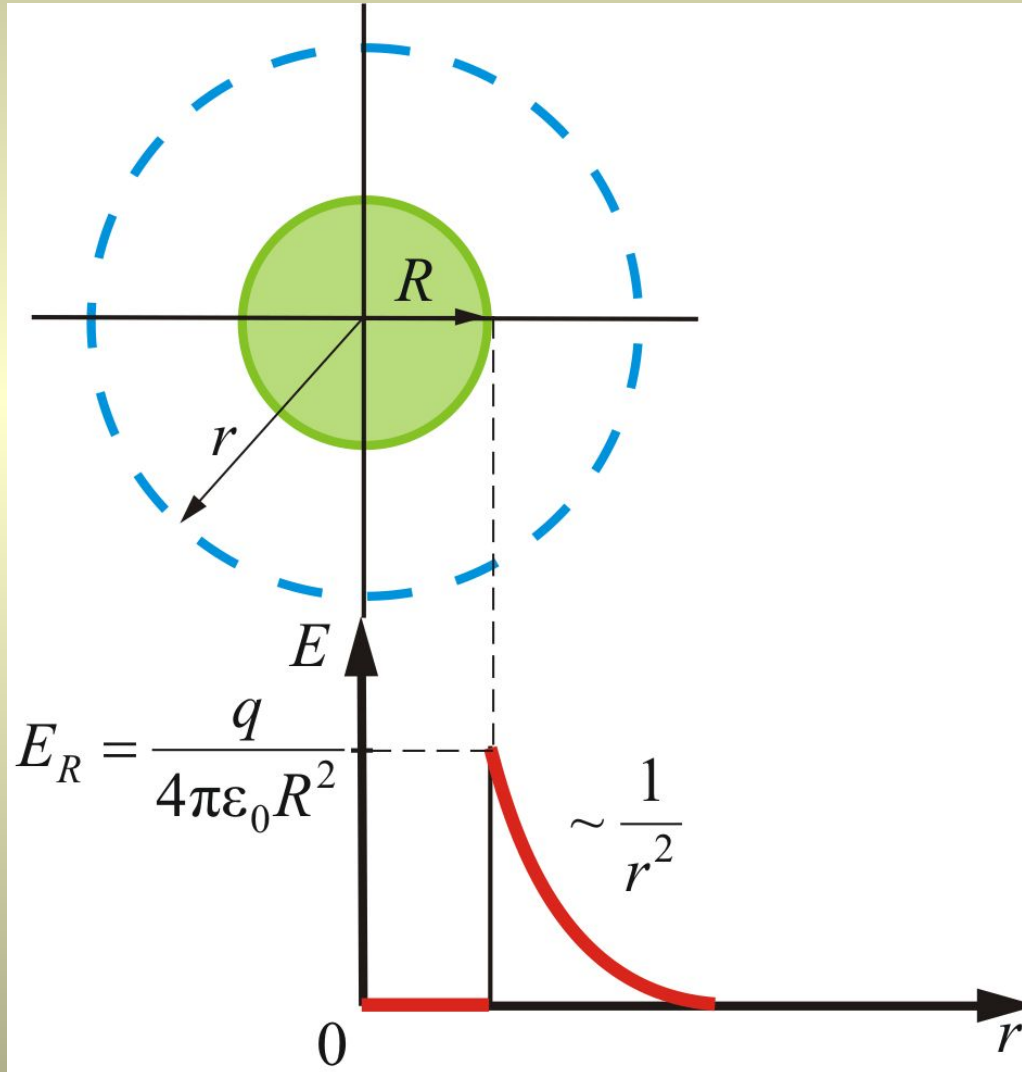


- Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

## 2.5.5. Поле заряженной сферы



- Вообразим вокруг шара – сферу радиуса  $r$  (рис).



- Если  $r \geq R$ , то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд  $q$ , распределенный по сфере, тогда

$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

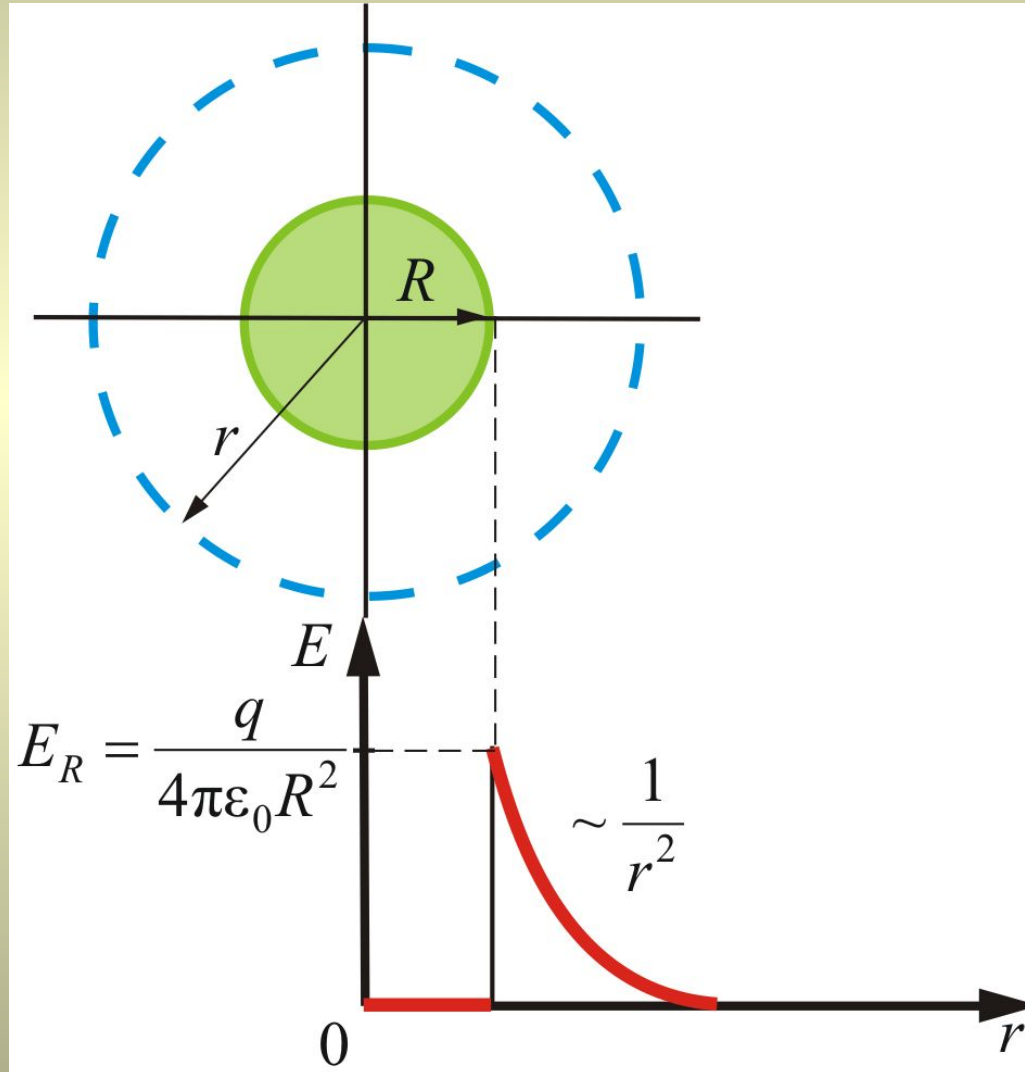
- откуда **поле вне сферы:**

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

- **Внутри сферы**, при  $r < R$ , поле будет равно нулю, т.к. там нет зарядов:

$$E(r) = 0.$$

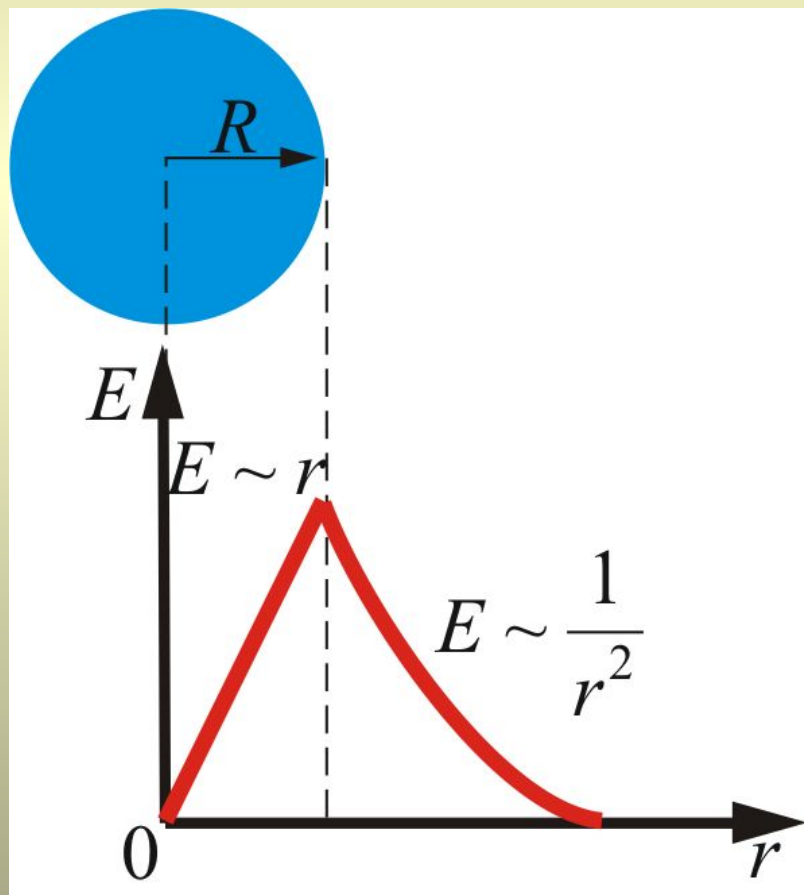
Как видно, **вне сферы** поле тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

## 2.5.6. Поле объемного заряженного шара

- Для поля **вне шара** радиусом  $R$  получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т.е. справедлива формула:



$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- **Внутри шара** при  $r < R$ , сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

- где  $\rho$  – объемная плотность заряда:  $\rho = \frac{q}{V}$   
объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Тогда, по теореме Остроградского-Гаусса:

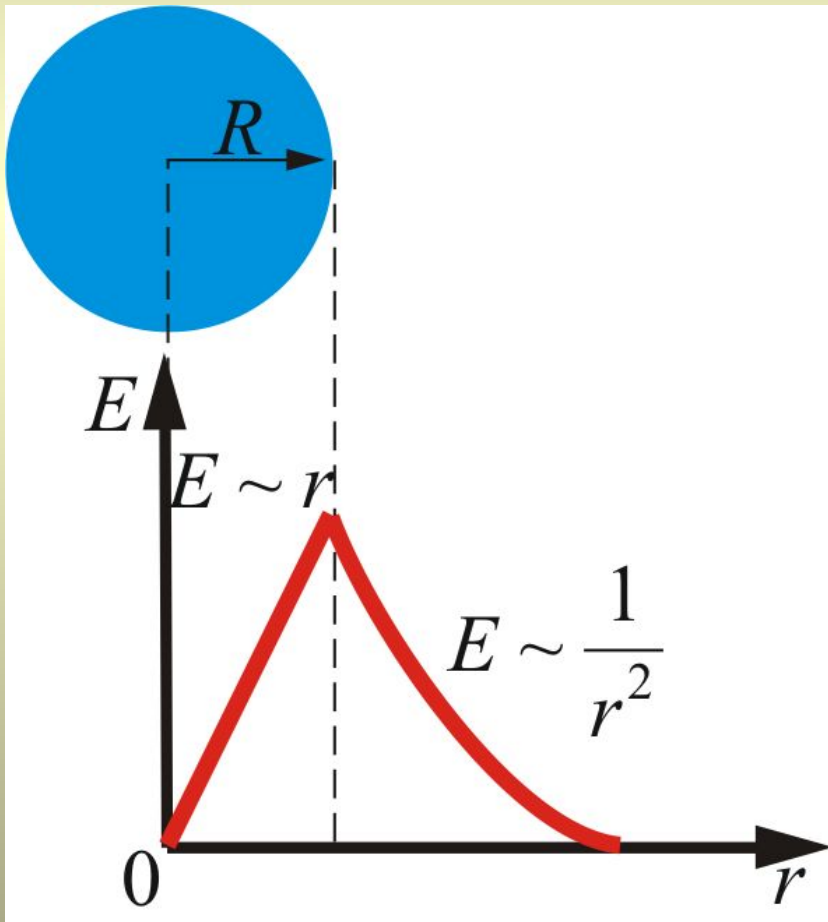
$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Т.е. *внутри шара*

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

- Т.е., *внутри шара* имеем

$$E \sim r.$$

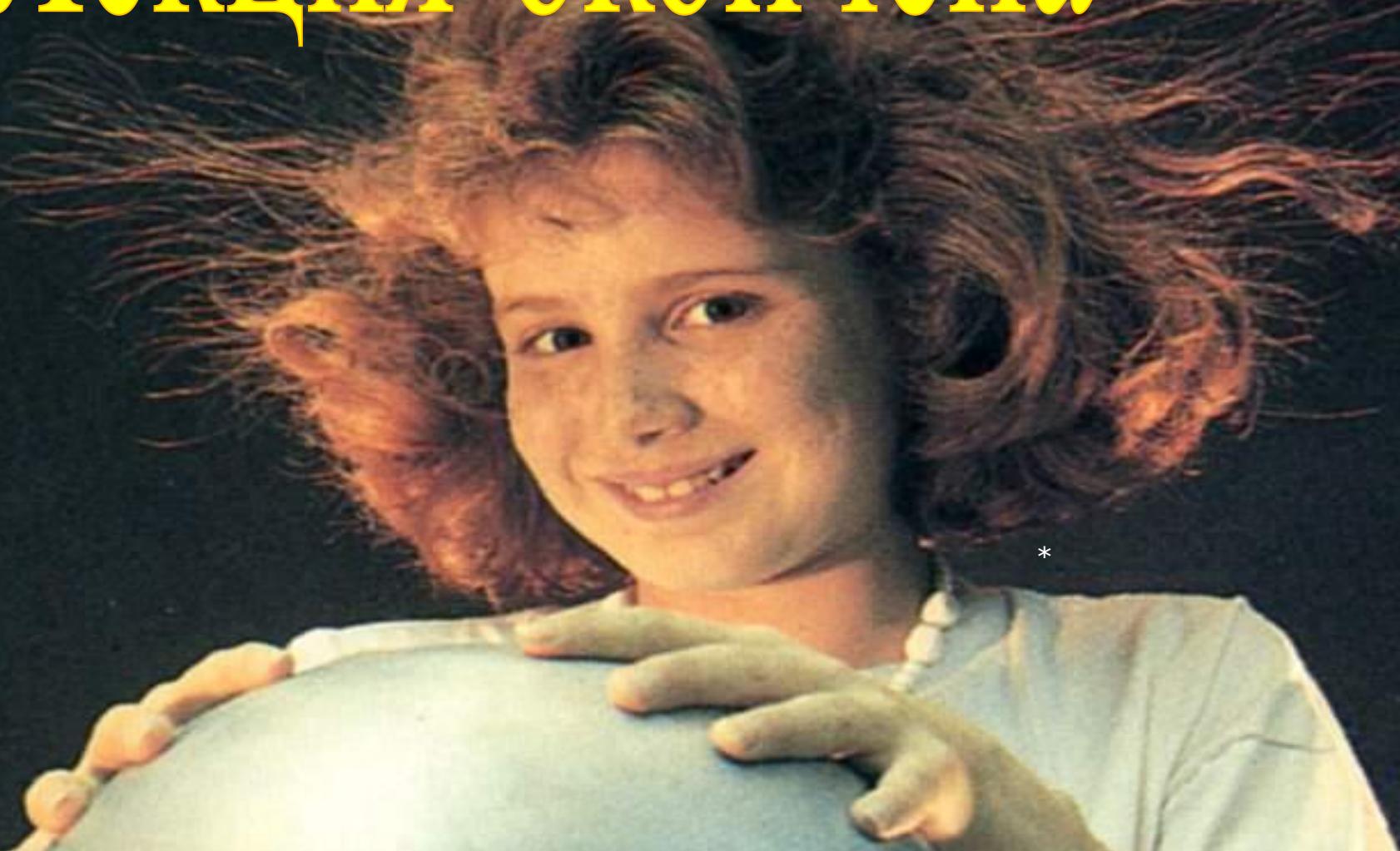




# Таким образом, имеем: поле объемного заряженного шара

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} (r > R) \end{cases}$$

# Лекция окончена



\*