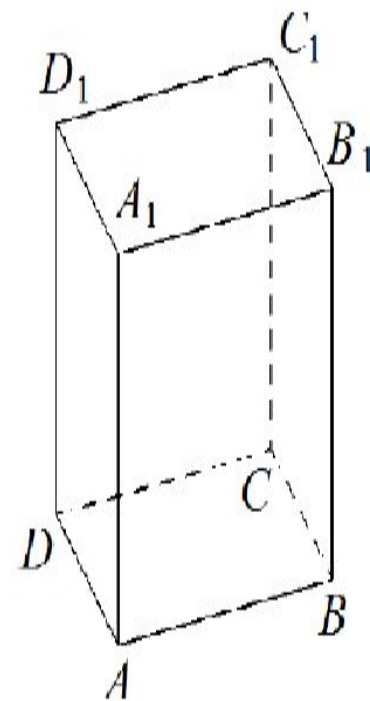


ЕГЭ

Стереометрия
Задание N° 8

Пример 6. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1 .



КОДИФИКАТОР

- Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов);
- Использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы

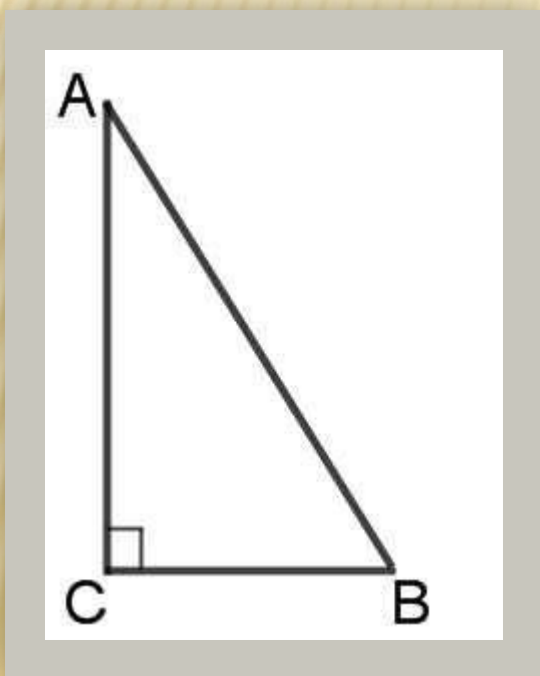
НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- Теорема Пифагора
- Теорема косинусов
- Определение тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике
- Формулы площадей поверхностей и объемов тел
- Отношение площадей подобных фигур
- Отношение объемов подобных тел



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

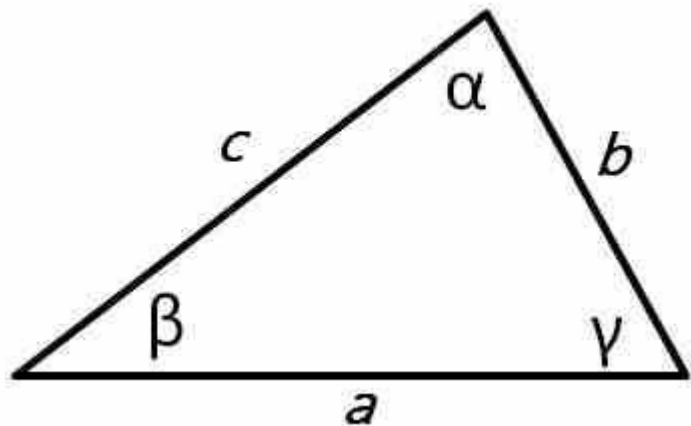


$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

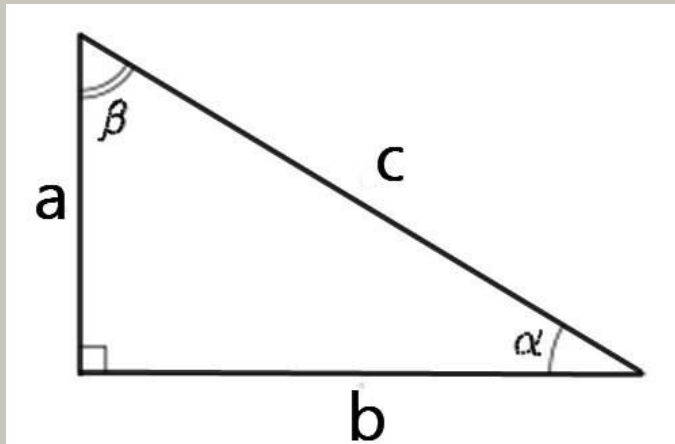


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике - отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике - отношение противолежащего катета к прилежащему:

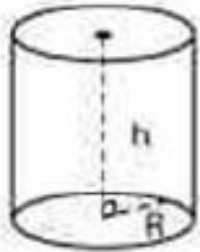
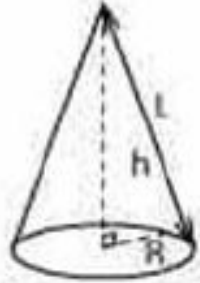
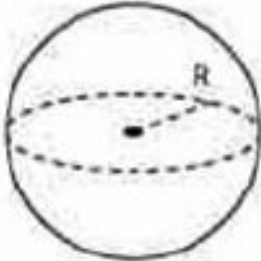
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

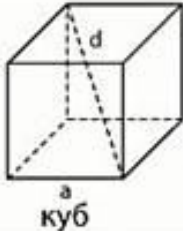
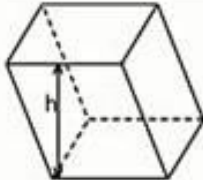
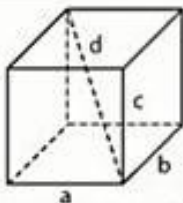
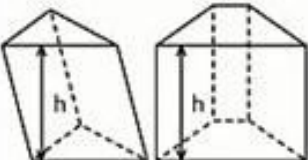
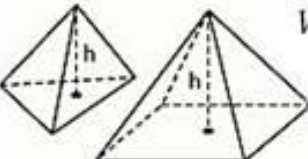
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр $V = \pi R^2 h$ R – радиус основания h – высота	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi R h$
 конус $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi R^2 + \pi R L$ L – образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 $V = a^3$ a – ребро куба куб	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ параллелепипед	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$ $S_{\text{осн}}$ – площадь основания h – высота
 $V = a \cdot b \cdot c$ прямоугольный параллелепипед	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ призма	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$ $S_{\text{осн}}$ – площадь основания h – высота
 $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ пирамида	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$



Отношение площадей подобных фигур

Отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = k^2 \cdot S_1$$

То есть, при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров фигуры в k раз, отношение площади полученной к площади исходной фигуры будет равно k^2 .



Отношение объёмов подобных тел

Отношение объёмов двух подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = k^3 \cdot V_1$$

То есть, при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров тела в k раз, отношение объёма полученного тела к объёму исходного будет равно k^3 .



ПРОТОТИПЫ ЗАДАНИЙ №8

□ Многогранники

Куб

Прямоугольный параллелепипед

Составные многогранники

Призма

Пирамида

□ Тела вращения

Цилиндр

Конус

Сфера и шар

□ Комбинации тел

КУБ

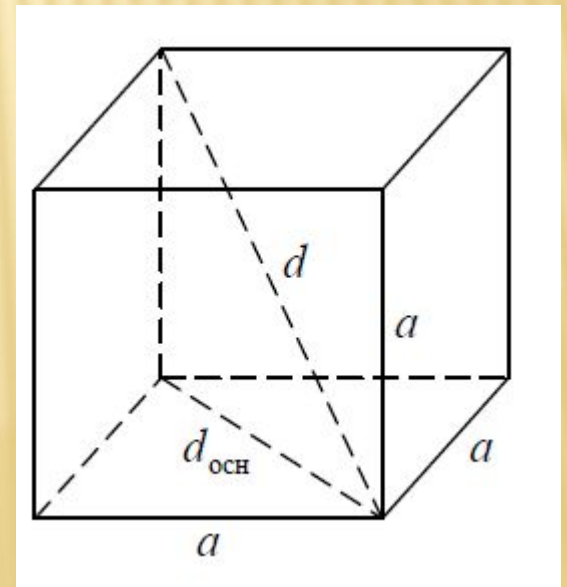
Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частным случаем параллелепипеда и призмы, поэтому для него выполнены все их свойства. Кроме того, если a — длина ребра куба, $d_{\text{осн}}$ — диагональ основания, d — диагональ куба, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, а V — объем куба, то справедливы формулы:

$$d_{\text{осн}} = a\sqrt{2},$$

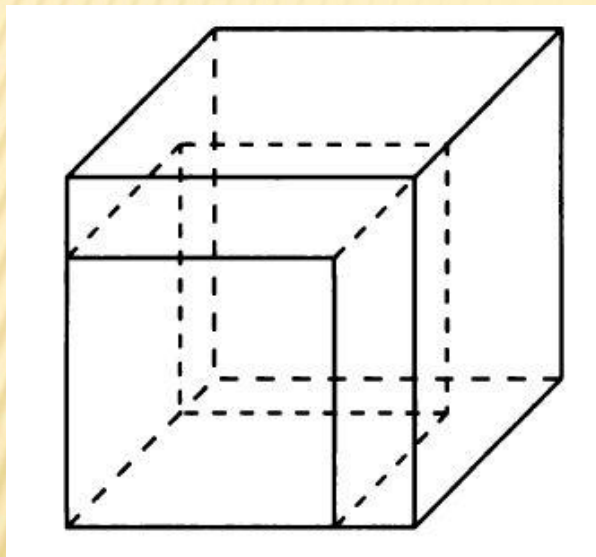
$$d = a\sqrt{3},$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2,$$

$$V = a^3.$$



Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 30. Найдите ребро куба.



Решение.

$$S_1 = 6a^2, S_2 = 6(a+1)^2$$

$$S_2 = S_1 + 30$$

$$6(a+1)^2 = 6a^2 + 30$$

$$6a^2 + 2a + 6 - 6a^2 - 30 = 0$$

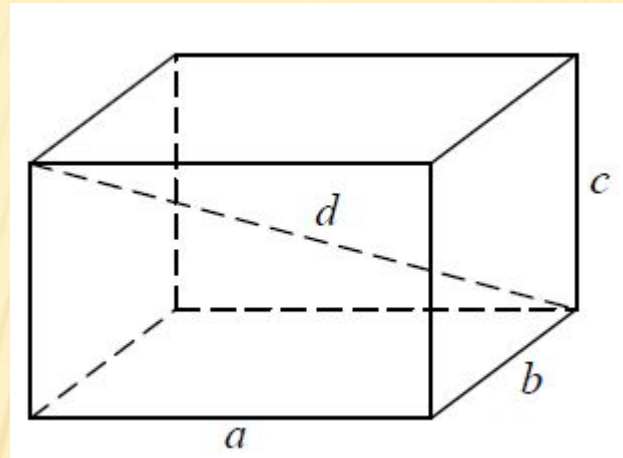
$$2a = 24$$

$$a = 2$$

Ответ: 2.

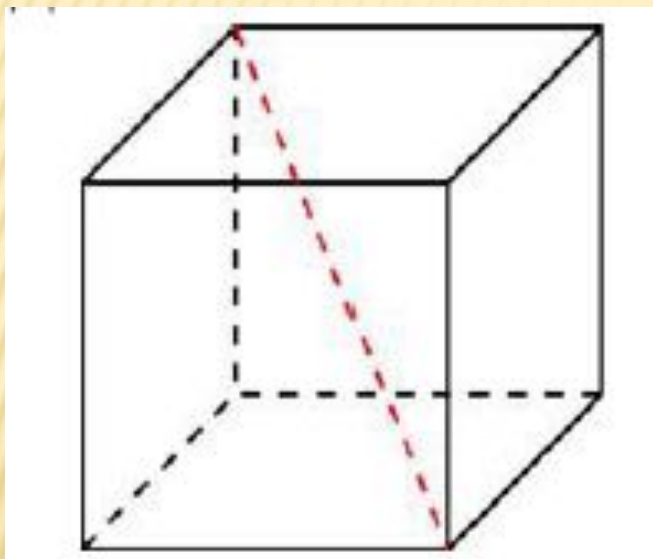


ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



- Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений: $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$.
- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений $V = abc$.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.



Решение

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{20 + a_3^2}$$

$$a_3 = \sqrt{d^2 - 20} = 4$$

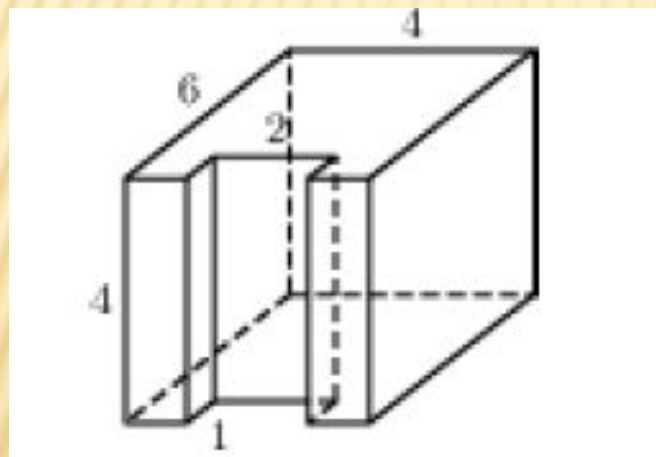
$$V = a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$$

Ответ: 32.



СОСТАВНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

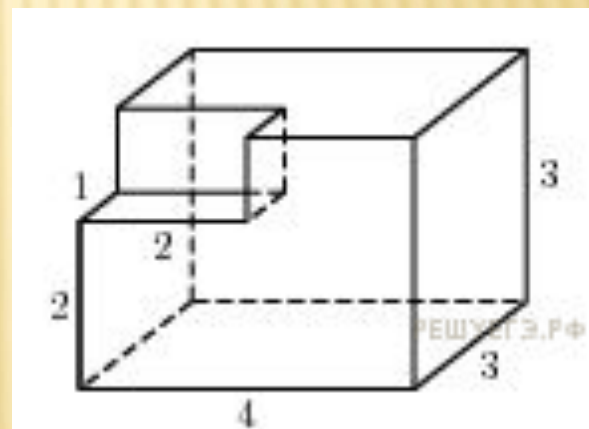
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение

$$(6 \cdot 4 + 5 \cdot 4) \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 4 = 132$$

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



$$V = V_1 - V_2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 34$$



Призма. Призмой (n -угольной призмой) называется многогранник, две грани которого — равные n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы.

Прямой призмой называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

Соотношения для прямой призмы. Пусть H — высота прямой призмы, AA_1 — боковое ребро, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем прямой призмы. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} AA_1,$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

$$V = S_{\text{осн}} H.$$

Особенности правильной шестиугольной призмы. В основании правильной шестиугольной призмы лежит правильный шестиугольник.

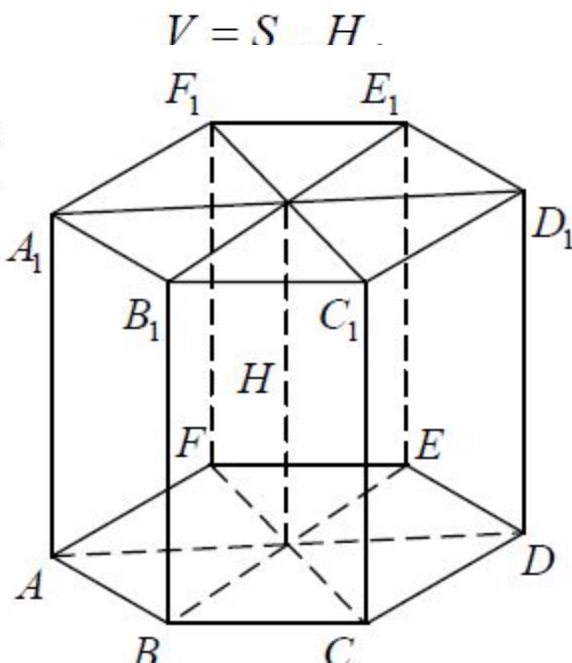
– Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

– Большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

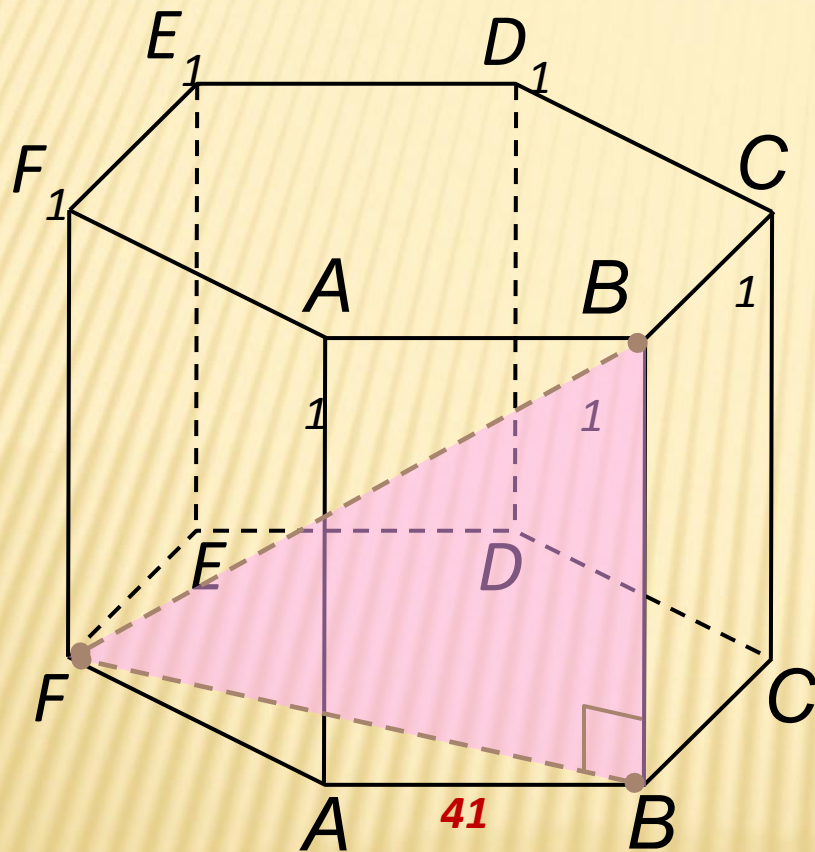
– Меньшая диагональ правильного шестиугольника в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны.

– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120° .

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.



В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 41. Найдите расстояние между точками F и B_1 .



Решение.

Расстояние между точками F и B_1 найдем из $\triangle FBB_1$, в котором известен катет $BB_1 = 41$, а катет FB является меньшей диагональю в правильном шестиугольнике и равен $41\sqrt{3}$. По теореме Пифагора в $\triangle FBB_1$:

$$FB_1^2 = FB^2 + BB_1^2$$

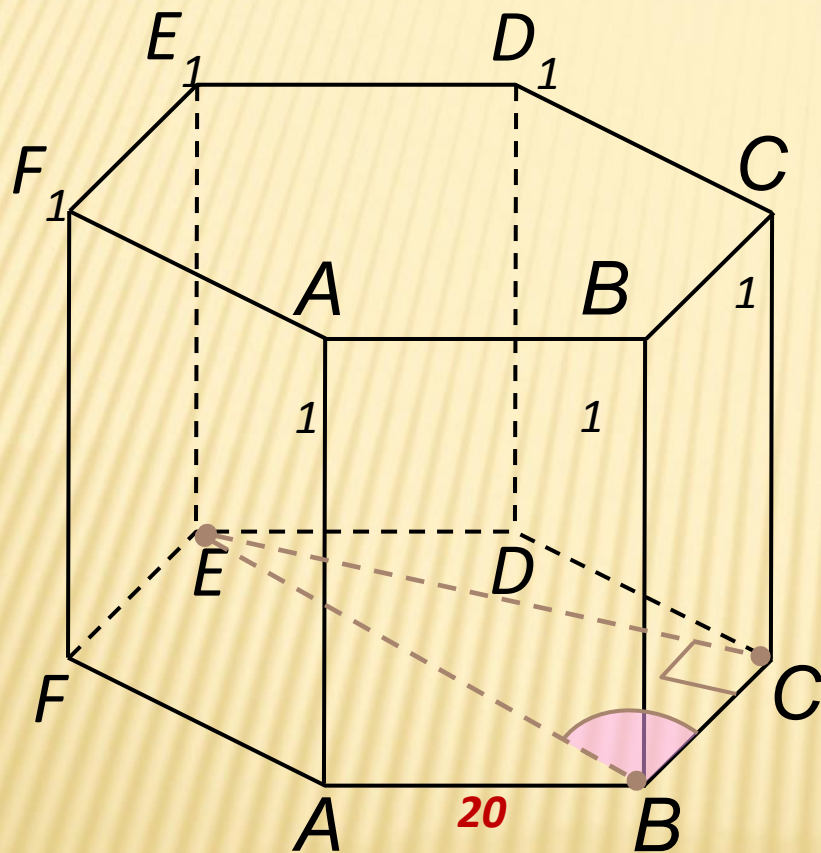
$$FB_1^2 = (41\sqrt{3})^2 + 41^2 =$$

$$= 41^2(3 + 1) = 41^2 \cdot 2^2;$$

$$FB_1 = 41 \cdot 2 = 82.$$

Ответ: 82.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 20. Найдите угол CBE . Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим $\triangle CBE$,
в котором известен катет
 $BC = 20$, а катет BE является большей
диагональю в правильном
шестиугольнике
и равен 40.

$$\cos \angle CBE = BC : BE = 20 : 40 = 0,5$$

$$\angle CBE = 60^\circ$$

Ответ: 60.



ПИРАМИДА

Пирамида. Пусть вне плоскости многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ задана точка P . Тогда фигура, образованная треугольниками A_1PA_2 , A_2PA_3 , ..., A_nPA_1 и многоугольником $A_1A_2 \dots A_n$ вместе с их внутренними областями называется *пирамидой* (*n-угольной пирамидой*).

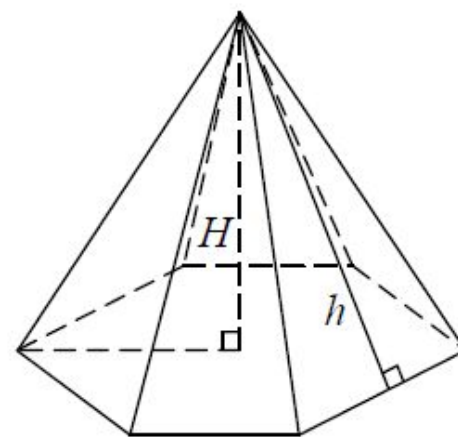
Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.

Соотношения для правильной пирамиды. Пусть H — высота правильной пирамиды, h — ее апофема, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем правильной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

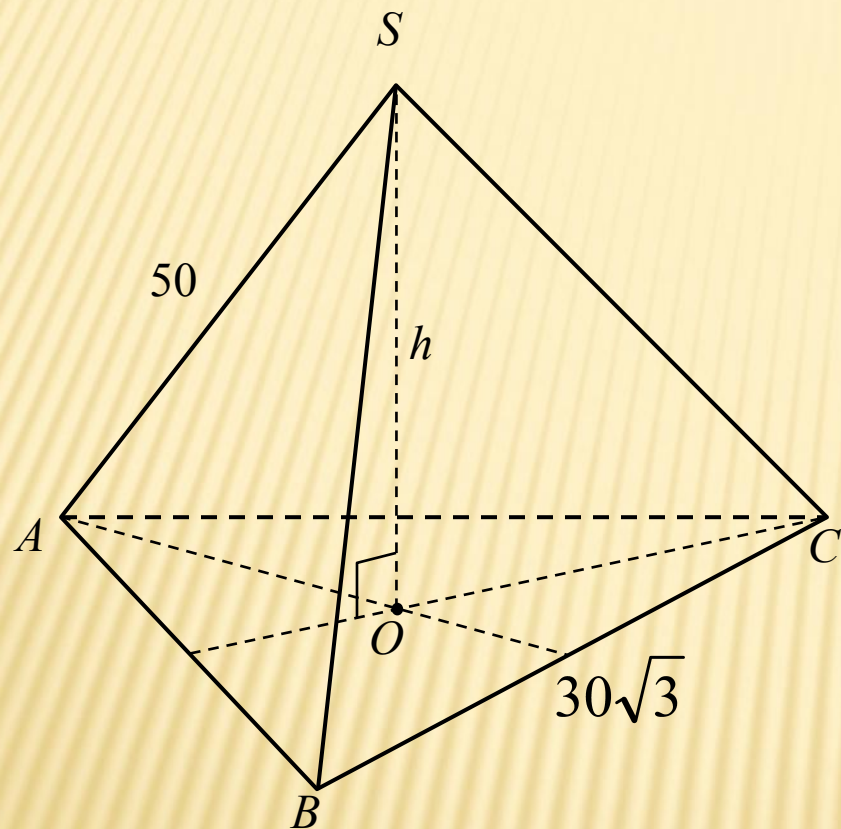
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h,$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$



В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 50, а сторона основания равна $30\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.



Решение

*Основание пирамиды –
равносторонний $\triangle ABC$, в котором*

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$$

В $\triangle ASO$ по т. Пифагора

$$SO^2 = SA^2 - AO^2$$

$$SO^2 = 50^2 - 30^2 = 40^2$$

$$SO = 40.$$

Ответ: 40.

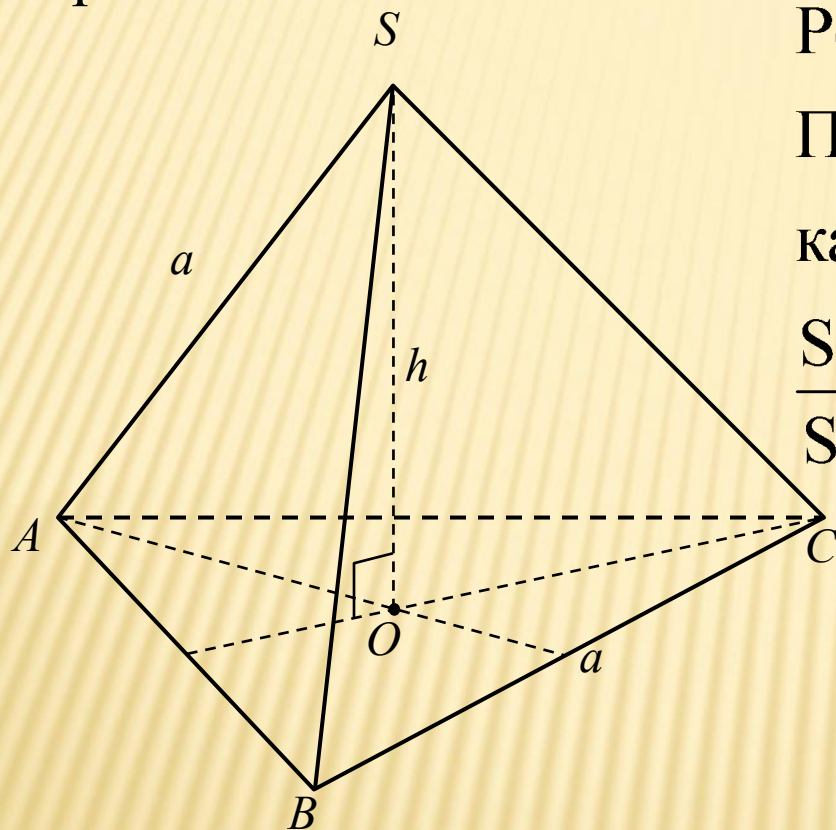


Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в десять раз?

Решение

Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия

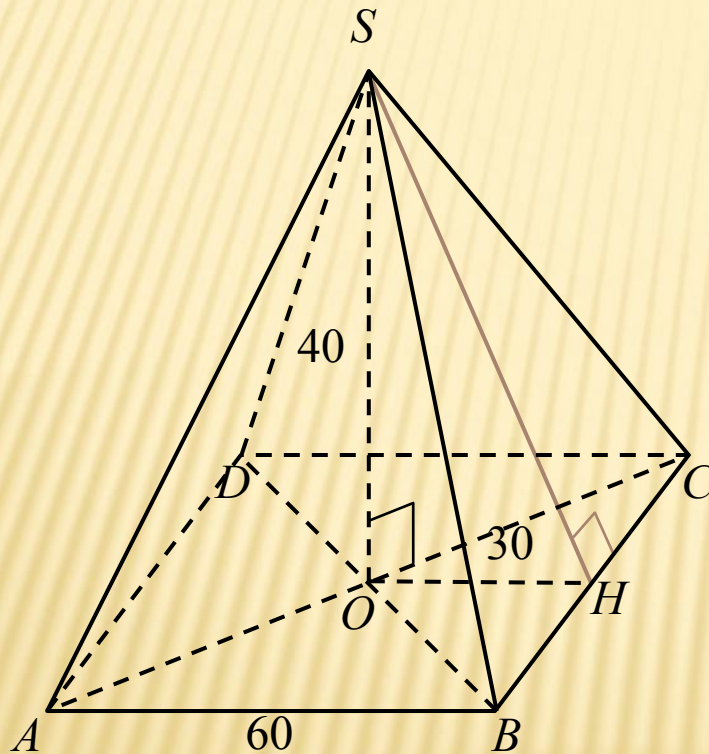
$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 10^2 = 100.$$



Ответ: 100.



Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 60 и высота равна 40. **Решение.**



Ответ: 4200.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники. SH – высота и медиана одного из них.

В $\triangle SOH$ по т. Пифагора

$$SH^2 = SO^2 + OH^2, \quad OH = \frac{1}{2} AB = 30$$

$$SH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2; \quad SH = 50$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot SH$$

$$P_{\text{осн.}} = 4AB = 4 \cdot 60 = 240$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 50 = 600$$

$$S_{\text{осн.}} = AB^2 = 60^2 = 3600$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = 600 + 3600 = 4200.$$

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.

Решение.

$\triangle ASD$ – p/c , т.к. $\angle SAH = \angle SDH = 60^\circ$
(как линейные углы двугранных углов при сторонах основания AB и CD)

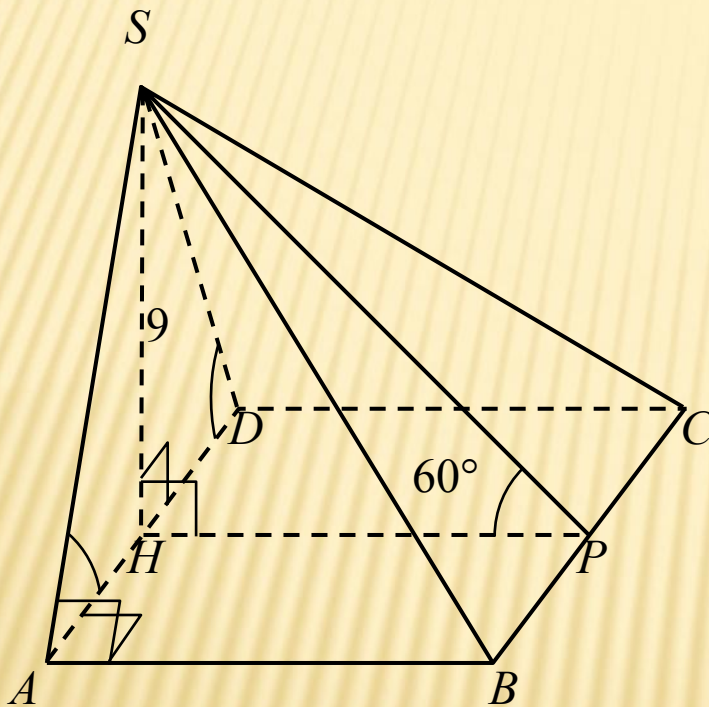
$$\text{В н/у } \triangle SHP \quad HP = \frac{SH}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$AD = \frac{2SH}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

(как сторона p/c $\triangle ASD$)

$$S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD = HP \cdot AD = 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54$$

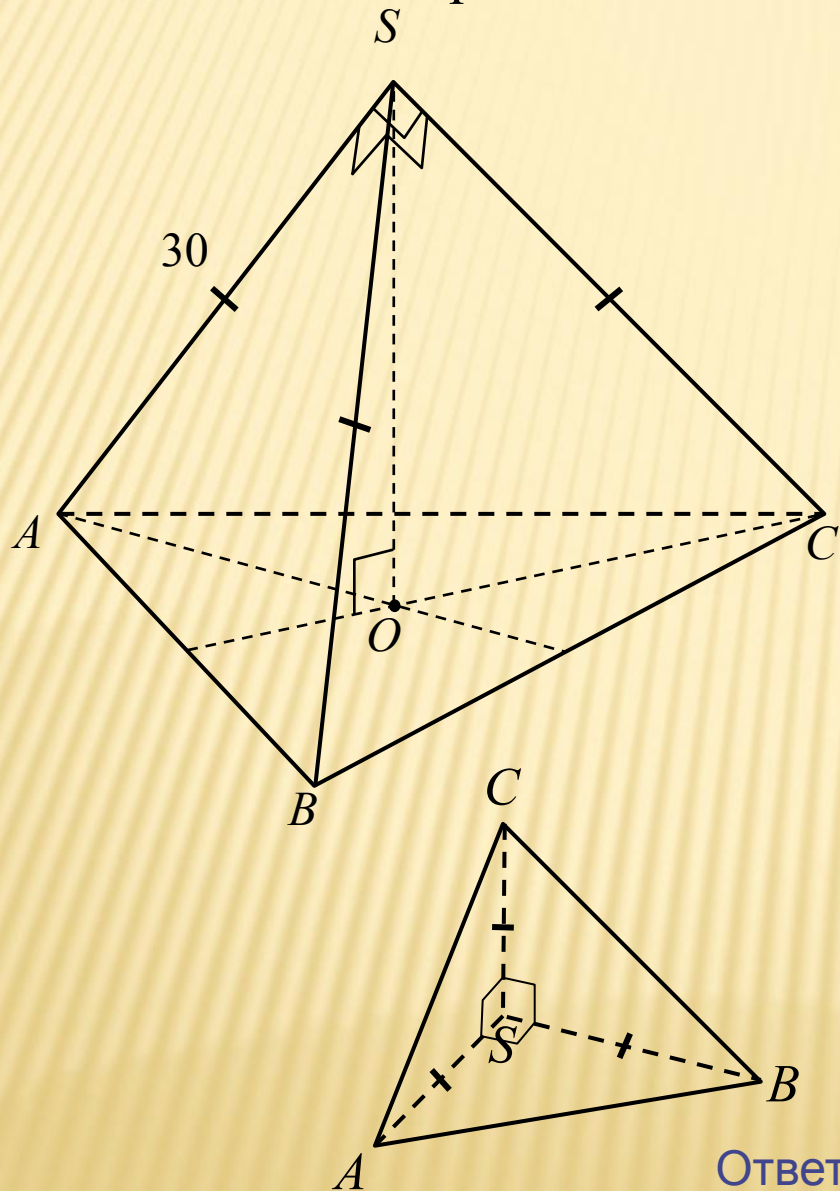
$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 9 = 162.$$



Ответ: 162.



Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 30. Найдите объём пирамиды.



Решение.

Повернем пирамиду на одну из боковых граней так, что боковое ребро станет высотой пирамиды

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$

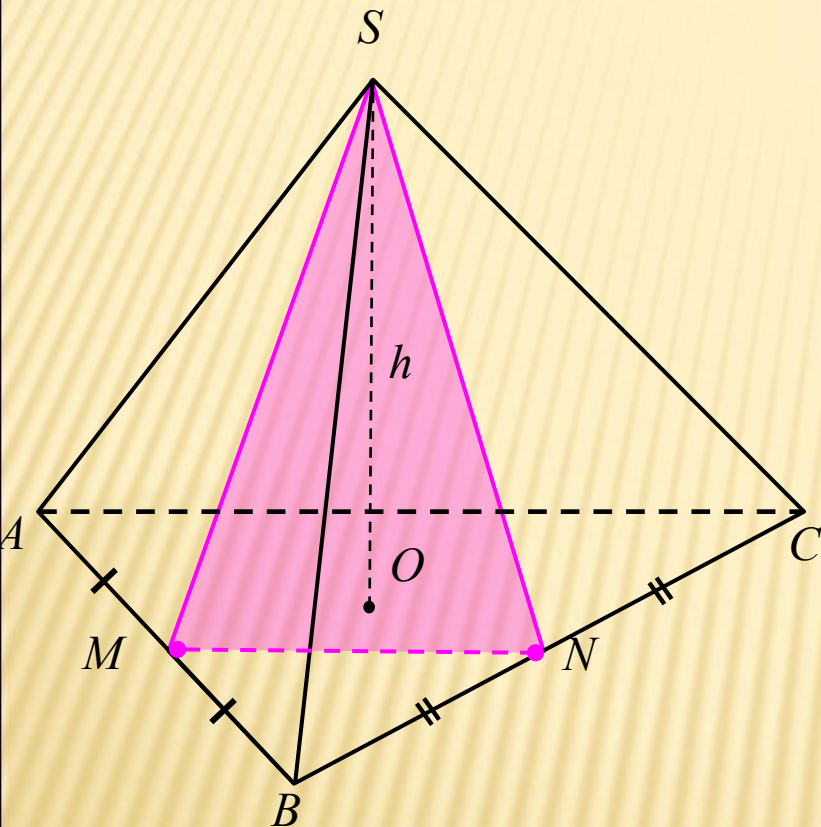
$$B \quad \Delta SAB$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} SB \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450$$

$$V_{\text{пир.2}} = \frac{1}{3} \cdot 450 \cdot 30 = 4500.$$

Ответ: 4500.

От треугольной пирамиды, объём которой равен 120, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



Решение.

$S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ (из отношения площадей подобных треугольников)
 SO - общая высота обеих пирамид

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = 120$$

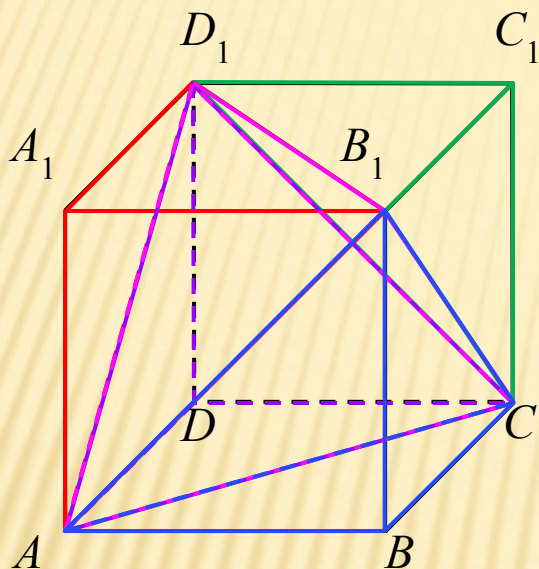
$$V_{SBMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle BMN} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot h$$

$$V_{SBMN} = \frac{1}{4} V_{SABC} = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30.$$

Ответ: 30.

Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4500. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.

Решение (см. анимацию)



Чтобы получить искомую пирамиду, отделим от параллелепипеда четыре одинаковые пирамиды, как на рисунке. Объём каждой такой пирамиды равен

$$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}}$$

$$V_{\text{пар-да}} = S_{ABCD} \cdot h = 4500$$

$$V_{AD_1 CB_1} = V_{\text{пар-да}} - 4V_{ABCB_1} = V_{\text{пар-да}} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}}$$

$$V_{AD_1 CB_1} = \left(1 - \frac{4}{6}\right) V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{3} V_{\text{пар-да}}$$

$$V_{AD_1 CB_1} = \frac{1}{3} \cdot 4500 = 1500.$$

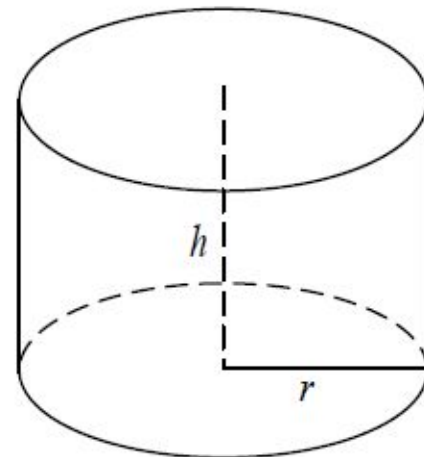
Ответ: 1500.



Цилиндр. Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Соотношения для цилиндра. Пусть h — высота цилиндра, r — радиус основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем цилиндра. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = S_{\text{осн}} h = \pi r^2 h.$$



Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

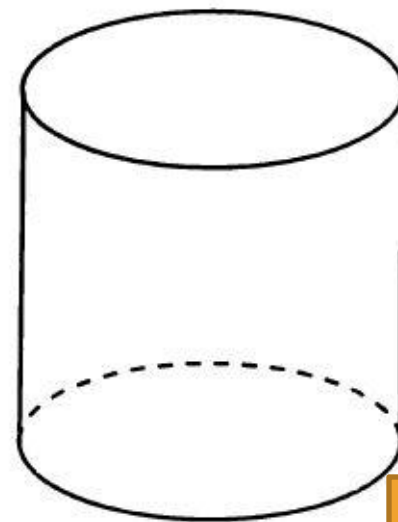
Решение

Обозначим площадь и высоту второй кружки за S_2 и V_2 . Тогда объем первой кружки

$$V_1 = S_1 H_1 = \pi R_1^2 H_1 = \pi \left(\frac{2}{3} R_2 \right)^2 2H_2 = \frac{8}{9} V_2$$

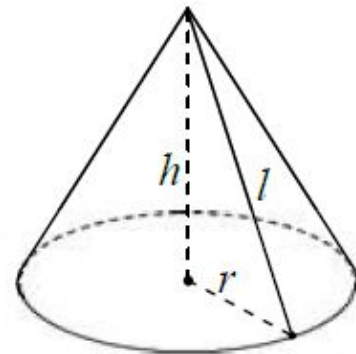
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{8} = 1,125$$

Ответ 1,125



Конус. Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

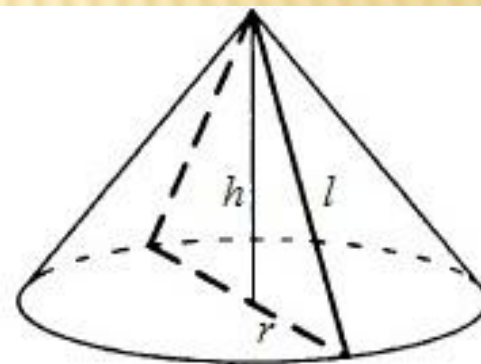
Соотношения для конуса. Пусть h — высота конуса, r — радиус основания, l — образующая, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем конуса. Тогда имеют место следующие соотношения:



$$h^2 + r^2 = l^2, \quad S_{\text{бок}} = \pi r l, \quad S_{\text{полн}} = \pi r^2 + \pi r l, \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Диаметр основания конуса равен 14, а длина образующей - 25. Найдите площадь осевого сечения

Решение: Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, основание которого - диаметр D основания конуса, а высота h совпадает с высотой конуса. По условию образующая конуса $l = 25$, радиус основания $r = D / 2 = 14 / 2 = 7$. Тогда:

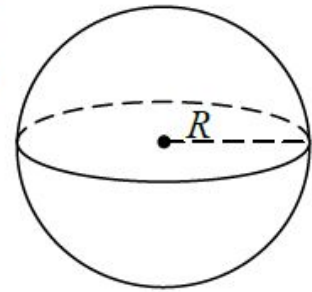


$$\begin{aligned} h^2 + r^2 &= l^2 \\ h &= \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \\ S_{\text{осев.сеч.}} &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 7 \cdot 24 = 168 \end{aligned}$$

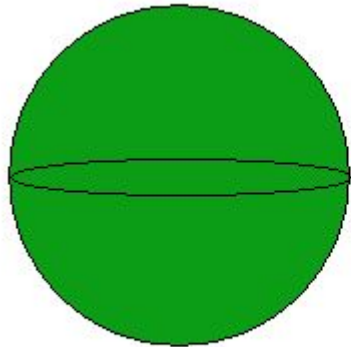
Сфера и шар. *Шаром* называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. *Сферой* называется поверхность шара. Пусть R — радиус шара, S — площадь сферы, V — объем шара. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S = 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

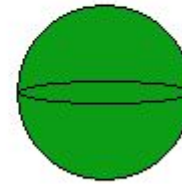
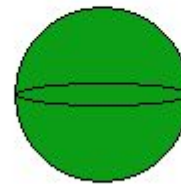
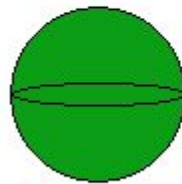


ПРОБЛЕМНАЯ ЗАДАЧА: При уличной торговле арбузами весы отсутствовали. Однако, выход был найден: арбуз радиусом 3 дм приравнивали по стоимости к трём арбузам радиусом 1 дм. Что вы возьмете? Правы ли были продавцы?



R=3 дм

=



R=1 дм

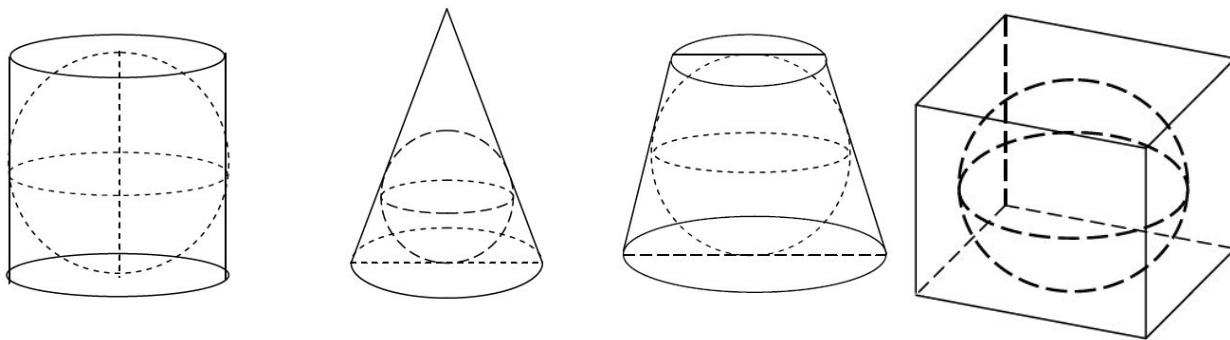
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 36\pi$$

$$3V = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 4\pi$$

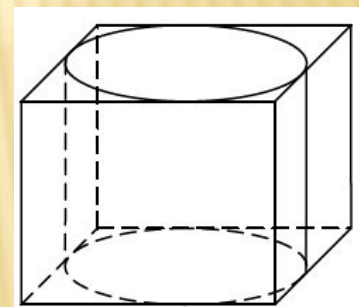


КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

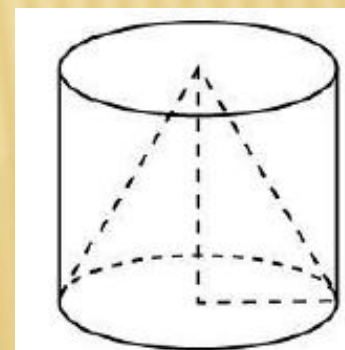
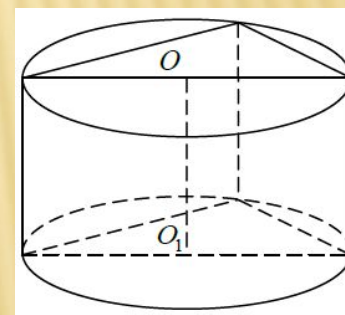
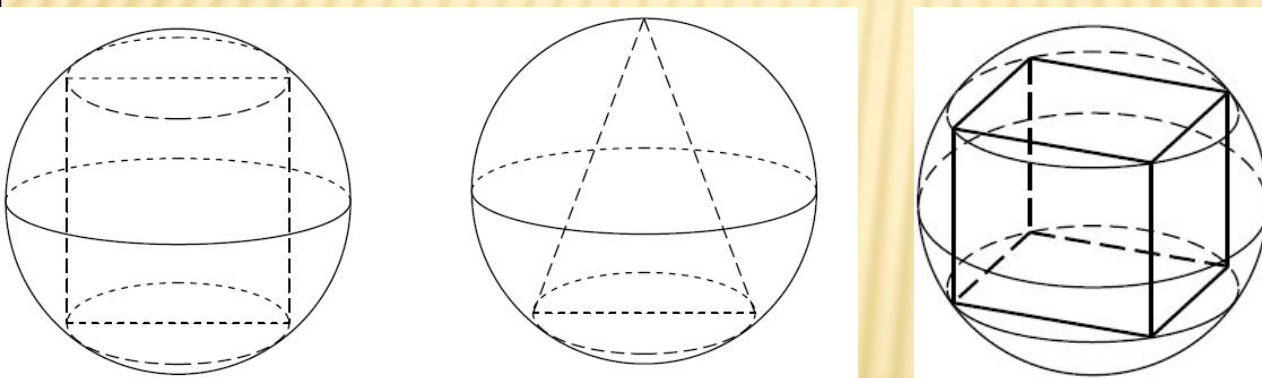
Вписанные сферы



Комбинации конуса, цилиндра и многогранников



Описанные сферы



Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 18. Найдите площадь поверхности шара

Решение.

Радиусы шара и основания цилиндра равны.

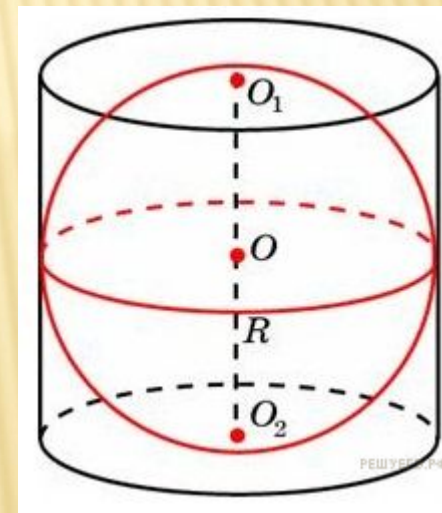
Площадь поверхности цилиндра, с радиусом основания r и высотой $2r$ равна

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$$

Площадь поверхности шара радиуса r равна $S = 4\pi r^2$,

то есть в 1,5 раза меньше площади поверхности цилиндра.

Следовательно, площадь поверхности шара равна 12.



Ответ: 12.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!