

The background features a dynamic, abstract design with flowing, translucent green and light green shapes that create a sense of movement and depth. The colors transition from a vibrant green on the left to a pale, almost white green on the right.

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Підготували учні 9 класу
ЗШ І-ІІІ ст. с. Червоне

МЕТА:

Детальніше вивчити геометричну прогресією, вивчити її історією та розглянути практичне застосування.

ЗАВДАННЯ:

1. Зібрати історичний та практичний матеріал.
2. Підібрати та розв'язати задачі практичного спрямування.
3. Підготувати презентацію.
4. Захистити проект.

Геометрична прогресія

Геометрична прогресія — числова послідовність b_1, b_2, b_3, \dots , в якій кожне наступне число, починаючи з другого, може бути отримано з попереднього множенням його на певне число q (*знаменник прогресії*), где $b_1 \neq 0, q \neq 0$.

n - ий член геометричної прогресії

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Знаменник геометричної прогресії

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Формули суми геометричної прогресії

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}$$

Властивості геометричної прогресії

$$b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$$

Цікаві факти

Геометрична прогресія в токарному цеху.

У 1876 р. академік А.В. Гадолін на підставі точних математичних розрахунків довів, що верстати слід будувати зі ступенями швидкостей, які утворюють геометричну прогресію.

Хімія

При підвищенні температури за арифметичною прогресією швидкість хімічних реакцій зростає за геометричною прогресією

Вавилонські тексти про місяць

Збільшення освітленої частини диска протягом перших п'яти днів відбувається за законом геометричної прогресії зі знаменником 2, у наступні 10 днів – за законом арифметичної прогресії з різницею 16

В архітектурі

В архітектурі, будівельній справі використовуються колони. Вони мають форму не циліндра, а зрізаного конуса. Сила тиску в горизонтальних шарах колони зростає у напрямку до нижньої основи. Для збереження рівномірності від тиску довжини колони потрібно збільшувати площі її поперечних перерізів. Площі поперечних перерізів, рівновіддалених один від одного, становлять геометричну прогресію. Геометрична прогресія в будівельній справі.

Застосування геометричної прогресії машинобудуванні.

Виявляється, геометрична прогресія відіграє велику роль у машинобудуванні. За законом геометричної прогресії побудовано розмірність металорізальних верстатів та інструментів, встановлено нормальні діаметри і довжини в машинобудуванні. Тому геометрична прогресія становить математичну основу стандартизації різноманітної промислової продукції.

Кролики розмножуються в геометричній прогресії

Історичні відомос

У Стародавній Греції в часи Евкліда і Архімеда (III ст. до н. е.) властивості прогресій розглядались у зв'язку з теоретичними дослідженнями. Так, у книзі Евкліда “Начала” подається формула суми трьох членів геометричної прогресії.



У нас задачі на прогресії вперше зустрічаються в одній з найдавніших пам'яток руського права, в “Руській правді”, складеній при Ярославі Мудрому в XI столітті. Там є стаття, присвячена обчисленню приплоду від 22 овець за 12 років, при умові, що кожна вівця щорічно приносить одну овечку і одного барана.

Зустрічаються прогресії і в російських математичних рукописах XV – XVII століть. Ось одна з таких задач: “Було 40 міст, а в кожному місті по 40 вулиць, а на кожній вулиці по 40 домів, а в кожному домі по 40 стовпів, а на кожному стовпі по 40 кілець, а біля кожного кільця по 40 коней, а біля кожного коня по 40 чоловік, а в кожного чоловіка по 40 батогів. Чи багато їх всього було?”



Історичні задачі

Задача із папірусу Рінда

“Є 7 будинків, в кожному будинку по 7 котів, кожен кіт з’їдає 7 мишей, кожна миша з’їдає по 7 колосків ячменю, кожен колосок, якщо посіяти зерно з нього, дає 7 мір ячменю. Знайти суму загального числа будинків, котів, мишей, колосків і мір”.

Розв’язок:

$$b_1 = 7$$

$$q = 7$$

$$\text{Людей} - b_1 = 7$$

$$\text{Котів} - b_2 = b_1 \cdot q = 7 \cdot 7 = 49$$

$$\text{Мишей} - b_3 = b_2 \cdot q = 7 \cdot 49 = 343$$

$$\text{Колосків} - b_4 = b_3 \cdot q = 7 \cdot 343 = 2401$$

$$\text{Мір ячменю} - b_5 = b_4 \cdot q = 7 \cdot 2401 = 16807$$

$$S_5 = \frac{b_1 (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = 19607$$

Ця стародавня задача на геометричну прогресію не раз зустрічається в різних народів з дещо зміненим текстом. Зустрічається вона і серед древньоруських народних задач.

“ Іде 7 баб; у кожної баби по 7 палиць; на кожній палиці по 7 сучків; на кожному сучку по 7 кошиків; у кожному кошику по 7 горобців, у кожного горобці по 7 зерин .

Скільки всього предметів?”



Історичні задачі

Неабиякою популярністю користується задача-легенда, яка належить до початку нашої ери.

Індійський мудрець, який придумав гру в шахи, попросив за свій винахід у раджі, на перший погляд, скромну винагороду: за першу клітинку шахової дошки 1 пшеничне зернятко, за другу – 2, за третю – 4 і т. д. – за кожну наступну клітинку вдвічі більше, ніж за попередню.

Дана послідовність є геометричною

$$b_1 = 1, \quad q = 2, \quad n = 64.$$

$$S_{64} - ?$$

Складемо послідовність чисел

$$1, 2, 4, 8, 16 \dots$$

$$S_{64} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

Загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює $S_{64} = 2^{64} - 1$

Багатий раджа був приголомшений, коли дізнався, що він не в змозі задовольнити це “скромне” бажання. Для того, щоб зрозуміти, наскільки величезним є це число, уявимо, що зерно зберігають у коморі площею 12 га. Її висота була б більшою за відстань від Землі до Сонця.



Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 1

На уроці біології учні помістили в банку одну бактерію, яка розмножувалась так швидко, що за секунду з однієї бактерії ставало дві. За 60 секунд наповнилась уся банка.

1. У скільки разів збільшується кількість бактерій за 1 с.?
2. Скільки бактерій стало в банці за 3 с.?
3. За скільки секунд цими бактеріями наповнилось пів банки?

Розв'язок:

1). $q = 2$

2). $b_1 = 2$

$q = 2$

$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

- 3). Так, як кількість бактерій щосекунди подвоюється, то пів банки бактерій буде через 59 с.



Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 2

Один мешканець маленького села відомий своєю скнарістю, повертаючись до дому з міста, що знаходилось на відстані 25 км шукав сусідів, які б підвезли його за «спасибі» до дому. Не знайшовши односельців він був змушений звернутися до таксистів. Один просив 200 грн, другий 250 грн а третій 150 грн. Усі ціни здались йому занадто високими. Нарешті він помітив таксиста з стареньким «Запорожцем». Коли скнара запитав його, скільки він візьме за дорогу, той подивився на землю, почухав потилицю і відповів: «За перший кілометр заплатите мені 1 к а за кожен наступний км в 2 рази більше. «Згоден!» - вигукнув скнара і вони поїхали. Скільки грошей він заплатить за дорогу?

Розв'язок:

$$b_1 = 1$$

$$a = 2$$

$$S_{25} = \frac{b_1 (q^{25} - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{25} - 1)}{2 - 1} = 2^{25} - 1 = 33554431 \text{ коп} = 335544,31 \text{ грн.}$$

Відповідь: 335544,31 грн.



Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 3

Селянин продавав 20 овець за 200 грн. Коли один із покупців став надто довго торгуватися, селянин запропонував : „Дай за першу вівцю 1 к., за другу – 2 к., за третю – 4 к., за кожну наступну – вдвічі більше копійок, ніж за попередню.”

Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?

Розв'язок:

$$b_1 = 1$$

$$q = 2$$

$$S_{20} = \frac{b_1 (q^{20} - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1 = 1048576 \text{ (к)}$$

Відповідь: 10485,76 грн. В 52 рази більше



Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 4

Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на 2 тижні на таких умовах: «За це я тобі першого дня заплачу 1 грн., другого – 2 грн., третього 3 грн., збільшуючи щоденну плату на 1 грн. Ти ж будеш давати мені милостиню: Першого дня – 1 коп., другого дня – 2 коп., третього – 4 коп., і т.д. збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю погодився, вважаючи, що умови вигідні для нього. Скільки грошей отримав багатій?

Розв'язок:

Сума, яку має сплатити бідняк за 14 днів, складає арифметичну прогресію, в якій

$$a_1 = 1$$

$$d = 1$$

$$S_{14} = 105 \text{ грн}$$

а багатій сплачує суму, яка складає суму геометричної прогресії, в якій

$$a_1 = 1$$

$$q = 2$$

$$S_{14} = 2^{14} - 1 = 16383 \text{ к} = 163 \text{ грн. } 83 \text{ к.}$$

Отже, багатій, отримавши від бідняка 105 грн., заплатив йому 163 грн.83 коп., тобто, за те, що бідняк у нього проживав 2 неділі, багатій заплатив йому 58 крб.83 коп. (вернувши при цьому і ті гроші, які одержав від бідняка).

Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 5

Катруся вишиває на полотні карту України. Вона працює так, що зашита площа щодня подвоюється в розмірі. Через два тижні роботу було закінчено. На який день дівчинка вишила половину площі?

Відповідь. На 13-й день.



Задача 6

На головній вулиці мальовничого містечка Горішні Плавні є п'ять перехресть. Міською радою було прийнято рішення влаштувати на кожному з них круглі сквери. На першому – діаметром 8 м, а на кожному наступному збільшувати діаметр у 1,2 раза. Побудуйте математичну модель, яка пов'язує номер перехрестя на площу скверу. Знайдіть площу всіх п'яти скверів.

Відповідь. $b_1=16\pi$, $q=1,44$, $b_n=16\pi \cdot 1,44^{n-1}$, $S_n=400\pi(1,44^n-1)/11$,
 $S_5=400\pi(1,44^5-1)/11 \approx 593,1 \text{ м}^2$.

Задачі на застосування геометричної прогресії

Задача 7

Для погашення кредиту фермер уклав угоду з банком, відповідно до якої він виплатить суму кредиту і відсотки за користування грошима через 5 років за схемою: в кінці першого року він поверне 20 000 грн., а кожного наступного року буде сплачувати в 1,2 раза більше, ніж попереднього. Якою була відсоткова ставка кредитування, якщо відомо, що всього фермер брав у борг 120 000 грн.?

Відповідь. 4,4%.

Задача 8

Для заміни всіх ламп у будинку на енергозберігаючі Роман вирішив накопичити грошей, відкладаючи решту після щоденних закупів. Першого разу він відклав для цього 30 грн., наступного – 0,9 цієї суми і т.д. Скільки разів йому потрібно відкладати кошти за такою схемою, якщо необхідна сума – 300 грн.

Відповідь. Нескінченно довго, адже сума нескінченної спадної геометричної прогресії з $b_1=30$, $q=0,9$ дорівнює 300 грн.

Висновок

Ми дізналися багато цікавого про геометричну прогресію. Цікавими та повчальними виявились історичні задачі. Знання які були отримані під час роботи над проектом стануть у нагоді у багатьох життєвих ситуаціях. Ми показали практичність та необхідність вивчення геометричної прогресії.

Даний проект був цікавим, пізнавальним та практичним.