Статистические оценки параметров распределения

Статистика – дизайн информации

План:

- Понятие генеральной и выборочной совокупности, полигона и гистограмма частот
- Алгоритм построения полигона и гистограммы частот
- Параметры оценки генеральной совокупности

Определение оценки

Оценка - это приближение значений искомой величины, полученное на основании результатов выборочного наблюдения.

Оценки являются случайными величинами. Они обеспечивают возможность формирования обоснованного суждения о неизвестных параметрах генеральной совокупности.

Примером оценки генеральной средней является выборочная средняя генеральной дисперсии - выборочная дисперсия и т.д.

Критерии оценки

Для того чтобы оценить насколько «хорошо» оценка отвечает соответствующей генеральной характеристике разработаны 4 критерия:

- состоятельность,
- несмещенность,
- эффективность,
- достаточность.

Этот подход основывается на том, что качество оценки определяется не по ее отдельным значениям, а по характеристикам ее распределения как случайной величины.

Критерии оценки

Основываясь на положениях теории вероятностей, можно доказать, что из таких выборочных характеристик, как средняя арифметическая, мода и медиана, только средняя арифметическая представляет собой состоятельную, несмещенную, эффективную и достаточную оценку генеральной средней.

Этим и обуславливается предпочтение, отдаваемое средней арифметической в ряду остальных выборочных характеристик.

Критерии оценки

- **Несмещенность** оценки проявляется в том, что ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно значению оцениваемого параметра в генеральной совокупности. Если это требование не выполняется, то оценка является **смещенной**.
- Условие несмещенности оценки направлено на устранение систематических ошибок оценивания.
- При решении задач оценивания применяют также **асимптотически несмещенные оценки**, для которых при увеличении объема выборки математическое ожидание стремится к оцениваемому параметру генеральной совокупности.
- **Состоятельность** статистических оценок проявляется в том, что с увеличением объема выборки оценка все больше и больше приближается к истинному значению оцениваемого параметра или, как говорят, оценка сходится по вероятности к искомому параметру, или стремится к своему математическому ожиданию. Лишь состоятельные оценки имеют практическую значимость.
- - это такая оценка несмещенного параметра, которая обладает наименьшей дисперсией при данном объеме выборки. На практике дисперсия оценки обычно отождествляется с ошибкой оценки.

Критерии оценки

- **Несмещенность** оценки проявляется в том, что ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно значению оцениваемого параметра в генеральной совокупности. Если это требование не выполняется, то оценка является **смещенной**.

  Условие несмещенности оценки направлено на устранение систематических ошибок оценивания.

- При решении задач оценивания применяют также **асимптотически несмещенные оценки**, для которых при увеличении объема выборки математическое ожидание стремится к оцениваемому параметру генеральной совокупности.
- **Состоятельность** статистических оценок проявляется в том, что с увеличением объема выборки оценка все больше и больше приближается к истинному значению оцениваемого параметра или, как говорят, оценка сходится по вероятности к искомому параметру, или стремится к своему математическому ожиданию. Лишь состоятельные оценки имеют практическую значимость.
- - это такая оценка несмещенного параметра, которая обладает наименьшей дисперсией при данном объеме выборки. На практике дисперсия оценки обычно отождествляется с ошибкой оценки.

Критерии оценки

- **Несмещенность** оценки проявляется в том, что ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно значению оцениваемого параметра в генеральной совокупности. Если это требование не выполняется, то оценка является **смещенной**.
- Условие несмещенности оценки направлено на устранение систематических ошибок оценивания.
- При решении задач оценивания применяют также **асимптотически несмещенные оценки**, для которых при увеличении объема выборки математическое ожидание стремится к оцениваемому параметру генеральной совокупности.
- **Состоятельность** статистических оценок проявляется в том, что с увеличением объема выборки оценка все больше и больше приближается к истинному значению оцениваемого параметра или, как говорят, оценка сходится по вероятности к искомому параметру, или стремится к своему математическому ожиданию. Лишь состоятельные оценки имеют практическую значимость.
- Это такая оценка несмещенного параметра, которая обладает наименьшей дисперсией при данном объеме выборки. На практике дисперсия оценки обычно отождествляется с ошибкой оценки.

Критерии оценки

В качестве **меры эффективности оценки** принимают отношение минимально возможной дисперсии к дисперсии другой оценки.

Оценка, обеспечивающая полноту использования всей содержащейся в выборке информации о неизвестной характеристике генеральной совокупности, называется **достаточной** (исчерпывающей).

Генеральная совокупность и выборка

Опр 1: Генеральной совокупностью называется совокупность, из которой отбирают часть объектов.

Опр 2: Выборка (или выборочная совокупность) - это множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Опр 3: Число объектов генеральной совокупности и выборки называют соответственно *объемом* генеральной совокупности и *объемом* выборки.

Генеральная совокупность и выборка

Опр 4: Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной.*

Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной.*

Статистическое распределение выборки

- Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем $x_1, x_2, \dots x_k$ объёма N.
- *Опр 5:* Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \dots x_k$ называют *вариантами,* а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, - *вариационным рядом*.
- *Опр 6:* Числа наблюдений $n_1, n_2, \dots n_k$ называют *частотами,* а их отношения к объему

$$\frac{n_1}{n} = \omega_1, \quad \frac{n_2}{n} = \omega_2, \quad \dots, \quad \frac{n_k}{n} = \omega_k$$

 - *относительными частотами*.

- Сумма относительных частот равна единице:

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k = 1$$

Статистическое распределение выборки

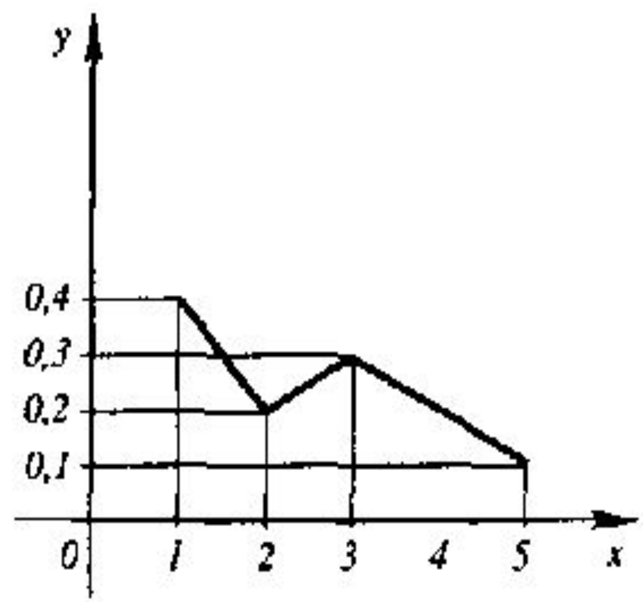
Опр 7: *Статистическим распределением выборки* называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение выборки

- *Опр 8: Полигоном частот* называют ломанную отрезки которой соединяют точки .
- Для построения *полигона* на оси *Ох* откладывают значения вариант x_i, на оси *Оу* - значения частот n_i (относительных частот ω_i).

Варианта x_i	1	2	3	5
Относительная частота p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигон частот →



Статистическое распределение выборки

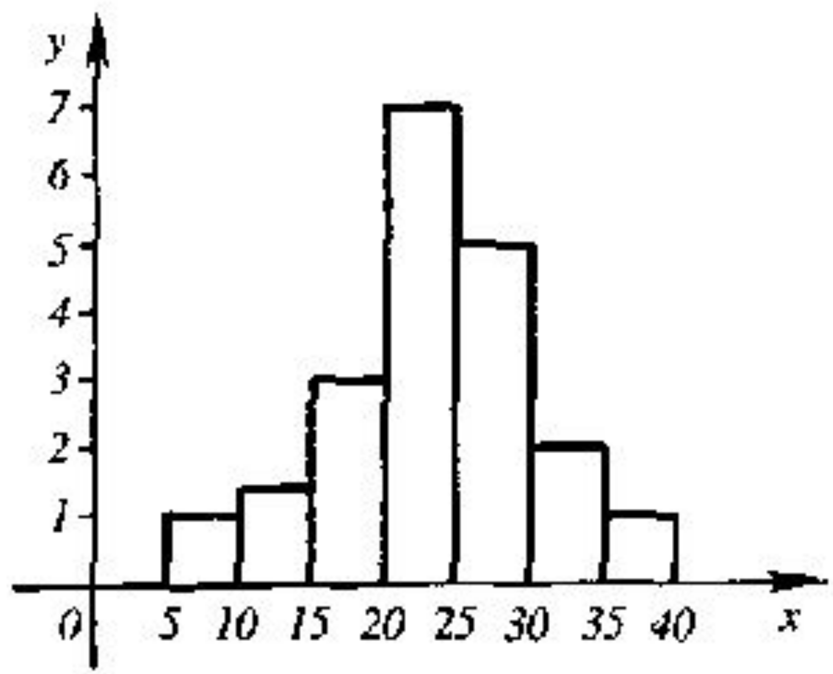
Опр 9: Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины *h*, а высоты равны отношению (плотность частоты).

$$\frac{n_i}{h}$$

Непрерывное распределение объема n= 100

Частичный интервал h	Сумма частот варнант частичного интервала n_i	$\frac{n_i}{h}$
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

Гистограмма частот



Оценка параметров генеральной совокупности

Опр 10: *Статистической оценкой* Θ* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ от наблюдаемых случайных величин .

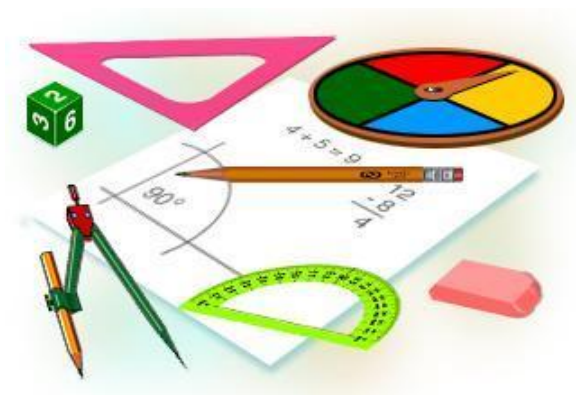
Опр 11: *Точечной* называют статистическую оценку, которая определяется одним числом

$\Theta^* = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Статистическое распределение выборки

Опр 12: Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Опр 13: Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.



Статистическое распределение выборки

Опр 14: Выборочной средней $\overline{x}_{\hat{a}}$ называют среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Опр 15: Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочного среднего $\overline{x}_{\hat{a}}$.

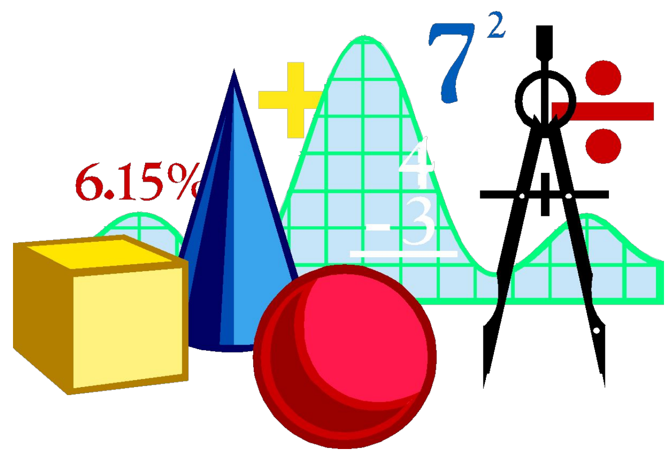
Статистическое распределение выборки

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания)

служит *выборочная средняя* $\bar{x}_{\hat{a}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$

где $\boldsymbol{x_i}$ – варианта выборки, $\boldsymbol{n_i}$ – частота варианты $\boldsymbol{x_i}$,

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ - объем выборки.



Статистическое распределение выборки

- *Несмещенной оценкой генеральной дисперсии* служит *исправленная выборочная дисперсия*

$$s^2 = \frac{N}{N-1} \cdot D_{â}$$

или

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \frac{N}{N-1} \overline{x}^2$$

- *Смещенной оценкой генеральной дисперсии* служит *выборочная*

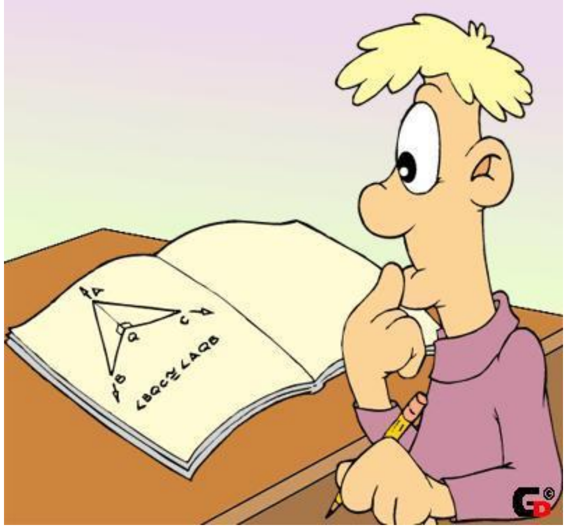
дисперсия

$$D_{â} = \overline{x}^2 - \left[\overline{x}\right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i n_i\right]^2$$

Выборочное среднее

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{D_{\hat{a}}}$$



Доверительный интервал

Доверительный интервал – это интервал, который с заданной вероятностью покрывает неизвестную характеристику.

Доверительный интервал

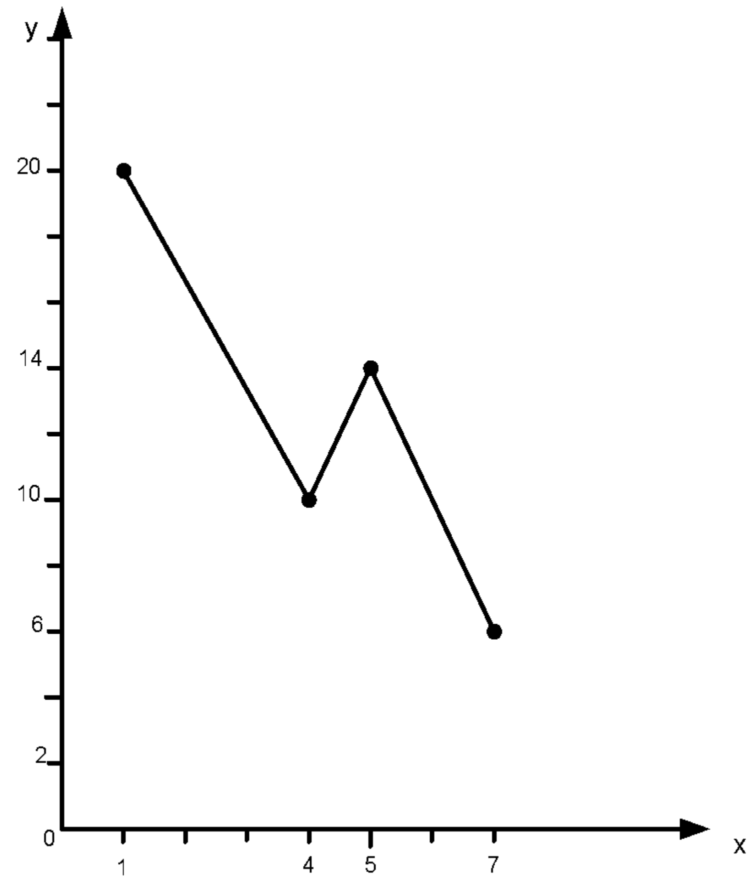
Доверительный интервал для математического ожидания

$$\bar{x} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} < M(X) < \bar{x} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

где t_γ - аргумент распределения Стьюдента, соответствующей доверительной вероятности γ и $(N-1)$ степени свободы.

Пример 1: Построить полигон частот по данному распределению

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

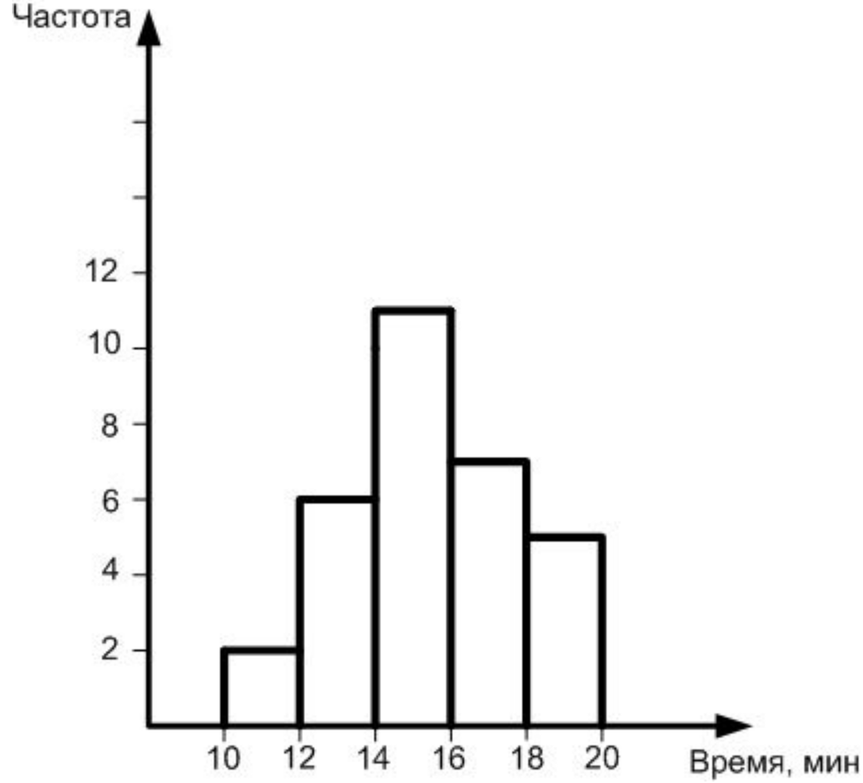


Пример 2: Наблюдая за работой бригады токарей, установили, сколько времени тратили они на обработку одной детали. Обобщая полученные данные составили таблицу.

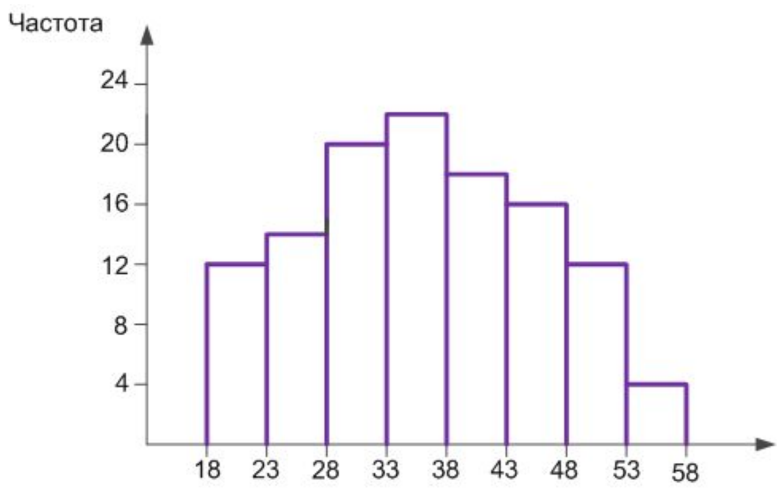
Пользуясь таблицей, постройте гистограмму частот, характеризующую распределение токарей бригады по времени, затрачиваемому на обработку одной детали.

Время, мин	**Число токарей**
10-12	2
12-14	6
14-16	11
16-18	7
18-20	5

Решение:



Пример 3: На гистограмме представлены данные о распределения рабочих строительной организации по возрастным группам:



Пользуясь гистограммой, найдите:

а) число рабочих строительной организации в возрасте от 18 до 23 лет;

б) возрастную группу, к которой относится наибольшее число рабочих;

в) общее число рабочих строительной организации.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Статистическая оценка параметров

Методы математической статистики используются при анализе явлений, обладающих свойством **статистической устойчивости**. Это свойство заключается в том, что, хотя результат X отдельного опыта не может быть предсказан с достаточной точностью, значение некоторой функции $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ от результатов наблюдений при неограниченном увеличении объема выборки теряет свойство случайности и сходится по вероятности к некоторой неслучайной величине θ.

Основные понятия

Генеральной совокупностью Х называют множество результатов всех мыслимых наблюдений, которые могут быть сделаны при данном комплексе условий. В некоторых задачах генеральную совокупность рассматривают как случайную величину Х.

Выборочной совокупностью (выборкой) называют множество результатов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Выборка должна быть репрезентативной, т.е. правильно отражать пропорции генеральной совокупности. Это достигается случайностью отбора, когда все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность быть отобранными.

Основные понятия

Параметры генеральной совокупности есть постоянные величины, а выборочные характеристики (статистики) - случайные величины.

В самом общем смысле статистическое оценивание параметров распределения можно рассматривать как совокупность методов, позволяющих делать научно обоснованные выводы о числовых параметрах генеральной совокупности по случайной выборке из нее.

Задача статистической оценки параметров в общем виде

Пусть X - случайная величина, подчиненная закону распределения F(x,θ), где θ - параметр распределения, числовое значение которого неизвестно.

Исследовать все элементы генеральной совокупности для вычисления параметра θ не представляется возможным, поэтому о данном параметре пытаются судить по выборкам из генеральной совокупности.

Задача статистической оценки параметров в общем виде

Пусть X - случайная величина, подчиненная закону распределения F(x,θ), где θ - параметр распределения, числовое значение которого неизвестно.

Исследовать все элементы генеральной совокупности для вычисления параметра θ не представляется возможным, поэтому о данном параметре пытаются судить по выборкам из генеральной совокупности.

Задача статистической оценки параметров в общем виде

Всякую однозначно определенную функцию результатов наблюдений, с помощью которой судят о значении параметра $\boldsymbol{\theta}$, называют оценкой (или статистикой) параметра $\boldsymbol{\theta}$.

Рассмотрим некоторое множество выборок объемом n каждая. Оценку параметра $\boldsymbol{\theta}$, вычисленную по **i**-ой выборке, обозначим через $\tilde{\theta}_i$. Так как состав выборки случаен, то можно сказать, что $\tilde{\theta}_i$ примет неизвестное заранее числовое значение, т.е. является случайной величиной. Известно, что случайная величина определяется соответствующим законом распределения и числовыми характеристиками, следовательно, и выборочную оценку также можно описывать законом распределения и числовыми характеристиками.

Основная задача теории оценивания состоит в том, чтобы произвести выбор оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра θ, позволяющей получить хорошее приближение оцениваемого параметра.

Законы распределения выборочных характеристик, используемые при оценке параметров

Распределение средней арифметической

Пусть из генеральной совокупности X, имеющей нормальный закон распределения N(μ;σ) с математическим ожиданием **μ** и средним квадратическим отклонением **σ**, взята случайная выборка объемом **n** и определена средняя арифметическая:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

где $\mathbf{x_i}$ - результат **i**-го наблюдения.

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать выборку объема **n**, т.е. последовательность наблюдений $X_1, X_2, \ldots X_n$, как систему независимых, одинаково распределенных случайных величин с распределением $N(\mu;\sigma)$.

Таким образом, если случайная величина X распределена нормально, то средняя арифметическая распределена также нормально с параметрами $\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, т.е. $\bar{X} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Откуда следует, что:

$$M(\bar{x}) = \mu \quad D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad и \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Распределение средней арифметической

Для одинаково распределенных и взаимно независимых случайных величин дисперсия распределения средней арифметической в n раз меньше дисперсии случайной величины X.

Распределение Пирсона (χ 2 - хи квадрат)

Если X_1, X_2, ... , X_n есть ряд независимых, нормированных, нормально распределенных случайных величин N(0,1), т.е. $M(X_i)=0$ и $D(X_i)=1$ для **i=1, 2, ..., ν,** то случайная величина:

$$U^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

имеет распределение χ^2 с ν степенями свободы, где **ν** - единственный параметр распределения χ^2, характеризующий число независимых случайных величин в выражении

В таблицах приложения для различных ν приводятся числа, вероятность превышения которых случайной величиной U^2 равна заданному значению уровня значимости **α=1-γ**.

Отметим, что математическое ожидание случайной величины U^2 равно числу степеней свободы **ν**, а дисперсия - удвоенному числу степеней свободы:

$M(U^2)=\nu$; $D(U^2)=2\nu$.

Распределение Пирсона используется для построения доверительного интервала для генеральной дисперсии $\boldsymbol{\sigma}^2$.

Распределение Стьюдента (t - распределение)

Если случайная величина Z имеет нормированное распределение N(0;1), а величина U^2 имеет распределение χ^2 с **ν** степенями свободы, причем Z и U взаимно независимы, то случайная величина:

$$T = \frac{Z}{U}\sqrt{\nu}$$

имеет **t** распределение с **ν** степенями свободы.

Наибольшее применение на практике находят таблицы, в которых даны значения **t(α,ν)**, соответствующие заданному числу степеней свободы **ν=1, 2,** ... , и уровню значимости **α**, т.е. вероятности выполнения неравенства $P[|T|>t(\alpha,\nu)]=\alpha$.

Если из генеральной совокупности X с нормальным законом распределения N(μ;σ) взята случайная выборка объемом **n**, то статистика:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1}$$

имеет распределение Стьюдента с **ν=n-1** степенями свободы.

Распределение Стьюдента (t - распределение)

Распределение Стьюдента (t - распределение) используется при интервальной оценке математического ожидания при неизвестном значении среднего квадратического отклонения σ.

Теория статистического оценивания рассматривает два основных вида оценок параметров распределений: точечные и интервальные оценки

Точечные оценки параметров распределений

Точечной оценкой называют некоторую функцию результатов наблюдения

$\theta n(x1, x2, \dots , xn)$, значение которой принимается за наиболее приближенное в данных условиях к значению параметра θ генеральной совокупности.

Примером точечных оценок являются $\overline{X}$, S^2, S и др., т.е. оценки параметров одним числом.

Точечные оценки параметров распределений

Из точечных оценок в приложениях математической статистики часто используют начальные:

$$\tilde{\nu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

где $\tilde{\nu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$

и центральные $\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k,$

моменты до четвертого порядка включительно, т.е. k=1,2,3,4.

Основные свойства точечной оценки

- Основная проблема точечной оценки заключается в выборе возможно лучшей оценки, отвечающей требованиям несмещенности, эффективности и состоятельности. Точечную оценку называют несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.
- Выполнение требования несмещенности оценки гарантирует отсутствие ошибок в оценке параметра одного знака

Основные свойства точечной оценки

Эффективной называют несмещенную выборочную оценку, обладающую наименьшей дисперсией среди всех возможных несмещенных оценок параметра **θ** для данного объема выборки **n** и функции распределения вероятности F(X,θ) генеральной совокупности.

Точечная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **состоятельной**, если при **n** → ∞ оценка $\tilde{\theta}_n$ сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е. выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1 \qquad \text{для любого } \varepsilon>0.$$

Следует отметить, что при состоятельности оценки оправдывается увеличение объема наблюдений, так как при этом становится маловероятным допущение значительных ошибок при оценивании.

Точечные оценки основных параметров распределений

Наиболее важными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Рассмотрим вопрос о том, какими выборочными характеристиками лучше всего в смысле несмещенности, эффективности и состоятельности оцениваются математическое ожидание и дисперсия.

Точечные оценки основных параметров распределений

1. Средняя арифметическая $\overline{X}$, вычисленная по **n** независимым наблюдениям над случайной величиной X, которая имеет математическое ожидание M(X)=μ и дисперсию D(X)=σ^2, является несмещенной и состоятельной оценкой этого параметра.

2. Если случайная величина X распределена нормально с параметрами N(μ,σ), то несмещенная оценка $\overline{X}$ математического ожидания M(X) имеет минимальную дисперсию, равную $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, поэтому средняя арифметическая $\overline{X}$ в этом случае является также эффективной оценкой математического ожидания.

Точечные оценки основных параметров распределений

3. Если случайная подборка состоит из **n** независимых наблюдений над случайной величиной X с математическим ожиданием M(X) и дисперсией D(X)=σ^2, то выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ не является несмещенной оценкой генеральной дисперсии $\boldsymbol{\sigma}^2$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности $\boldsymbol{\sigma}^2$ является исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

где дробь $\frac{n}{n-1}$ называется поправкой Бесселя. При малых значениях n поправка Бесселя довольно значительно отличается от единицы, с увеличением значений **n** она стремиться к единице. При n>50 практически нет разницы между оценками S^2 и S^2 . Оценки S^2 и S^2 являются состоятельными оценками генеральной дисперсии $\boldsymbol{\sigma}^2$.

Точечные оценки основных параметров распределений

4. Если известно значение математического ожидания **μ**, то несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной дисперсии является выборочная оценка:

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \cdot$$

5. Если случайная величина X имеет биноминальное распределение, то несмещенной и состоятельной оценкой генеральной доли **P** является частость события (статистическая доля **ω**).

Интервальные оценки параметров распределений

При выборке небольшого объема точечная оценка может существенно отличаться от истинного значения параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. Поэтому в случае малой выборки часто используют интервальные оценки.

Интервальные оценки параметров распределений

Интервальной оценкой называют числовой интервал $(\tilde{\theta}_n^{(1)}, \tilde{\theta}_n^{(2)})$, определяемый по результатам выборки, относительно которого можно утверждать с определенной, близкой к единице вероятностью, что он заключает в себе значение оцениваемого параметра генеральной совокупности, т.е.:

$$P(\tilde{\theta}_n^{(1)} \le \theta \le \tilde{\theta}_n^{(2)}) = \gamma,$$

где $\tilde{\theta}_n^{(1)}$ и $\tilde{\theta}_n^{(2)}$ называют также нижней и верхней границами доверительного интервала параметра θ.

Вероятность $\boldsymbol{\gamma=1-\alpha}$ принято называть доверительной вероятностью. Выбор значения доверительной вероятности следует производить исходя из конкретной задачи.

Интервальные оценки параметров распределений

Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра **θ**, можно для каждой близкой к единице вероятности **γ** указать такое значение **Δ**, что:

$$P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \Delta\right) = P(\tilde{\theta}_n - \Delta \le \theta \le \tilde{\theta}_n + \Delta) = \gamma.$$

Оценка $\tilde{\theta}_n$ будет тем точнее, чем меньше для заданной доверительной вероятности **γ** будет Δ. Из соотношения (2.13) следует, что вероятность того, что доверительный интервал ($\tilde{\theta}_n$ -Δ; $\tilde{\theta}_n$ +Δ) со случайными границами накроет неизвестный параметр θ, равна **γ**. Величину **Δ**, равную половине ширины **h** доверительного интервала называют точностью оценки. В общем случае границы интервала $\tilde{\theta}_n$-Δ и $\tilde{\theta}_n$+Δ есть некоторые функции от результатов наблюдений X_1, X_2, ..., X_n. Вследствие случайного характера выборки при многократном ее повторении будут изменяться как положение, так и величина доверительного интервала.

Интервальные оценки параметров распределений

Задачи на построение доверительных интервалов могут решаться как в прямом направлении (когда надо указать границы интервала), так и в обратном (где по заданным границам надо определить надежность или объем выборки).

Как правило, обратные задачи не всегда разрешимы, особенно, при поиске объема выборки.

Поскольку в реальных задачах исследователь стремиться к высокой надежности и точности (т.е. к «узкому» интервалу) при минимальном объеме выборки, то может возникнуть противоречие.

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Интервальные оценки для генеральной средней

Правила построения доверительного интервала для математического ожидания зависит от того, известна или не известна дисперсия генеральной совокупности σ^2.

Пусть из генеральной совокупности X с нормальным законом распределения N(μ; σ) и известным генеральным средним квадратическим отклонением **σ** взята случайная выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объемом **n** и вычислено $\overline{X}$. Требуется найти интервальную оценку для **μ**. Используем среднюю арифметическую $\overline{X}$, которая имеет нормальное распределение с параметрами $N(\mu; \sigma/\sqrt{n})$.

Тогда статистика $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ имеет нормированное нормальное распределение с параметрами N(0;1). Вероятность любого отклонения $|\overline{X}-\mu|$ может быть вычислена по интегральной теореме Лапласа для интервала, симметричного относительно **μ**, по формуле:

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < t\right) = \Phi(t) \cdot$$

Интервальные оценки для генеральной средней

Задавая определенную доверительную вероятность **γ**, по таблице интегральной функции вероятностей Ф(t) можно определить значение $\mathbf{t_\gamma}$. Для оценки математического ожидания преобразуем формулу (2.14):

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\Phi(t_\gamma)=\gamma$$

и далее будем иметь:

$$P\left(\overline{X}-t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

Интервал, определенный по (2.16), и представляет собой доверительный интервал для математического ожидания **μ**.

Точность оценки равна:

$$\Delta=t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Интервальные оценки для генеральной средней

По этой формуле можно, например, вычислить объем случайной выборки **n**, необходимый для оценки нормальной средней с заданной надежностью **γ** и точностью **Δ**, а также при заданной точности **Δ** и известном объеме выборки **n** можно определить надежность (вероятность) **γ**.

Нижняя и верхняя границы доверительного интервала равны:

$$\mu_{\min} = \overline{X} - \Delta \ ; \ \mu_{\max} = \overline{X} + \Delta.$$

Ширина доверительного интервала равна:

$$h = \mu_{\max} - \mu_{\min} = 2\Delta.$$

Интервальные оценки для генеральной средней

Предположим теперь, что генеральная совокупность X распределена по нормальному закону N(μ;σ) с неизвестным средним квадратическим отклонением **σ**.

В этом случае для построения интервальной оценки генеральной средней **μ** используется статистика $T = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1}$, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы ν = n-1.

Предполагается, что средняя арифметическая $\overline{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение S определены по результатам выборки объемом n из генеральной совокупности X.

Интервальные оценки для генеральной средней

По таблице **t** - распределения (Стьюдента) для ν = **n-1** степеней свободы находим значение $t_{\alpha,\nu}$, для которого справедливо равенство:

$$P\left(\bar{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} \le \mu \le \bar{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma = 1 - \alpha,$$

где точность оценки генеральной средней равна:

$$\Delta = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}.$$

При решении обратной задачи нахождения «n» приходиться строить итерационный процесс:

$$\frac{\Delta}{S} = \frac{t_\alpha}{\sqrt{n-1}}, \qquad t_\alpha = t(\alpha, n-1)$$

и найти «n», при котором правая часть наиболее близка к левой части.

При достаточно больших n различия между доверительными интервалами, определенными по формулам мало, так как при **n** → ∞ распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению.