

Натуральное число как мера величины

## *Понятие положительной скалярной величины и ее измерения*

- *Величины одного рода или однородные величины* - это величины, которые выражают одно и то же свойство объектов.
- ✓ *Пример:* длина стола, длина комнаты- это величины одного рода.

## Основные положения:

1) Любые две величины **сравнимы**: они либо равны, либо одна меньше другой. Имеют место отношения "равно", "меньше" и "больше", и для любых величин А и В справедливо одно и только одно из отношений:  $A < B, A = B, A > B$ .

✓ *Пример:* масса яблока меньше массы арбуза.

2) Отношение "меньше" для однородных величин **транзитивно**: если  $A < B$  и  $B < C$ , то  $A < C$ .

✓ *Пример:* если масса яблока М1 меньше массы яблока М2, и масса яблока М2 меньше массы яблока М3, то масса яблока М1 меньше массы яблока М3.

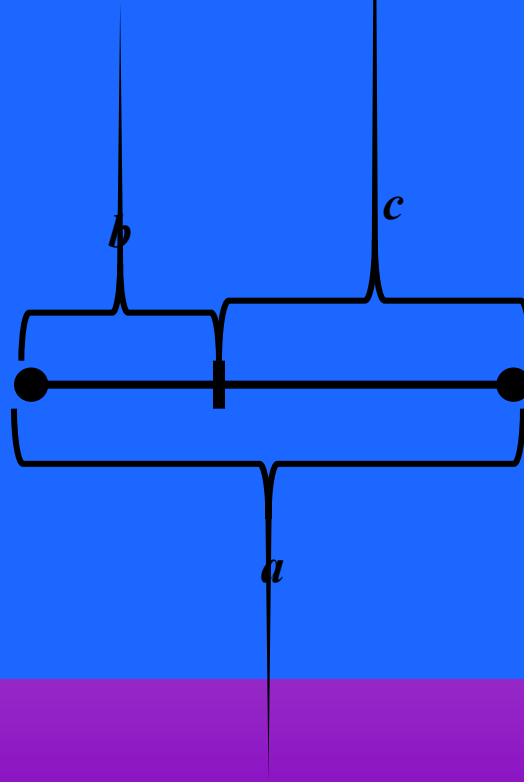
3) **Величины одного рода можно складывать**, в результате сложения получается величина того же рода:  $C = A + B$ , С-сумма величин А и В.

**Сложение величин коммутативно и ассоциативно.**

✓ *Пример:* если А-масса арбуза, В-масса яблока, то  $C = A + B$ - это масса арбуза и яблока.

4) **Величины одного рода можно вычитать**, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение. Разностью величин  $A$  и  $B$  называется такая величина  $C=A-B$ , что  $A=B+C$ . Разность величин  $A$  и  $B$  существует, если  $A>B$ .

✓ *Пример:* если  $A$ -длина отрезка  $a$ ,  $B$ -длина отрезка  $b$ , то  $C=A-B$ -это длина отрезка  $c$ .

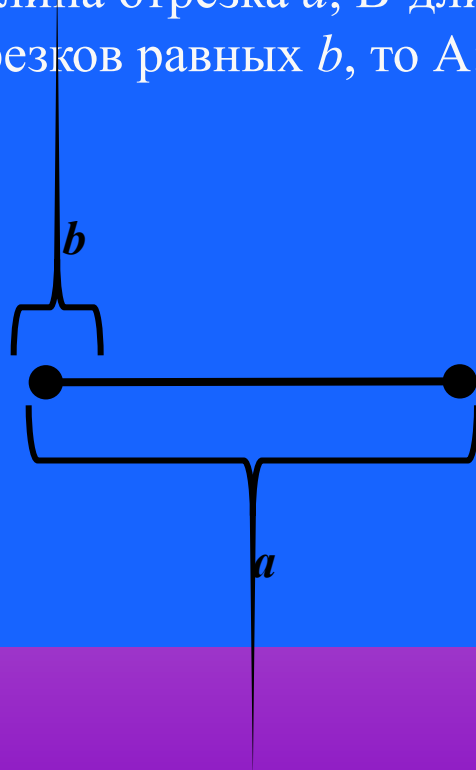


5) **Величину можно умножать на положительное действительное число**, в результате получают величину того же рода. Для любой величины  $A$  и любого положительного числа  $x$  существует единственная величина  **$V = x \times A$** ,  $V$ - произведение величины  $A$  на число  $x$ .

✓ *Пример:* если  $A$ -масса одного яблока, то умножив  $A$  на число  $x=3$ , получим величину  $V=3 \times A$  - массу трех яблок.

6) **Величины одного рода можно делить**, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число. Частным величин  $A$  и  $B$  называется такое положительное действительное число  $x = A:B$ , что  $A = x \times B$ .

✓ *Пример:* если  $A$ -длина отрезка  $a$ ,  $B$ -длина отрезка  $b$  и отрезок  $A$  состоит из 4-х отрезков равных  $b$ , то  $A:B=4$ , т.к  $A = 4 \times B$ .

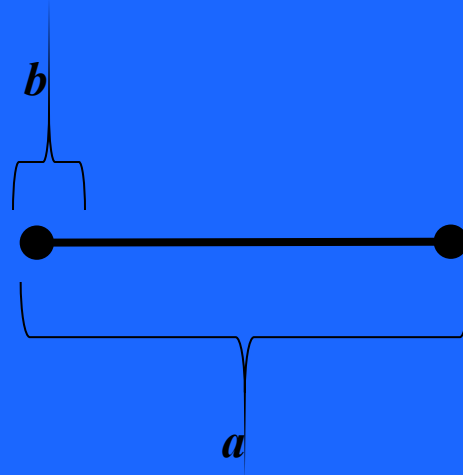


*Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью- их можно оценивать количественно.*

- Выбирают величину, которую называют единицей измерения-**Е**.
- Если задана величина  $A$  и выбрана единица величины  $E$ , то **измерить величину  $A$ -это значит найти такое положительное действительное число  $x$ , что  $A = x \cdot E$ .**
- Число  $x$ - **численное значение величины**  $A$  при единице величины  $E$ . Оно показывает, во сколько раз величина  $A$  больше(меньше) величины  $E$ , принятой за единицу измерения.

- Если  $A = x \times E$ , то число  $x$  называют мерой величины  $A$  при единице  $E$  и пишут  $x = m_E(A)$

✓ *Пример:*  $A$ -длина отрезка  $a$ ,  $E$ -длина отрезка  $b$ , то  $A=4 \times E$ . число 4-это мера длины  $A$  при единице длины  $E$ .





- Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной*.
- *Положительная скалярная величина* - скалярная величина, которая при выбранной единице измерения принимает только положительные численные значения.
- ✓ *Пример:* площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.
- Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода* или *разнородными величинами*.
- ✓ *Пример:* длина и масса-это разнородные величины.

# Упражнения

В ТЕОРИЮ

*1. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:*

- a) Персики дороже яблок.
- b) Шкаф тяжелее стула.
- c) Катя выше Гали.

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

*Положительная скалярная величина.*

- а) Персики дороже яблок- *стоимость*.
- б) Шкаф тяжелее стула- *масса*.
- в) Катя выше Гали- *длина*.



## *2. Какие величины можно сравнить между собой:*

- а) 1200 м;
- б) 20 штук
- в) 320 кг
- г) 12 мин

- 1) 2 ц
- 2) 2км 400м
- 3) 20 пар
- 4) 1 час

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

- а) 1200 м;
- б) 20 штук
- в) 320 кг
- г) 12 мин

- 1) 2 км 400 м
- 2) 20 пар
- 3) 2 ц
- 4) 1 час



*3. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу измерения величины:*

- а) В сумке 5 кг. апельсинов.
- б) Глубина бассейна 2 м.
- в) Площадь участка 8 соток.
- г) Рост мальчика 1 м 70 см.

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

- а) объект- апельсины, величина -масса, число 5-  
численное значение, единица измерения- килограмм;
- б) объект -глубина бассейна, величина-длина, число 2-  
численное значение, единица измерения- метр;
- в) объект -участок, величина - площадь, число 8-  
численное значение, единица измерения- сотка;
- г) объект -рост мальчика, величина - длина, число 1м 70  
см -численное значение, единица измерения м и см.





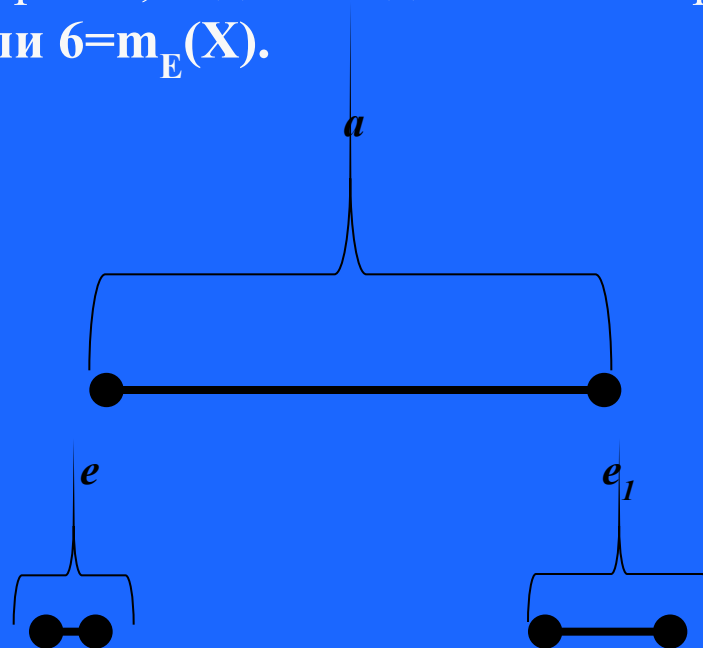
*Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины.*  
*Смысл суммы и разности*

*Понятие: "отрезок состоит из отрезков".*

- *Определение. Считают, что отрезок  $x$  состоит из отрезков  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы: отрезок  $x$  разбит на отрезки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и пишут  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$*
- *Пусть задан отрезок  $x$ , его длина обозначим  $X$ ,  $e$  - единичный отрезок,  $E$ -длина отрезка.*

- Определение. *Если отрезок  $x$  состоит из отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку  $e$ , то число  $a$  называют численным значением длины  $X$  данного отрезка при единице длины  $E$ .*

✓ *Пример:*  $x$ - отрезок, состоит из 6 отрезков, равных отрезку  $e$ - единичный отрезок;  $E$ -длина единичного отрезка;  $X$ -длина отрезка  $x$ , то  $X=6E$  или  $6=m_E(X)$ .



- Из определения получаем, что **НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО** как результат измерения длины отрезка (или мера длины отрезка), показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется.

Замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным.  
✓ *Пример:* если в качестве единицы длины выбрать  $e_1$ , то мера длины отрезка  $x=3$ . Записывается:  $X=3 \times E_1$  или  $m_{E_1}(X)=3$ .
2. Если отрезок  $x$  состоит из  $a$  отрезков, равных  $e$ , а отрезок  $e$  состоит из  $b$  отрезков, равных  $e$ , то  $a=b$ , тогда и только тогда, когда отрезки  $x=y$ .  
✓ *Пример:* В записи  $3 \text{ см}^2$  число **3** означает, что фигура  $F$  состоит из трех единичных квадратов с площадью равной квадратному сантиметру.

*Смысл суммы натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.*

- Теорема. Если отрезок  $x$  состоит из отрезков  $y$  и  $z$  и длины отрезков  $y$  и  $z$  выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка  $x$  равна сумме мер длин его частей.

*Сумму натуральных чисел  $a$  и  $b$  можно рассматривать как меру длины отрезка  $x$ , состоящего из отрезков  $y$  и  $z$ , мерами длин которых являются числа  $a$  и  $b$ .*

$$a+b=m_E(Y)+m_E(Z)=m_E(Y+Z)=m_E(X)$$

*Смысл разности натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.*

- Теорема. Если отрезок  $x$  состоит из отрезков  $u$  и  $z$  и длина отрезков  $x$  и  $u$  выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка  $z$  равна разности мер длин отрезков  $x$  и  $u$ .

*Разность натуральных чисел  $a$  и  $b$  можно рассматривать как меру длины такого отрезка  $z=x-y$ , что  $z+y=x$ , если мера длины отрезка  $x$  равна  $a$ , мера отрезка  $y$  равна  $b$ .*

$$a-b=m_E(X) - m_E(Y) = m_E(X-Y) = m_E(Z)$$

# Упражнения

В ТЕОРИЮ

*1. Какой смысл имеет натуральное число 5, если оно получается в результате:*

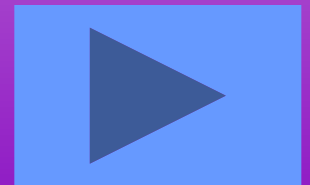
- а) Длины отрезка;
- б) Площади фигуры;
- в) Массы тела?

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

- а) мера длины отрезка;*
- б) фигура состоит из 5 единичных квадратов;*
- в) численное значение массы.*





## *2. Объясните, почему следующая задача решается при помощи сложения:*

- Когда со стола взяли 3 книги, то на нем осталась 1 книга.  
Сколько книг лежало на столе первоначально?

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

В задаче идет речь о количестве книг. Известно их численное значение. Требуется найти численное значение количества книг, которое получится, если данные книги сложить.

Получаем выражение  $3+1$ . Это математическая модель данной задачи. Вычислив значение выражения  $3+1$ , получим ответ на вопрос задачи.



*3. Объясните, почему следующая задача решается при помощи вычитания:*

- С двух участков собрали 8 пучков укропа. Сколько пучков укропа собрали с первого участка, если со второго участка собрали 5 пучков?

*Проверить себя*

*Далее*

# Ответ:

В задаче рассматривается количество пучков укропа, известно их численное значение. Это количество складывается из количества пучков укропа, собранных с первого и второго участков, численное значение которого также известно. Требуется узнать численное значение пучков укропа, собранных с первого участка.

Так как количество пучков укропа собранных с первого участка можно получить, вычитая из общего количества пучков укропа, собранных с двух участков количество собранных пучков со второго участка, то численное значение пучков укропа, собранных с первого участка находят действием вычитания:

8-5.

Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи.



#### *4. Обоснуйте выбор действия при решении задачи:*

- *Купили 3 кг яблок, а апельсинов на 2 кг больше. Сколько килограммов апельсинов купили?*

*Проверить себя*

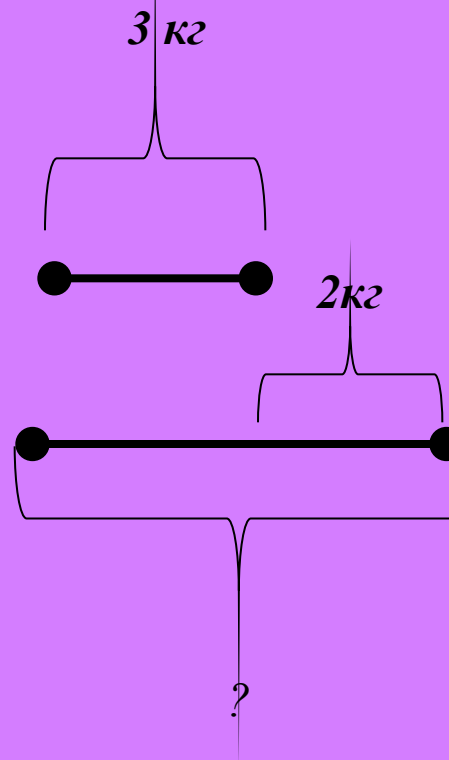
*Далее*

# Ответ:

В задаче идет речь о двух величинах- массе яблок и массе апельсинов. Численное значение первой массы известно, а численное значение второй массы надо найти, зная, что апельсинов на 2 кг больше, чем яблок.

Видно, что **апельсинов купили столько же, сколько яблок, и еще 2 кг**, т.е масса апельсинов складывается из **двух масс яблок (3кг и 2кг)**, и чтобы найти ее численное значение, надо **сложить численные значения масс-слагаемых**. Получаем выражение  $3+2$ , значение которого и будет ответом на вопрос задачи.

Модель задачи:



*Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин*

- **Умножение и деление натуральных чисел- мер величин связано с переходом от одной единицы величины к другой в процессе измерения одной и той же величины.**

*Смысл произведения натуральных чисел,  
полученных в результате измерения величин.*

- **Теорема.** Если отрезок  $x$  состоит из  $a$  отрезков, длина которых равна  $E$ , а отрезок длины  $E$  состоит из  $b$  отрезков, длина которых равна  $E_1$ , то мера длины отрезка  $x$  при единице длины  $E_2$  равна  $a \times b$ .

*Если натуральное число  $a$  - мера длины отрезка  
 $x$   
при единице длины  $E$ ,  
натуральное число  $b$  - мера длины  $E$   
при единице длины  $E_1$ ,  
то произведение  $a \times b$  - это мера длины отрезка  
 $x$   
при единице длины  $E_1$ .*

$$a \times b = m_E(x) \times m_{E_1}(E) = m_{E_1}(x)$$



*Смысл частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.*

- Теорема.** Если отрезок  $x$  состоит из  $a$  отрезков, длина которых равна  $E$ , отрезок длины  $E_1$  состоит из  $b$  отрезков длины  $E$ , то мера длины отрезка  $x$  при единице длины  $E_1$  равна  $a:b$ .

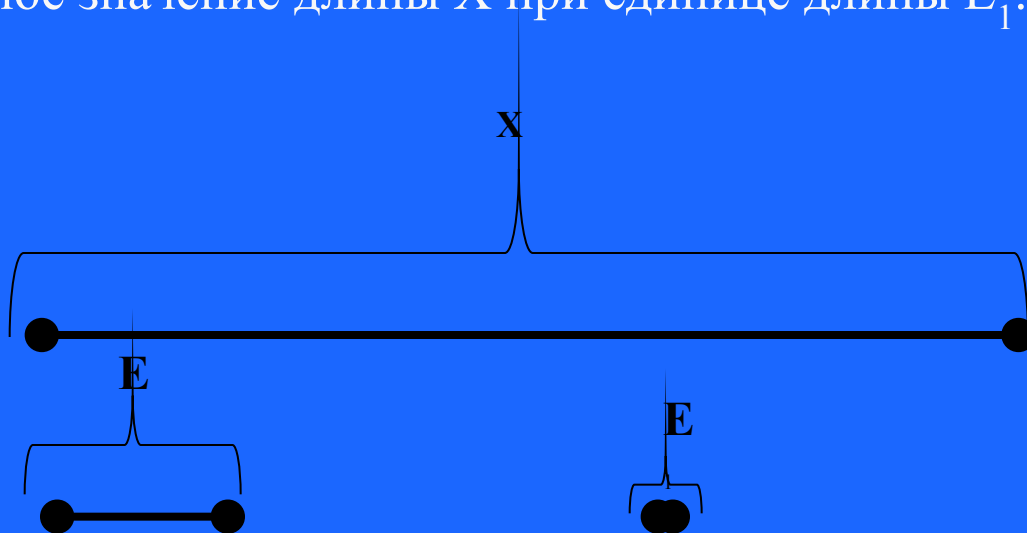
*Если натуральное число  $a$  - мера длины отрезка  $x$  при единице длины  $E$ , натуральное число  $b$  - мера новой единицы длины  $E_1$  при единице длины  $E$ , то частное  $a:b$  - это мера длины отрезка  $x$  при единице длины  $E_1$ .*

$$a:b = m_E(x) : m_E(E_1) = m_{E_1}(x)$$

# Задачи.

**1. Объяснить смысл произведения  $3 \times 4$ , если 4 и 3-числа полученные в результате измерения величин.**

- ✓ *Решение.* Пусть  $4 = m_E(X)$ ,  $3 = m_{E_1}(E)$ , где  $X$  - измеряемая величина,  $E$  - первоначальная единица величины, а  $E_1$  - новая единица величины. Тогда согласно теореме,  $4 \times 3 = m_{E_1}(X)$ , т.е.  $4 \times 3$  - это численное значение длины  $X$  при единице длины  $E_1$ .



## 2. Обосновать выбор действия при решении задачи.

В одной коробке 6 ручек. Сколько ручек в трех таких коробках?

✓ *Решение.* В задаче идет речь о количестве ручек, которое сначала измерено коробками и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице - ручка, причем известно, что коробка – это 6 ручек.

Тогда  $3\text{кор.} = 3 \times \text{кор.} = 3 \times (6 \text{ руч.}) = 3 \times (6 \times \text{руч.}) = (3 \times 6)\text{руч.}$

Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой - ручка.

### 3. Обосновать выбор действия при решении задачи.

Из 12 м ткани сшили платья, расходуя на каждое по 4 м. Сколько платьев сшили?

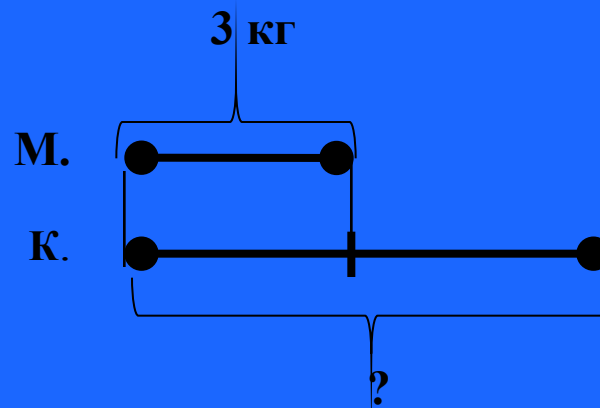
✓ *Решение:* В задаче рассматривается длина ткани, которая измерена сначала при помощи единицы длины метр, и известно численное значение заданной величины. Требуется найти численное значение той же длины при условии, что она измеряется новой единицей – платьем, причем известно, что платье-это 4м,откуда метр-это  $1/4$  платья:

$$12\text{м}=12 \times \text{м}=12 \times (1/4 \text{ пл.})=(12 \times 1/4)\text{пл.}=(12:4)\text{пл.}=3\text{пл.}$$

#### 4. Обосновать выбор действия при решении задачи.

Купили 3 кг моркови, а картофеля в 2 раза больше. Сколько килограммов картофеля купили?

✓ *Решение:* В задаче рассматривается масса моркови и масса картофеля, причем численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в 2 раза больше первой. Масса картофеля складывается из двух масс по 3 кг, численное значение массы картофеля можно найти, умножив 3 на 2. Найдя значение выражения  $3 \times 2$ , получим ответ на вопрос задачи.



# Упражнения

В ТЕОРИЮ

## *Обоснуйте выбор действия при решении задач:*

- 1) 6 кг муки надо разложить в пакеты, по 2 кг в каждый. Сколько получится пакетов?
- 2) Купили 3 пакета муки, по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?
- 3) 6 кг муки разложили на пакеты по 2 кг в каждый. Сколько получилось пакетов?

*Ответ на  
задачу №1*

*Ответ на  
задачу №2*

*Ответ на  
задачу №3*

**ЗАКОНЧИТЬ**

# Ответ №1

В задаче рассматривается масса муки, которая сначала измерена единицы массы – килограмм, и известно численное значение этой массы при указанной единицы массы.

Требуется найти результат измерения этой же массы, но уже при помощи другой единицы- пакета, причем известно, что **1 пакет- это 2 кг.**

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при новой единице- пакет, можно представить в таком виде:

$$6\text{кг}=6 \times \text{кг}=6 \times (1/2 \text{ пак.})=(6 \times 1/2)\text{пак.}=(6:2)\text{пак.}$$

[Вернуться к задачам](#)



# Ответ №2

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо массу 2 кг повторить слагаемым три раза, т.е. массу 2 кг умножить на число 3.

Численное значение полученной при этом величины находим, умножив численное значение массы муки в одном пакете на число 3.

**Произведение  $3 \times 2$  будет математической моделью данной задачи.**

Вычислив его значение, будем иметь ответ на вопрос задачи.

[Вернуться к задачам](#)

# Ответ №3

В задаче надо узнать, сколько раз масса 2 кг укладывается в 6 кг, т.е надо массу 6 кг разделить на массу 2 кг. В результате должно получится число, которое находим разделив численное значение одной величины на численное значение другой.

Таким образом, получаем частное **6:2**. Его значение и будет ответом на вопрос задачи.

**ЗАКОНЧИТЬ**