ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Лекция № 5

6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

6.1. Давление в жидкости и газе

- Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и ***объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает***.
- Жидкость, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. В жидкостях среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому ***жидкость обладает практически неизменным объемом***.
- ***Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости (газа) на единицу площади, называется давлением р жидкости (газа):***

$$p = \Delta F/\Delta S.$$

- Единица давления – паскаль *(Па): 1 Па* равен давлению, создаваемому силой *1 Н*, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью $1\ м^2$ $(1\ Па = 1\ Н/м^2)$.

- Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется ***закону Паскаля***: ***давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.***
- Если жидкость несжимаема, то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ, вес столба жидкости $P = \rho \cdot g \cdot S \cdot h$, а давление на нижнее основание

$$p = P/S = \rho \cdot g \cdot S \cdot h / S = \rho \cdot g \cdot h,$$

т.е. ***давление изменяется линейно с высотой***. Давление $p \cdot g \cdot h$ называется гидростатическим давлением.
- По закону Архимеда ***на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):***

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V,$$

где ρ – плотность жидкости, V – объем погруженного в жидкость тела.

6.2. Уравнение неразрывности

- Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что ***касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости*** в соответствующих точках пространства (рис. 6.1).
- Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению скорости (рис. 6.2).
- За время Δt через сечение S проходит объем жидкости $S \cdot v \cdot \Delta t$; следовательно, за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости $S_1 v_1$, где v_1 – скорость течения жидкости в месте сечения S_1. Через сечение S_2 за 1 с пройдет объем жидкости $S_2 \cdot v_2$, где v_2 – скорость течения жидкости в месте сечения S_2.

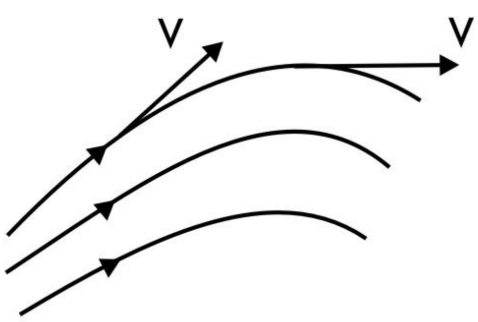


Рис. 6.1

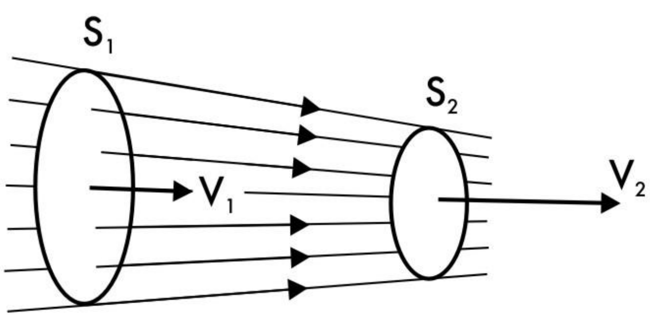


Рис. 6.2

- Если жидкость несжимаема (ρ = const), то через сечение S_2 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_1,

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = const.$$

- Следовательно, ***произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.*** Соотношение называется уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости.

- **Пример**

  За 15 мин в трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

  Дано: t = 15 мин = 900 с, $d = 2\cdot 10^{-2}$ м, m = 50 кг, $\rho = 10^3$ кг/м^3.
- ***Решение***
- За время t через поперечное сечение трубы $S = \pi\, d^2/4$ протекает объем воды, равный

$$V = Svt, \qquad (1)$$

  где v – скорость течения воды.

  Плотность $\rho = m/V$, откуда $V = m/\rho$.
- Подставляя в формулу (1) выражения для объема и площади трубы, получаем

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2}{4} vt,$$

- Откуда

$$v = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}.$$

- Вычисляя, получаем:

$$v = \frac{4\cdot 50}{3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 10^3\cdot 9\cdot 10^2} = 0{,}18(м/с).$$

6.3. Уравнение Бернулли и следствия из него

- Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость. Пусть в месте сечения S_1 скорость течения v_1, давление p_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1. Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения v_2, давление p_2 и высота сечения h_2. За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению S_1', а от S_2 - к S_2'.

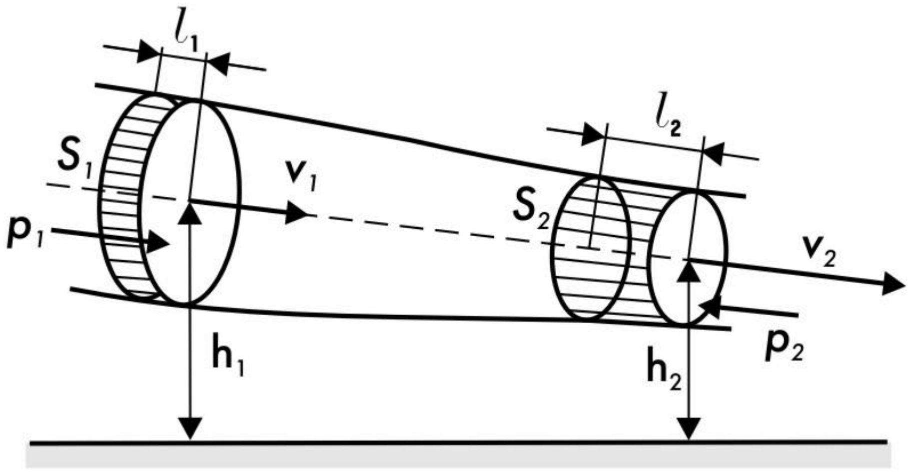


Рис. 6.3

- Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 – E_1$ идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 – E_1 = A. \qquad (*)$$

где E_1 и E_2 – полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2, соответственно.
- С другой стороны, A – это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2, за малый промежуток времени Δt.
- Для перенесения массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2' на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$.
- Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рис. 6.3, приписывают ***постоянные значения скорости*** v, ***давления*** p и ***высоты*** h.

- Следовательно,

$$A = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2,$$

где $F_1 = p_1 \cdot S_1$ и $F_2 = -p_2 \cdot S_2$ (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости).

- ***Полные энергии E_1 и E_2 складываются из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:***

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 ,$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 .$$

- Подставляя в уравнение закона сохранения энергии (*), получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t .$$

- Согласно уравнению неразрывности, объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t.$$

- Разделив верхнее выражение на ΔV, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где ρ – плотность жидкости.

- Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const.$$

- Это выражение выведено швейцарским физиком Д. Бернулли и называется ***уравнением Бернулли***.
- ***Уравнение Бернулли – выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости***.

- Величина p в формуле называется ***статическим давлением*** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела),

  величина $\rho \cdot v^2/2$ – ***динамическим давлением***,

  величина $\rho \cdot g \cdot h$ представляет собой ***гидростатическое давление***.
- Для горизонтальной трубки тока $(h_1 = h_2)$ выражение принимает вид

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + p = const,$$

  где $p + \rho \cdot v^2/2$ называется ***полным давлением***.
- Из ***уравнения Бернулли*** для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности следует, что ***при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения***, а статическое давление больше в более широких местах.

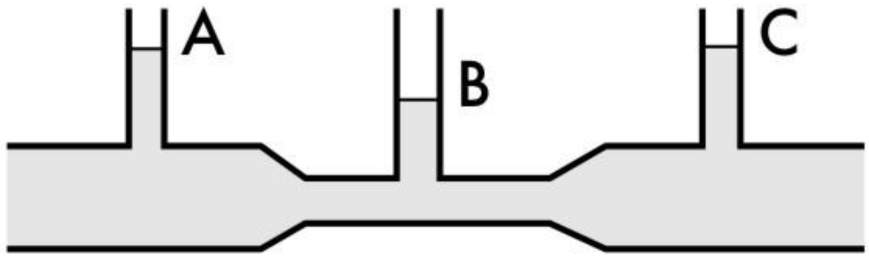


Рис. 6.4

- Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд манометров (рис. 6.4). В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что ***в манометрической трубке*** *В*, прикрепленной к узкой части трубы, ***уровень жидкости ниже***, ***чем в манометрических трубках*** *А* и *С*, прикрепленных к широкой части трубы.
- Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости.

- **Пример**
- Водомер (устройство для измерения скорости протекающей в трубе жидкости) представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения. В каждое из сечений впаяны две вертикальные трубки одинакового сечения. По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить её массовый расход, если разность сечений в водомерных трубках Δh = 8 см, а сечения трубы у оснований вертикальных трубок равны: S_1 = 6 см^2 и S_2 = 12 см^2.
- **Дано:** Δh = 8 см = $8\cdot10^{-2}$ м, S_1 = 6 см^2 = $6\cdot10^{-4}$ м, S_2 = 12 см^2 = $12\cdot10^{-4}$ м, $\rho = 10^3$ кг/м^3 (С переводом в систему СИ).
- **Определить:** $Q = m/\Delta t$.
- ***Решение.*** Массовый расход воды есть отношение массы воды, протекающей за 1 секунду через сечение трубы:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 S_2 .$$

- В этой формуле v_2 – скорость воды в сечении трубы S_2.

- Из уравнения неразрывности

$$v_2 S_2 = v_1 S_1.$$

- Уравнение Бернулли для горизонтальной трубы, у которой оси всех участков находятся на одном уровне, имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho \upsilon_1^{\ 2}}{2} = p_2 + \frac{\rho \upsilon_2^{\ 2}}{2},$$

где p_1 и p_2 – статические давления в сечениях трубы S_1 и S_2 соответственно, а v_1 – скорость воды в сечении трубы S_1.

- Учитывая, что разность давлений равна

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h,$$

получаем

$$\rho \frac{v_1^{\ 2} - v_2^{\ 2}}{2} = \rho g \Delta h.$$

- Исключая v_1 путем использования уравнения неразрывности, получаем выражение для v_2:

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^{\ 2} - S_1^{\ 2}}}.$$

- Подставив это выражение в уравнение расхода воды, получаем:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2{}^2 - S_1{}^2}}.$$

- Вычисляя, получаем Q = 0,868 (кг/с).

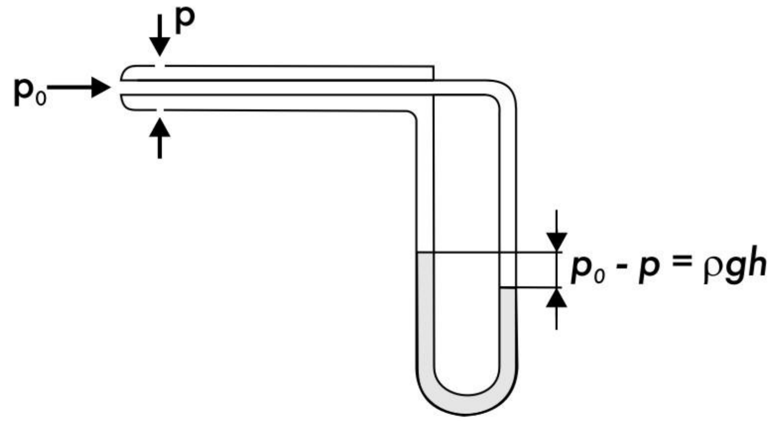


Рис. 6.5

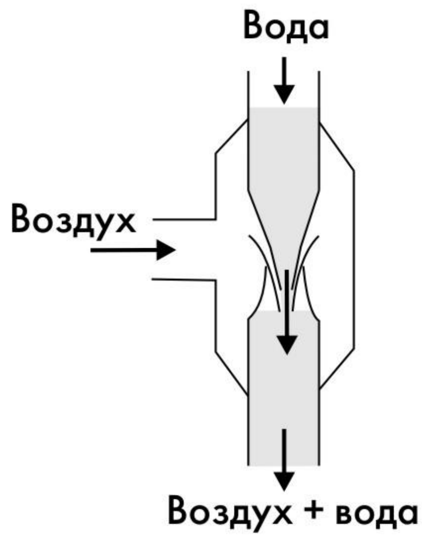


Рис. 6.6

- Для измерения скорости газа применяется трубка Пито-Прандтля (рис. 6.5).
- Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление *(p_0)*, с помощью другой – статическое *(p)*. Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 \cdot g \cdot h,$$

где ρ_0 – плотность жидкости в манометре.

- С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \rho v^2/2,$$

где ρ – плотность газа (жидкости) на входе трубки Пито.

- Приравнивая, получаем искомую скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{2\rho_0 gh / \rho}.$$

- Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы водоструйного насоса. Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца.

- Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого имеется маленькое отверстие. Выделим два сечения (на уровне h_1 свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне h_2 выхода ее из отверстия) и напишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

- Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному:

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2.$$

- Из уравнения неразрывности следует, что $v_1/v_2 = S_2/S_1$, где S_1 и S_2 - площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 >> S_2$, то слагаемым $v_1^2/2$ можно пренебречь и

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

- Это выражение получило название ***формулы Торричелли***.

6.4. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

- **Вязкость** (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев.
- ***Сила внутреннего трения F тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя S***, и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

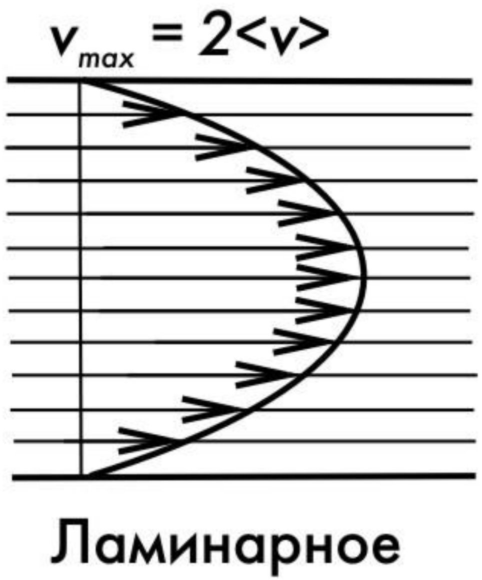
$$F = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| S,$$

где коэффициент пропорциональности η, зависящий от природы жидкости, называется ***динамической вязкостью*** (или просто вязкостью).

- Единица вязкости – паскаль·секунда (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м^2).
- ***Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают.***
- ***Вязкость зависит от температуры***, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.
- Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18…40 °С падает в четыре раза.

- Существуют ***два режима течения жидкостей***.
- Течение называется ***ламинарным***, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.
- Течение называется ***турбулентным***, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).
- ***Ламинарное течение*** жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы.

- При ***турбулентном течении*** частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит ***образование вихрей***.



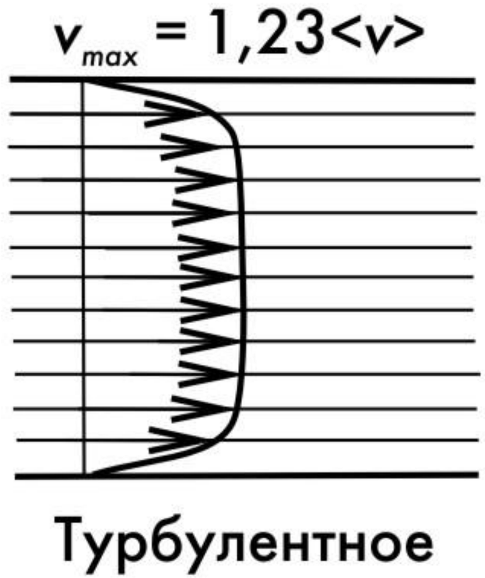


Рис. 6.7

- ***Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса***:

$$Re = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle d}{\eta} = \frac{\langle \upsilon \rangle d}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \eta / \rho$ – ***кинематическая вязкость***; ρ – плотность жидкости; $<v>$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

- При малых значениях числа Рейнольдса ($Re < 1000$) наблюдается ламинарное течение.
- Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области

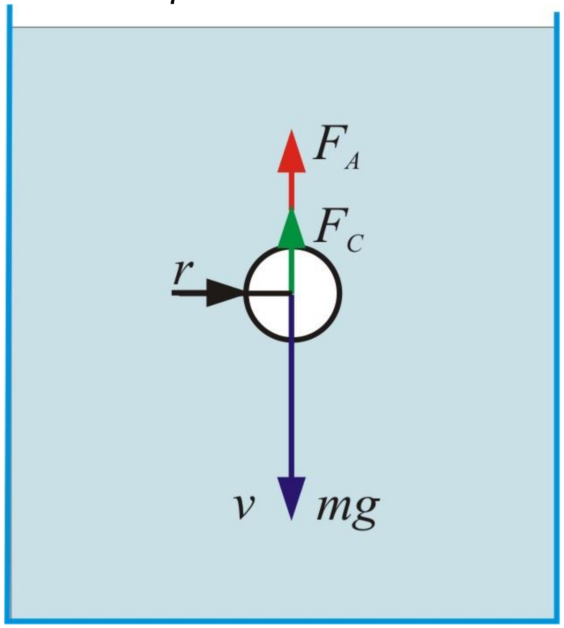
$$1000 < Re < 2000.$$

- При $Re > 2300$ (для гладких труб) течение - турбулентное.

6.5. Экспериментальное определение вязкости

- Стокс предложил метод определения вязкости, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.
- На шарик радиуса r, падающий в жидкости вниз, действуют три силы: ***сила тяжести***, ***сила Архимеда F_A*** и ***сила сопротивления F_c***, эмпирически установленная Стоксом:

$$F_c = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v.$$



- Запишем:

$$P - F_A - F_c = 0, \qquad \text{или}$$

$$4/3\pi \cdot r^3 \rho_ш g - 4/3\pi \cdot r^3 \rho_{жс} g - 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 0.$$

Делим на $2\pi \cdot r$ и умножаем на 3:

$$2 \cdot r^2 \rho_ш g - 2 \cdot r^2 \rho_{жс} g - 9 \cdot \eta \cdot v = 0.$$

- Отсюда для известной скорости, измеренной опытным путем, имеем:

$$\eta = \frac{2(\rho_ш - \rho_{жс}) \cdot g \cdot r^2}{9v}.$$

6.5. Движение тел в жидкостях и газах

- На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействующую их обозначим R), одна из которых направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), – ***лобовое сопротивление*** (R_x), а вторая – перпендикулярно этому направлению – ***подъёмная сила*** (R_y).

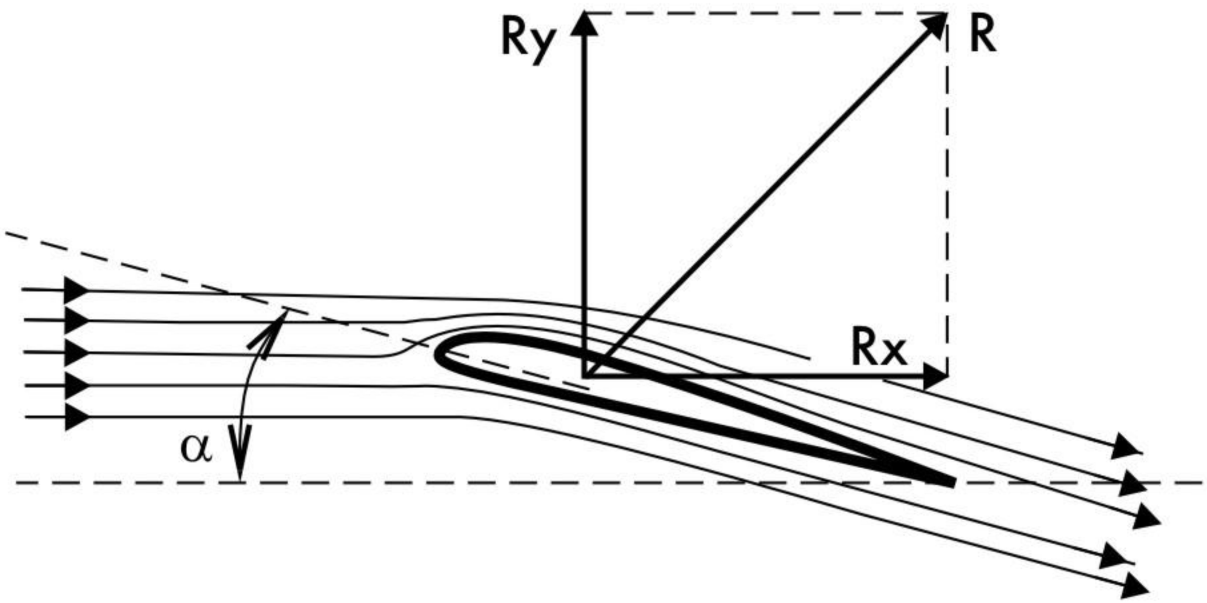


Рис. 6.8

- Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, ***то на него действует только лобовое сопротивление R_x, подъемная же сила R_y в этом случае равна нулю.***
- При движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания), вследствие вязкости среды, в области, прилегающей к поверхности тела, образуется ***пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями***.
- Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным ***коэффициентом сопротивления C_x***, определяемым экспериментально:

$$R_x = C_x \frac{\rho \cdot \upsilon^2}{2} S,$$

где ρ – плотность среды; v – скорость движения тела; S – наибольшее поперечное сечение тела.

- Составляющую R_x можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.
- Подъемная сила может быть определена аналогичной формулой:

$$R_y = C_y \frac{\rho \upsilon^2}{2} S,$$

где C_y – ***безразмерный коэффициент подъемной силы***.

- Для крыла самолета требуется большая подъёмная сила при малом лобовом сопротивлении (это условие выполняется при малых углах атаки α (угол к потоку).
- Крыло тем лучше удовлетворяет этому условию, чем больше величина $K = C_y/C_x$, называемая ***качеством крыла***.
- Большие заслуги в конструировании требуемого профиля крыла и изучении влияния геометрической формы тела на коэффициент подъемной силы принадлежат ***«отцу русской авиации» Н.Е. Жуковскому***.

Вопросы, выносимые на семинар:

- 1. Давление в жидкости и газе.
- 2. Уравнение неразрывности.
- 3. Уравнение Бернулли и следствия из него.
- 4. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей.
- 5. Движение тел в жидкостях и газах.