

# ЛЕКЦІЯ. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

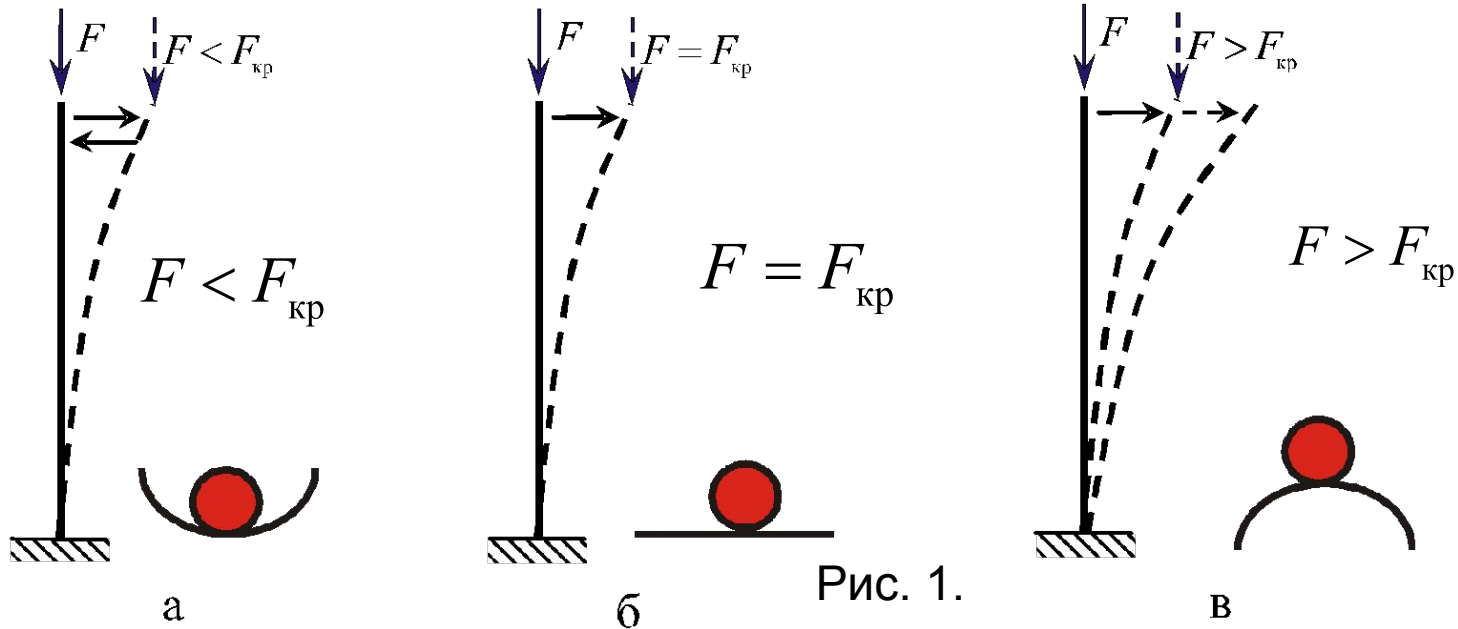
## План:

1. Поняття про стійку та нестійку форми рівноваги.
2. Задача Ейлера про стійкість стиснутого стержня.
3. Вплив умов закріплення стержня на значення критичної сили.
4. Критичні напруження. Границі застосування формули Ейлера. Формула Тетмайєра – Ясінського.
5. Практичні розрахунки стиснутих стержнів на стійкість.

# 1. Поняття про стійку та нестійку форми рівноваги.

2

**Стійкість стержня** – це здатність стержня зберігати форму початкової стійкої рівноваги.



Розглянемо стиснутий прямолінійний стержень, поперечні розміри якого малі порівняно з його довжиною (рис. 1). Під дією стискувального навантаження, яке поступово зростає, стержень почергово перебуває в трьох формах рівноваги: стійкій, байдужій і нестійкій. Існує аналогія між поведінкою стиснутого стержня та рівновагою кульки (стійкістю кульки) на поверхні. Стиснутий стержень перебуває в стані стійкої рівноваги, якщо стискувальна сила  $F$  не перевищує критичного значення (рис. 1, а). Рівновага стиснутого стержня є байдужою, якщо стискувальна сила досягає значення, яке називають критичним (рис. 1, б). Стиснутий стержень перебуває у стані нестійкої рівноваги, якщо стискувальна сила перевищує критичне значення (рис. 1, в).

**Втрата стійкості** – це відхилення осі стержні від прямолінійної форми рівноваги, спричинене дією стискувальної сили. Втрата стійкості може відбуватися і тоді, коли напруження від дії критичної сили не досягають навіть **границі пропорційності**. Тому стиснуті стержні розраховують не тільки на міцність, але і на стійкість.

Стискувальне навантаження, перевищення якого призводить до втрати стійкості початкової форми рівноваги, називають **критичним**.

Для забезпечення роботи стиснутих стержнів необхідно, щоб стискувальне зусилля було меншим за критичну силу

$$F_{\max} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{ст}}}, \quad (1)$$

де  $n_{\text{ст}}$  - коефіцієнт запасу стійкості, який завжди більший за одиницю.

Для сталі -  $n_{\text{ст}} = 1,8 \dots 3$ ; для чавуну -  $n_{\text{ст}} = 5,0 \dots 5,5$ ; для дерева -  $n_{\text{ст}} = 2,8 \dots 3,2$ .

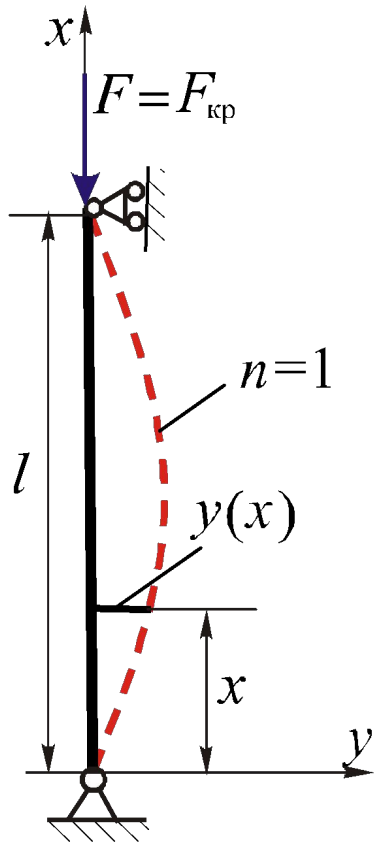
Явище втрати стійкості може виникати в багатьох елементах конструкцій різної форми. Тонкостінна труба, навантажена зовнішнім тиском, може втратити стійкість і набрати форми еліпса, коли інтенсивність навантаження перевищує критичне значення. Втратити стійкість можуть і довгі балки, що працюють на згинання. Якщо значення сили стає більшим за критичне, то порушується стійкість прямого (плоского) згинання, поперечні перерізи балки викривляються і виникає явище просторового згинання та кручення довгої консольної балки.

Отже, щоб запобігти втраті стійкості конструкції необхідно забезпечити виконання умови стійкості (1). Для цього потрібно вміти визначати критичне навантаження.

## 2. Задача Ейлера про стійкість стиснутого стержня. 4

Нехай прямий стержень з шарнірно закріпленими кінцями (рис. 2) стискується силою, що дорівнює критичній. Припускають, що напруження від дії критичної сили не перевищує границі пропорційності. У випадку такого навантаження стержень перебуває у стані байдужої рівноваги. Розглянемо стан стержня із зігнутою віссю, але вважаємо відхилення від прямої форми осі малим. Тоді диференціальне рівняння зігнутої осі стержня має вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_{\min}}. \quad (2)$$



Початок координат вибираємо в нижньому кінці стержня, вісь  $x$  спрямуємо догори. В формулі (2):  $I_{\min}$  – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня, оскільки поздовжнє згинання відбувається завжди в площині найменшої жорсткості;  $y$  – відхилення центра ваги довільного перерізу на відстані  $x$  від початку координат;  $M(x)$  згинальний момент у довільному перерізі зігнутого стержня:

$$M(x) = -F_{\text{кр}} y.$$

З урахуванням виразу для  $M(x)$  рівняння (2) можна записати в наступному вигляді:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F_{\text{кр}}}{EI_{\min}} y = 0. \quad (3)$$

Рис. 2

Уведемо в рівняння (3) позначення:

$$k^2 = \frac{F_{\text{кр}}}{EI_{\text{min}}}. \quad (4)$$

Отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0. \quad (5)$$

Загальний розв'язок (5) має вигляд:

$$y = A \sin kx + B \cos kx. \quad (6)$$

де  $A$  та  $B$  – сталі інтегрування, які визначають з граничних умов, тобто умов закріплення кінців стержня.

Для показаного на рис. 2 стержня граничні умови, що відповідають шарнірному обпиранню, такі:

$$1) \ x = 0; y = 0; \quad 2) \ x = l; y = 0. \quad (7)$$

Після підстановки першої умови (7) у загальний розв'язок (6) отримаємо:

$$y(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1, \quad \text{звідси } B=0.$$

Підставивши значення  $B$  у другу граничну умову (7), маємо:

$$A \sin kl = 0. \quad (8)$$

## Задача Ейлера

6

Якщо  $A=0$ , то тоді відповідно до (6)  $y=0$ , тобто прогин відсутній. Це суперечить фізичному змісту задачі. Отже, щоб вираз (8) дорівнював нулю, потрібно:

$$\sin kl = 0.$$

Звідси:  $kl = \pi \cdot n; n = 1, 2, 3 \dots$  Або  $k = \frac{\pi \cdot n}{l}.$  (9)

Підставивши значення  $k$  з формули (9) в (4) для множини значень критичної сили отримаємо:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot n^2 EI_{\text{min}}}{l^2}. \quad (10)$$

Для розрахунків на стійкість практичне значення має найменша критична сила при  $n=1$ :

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l^2}. \quad (11)$$

Залежність (11) називають формулою Ейлера для визначення критичної сили.

Зігнута вісь стержня у стані байдужої рівноваги буде синусоїдою, рівняння якої

$$y(x) = A \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}. \quad (12)$$

### 3. Вплив умов закріплення стержня на значення критичної сили. 7

Формула Ейлера отримана для стержня з шарнірно закріпленими кінцями. Такий випадок закріплення називають основним. Використовуючи властивості пружної лінії отриманий для основного випадку розв'язок легко поширити і на інші випадки закріплення стержня (рис. 3).

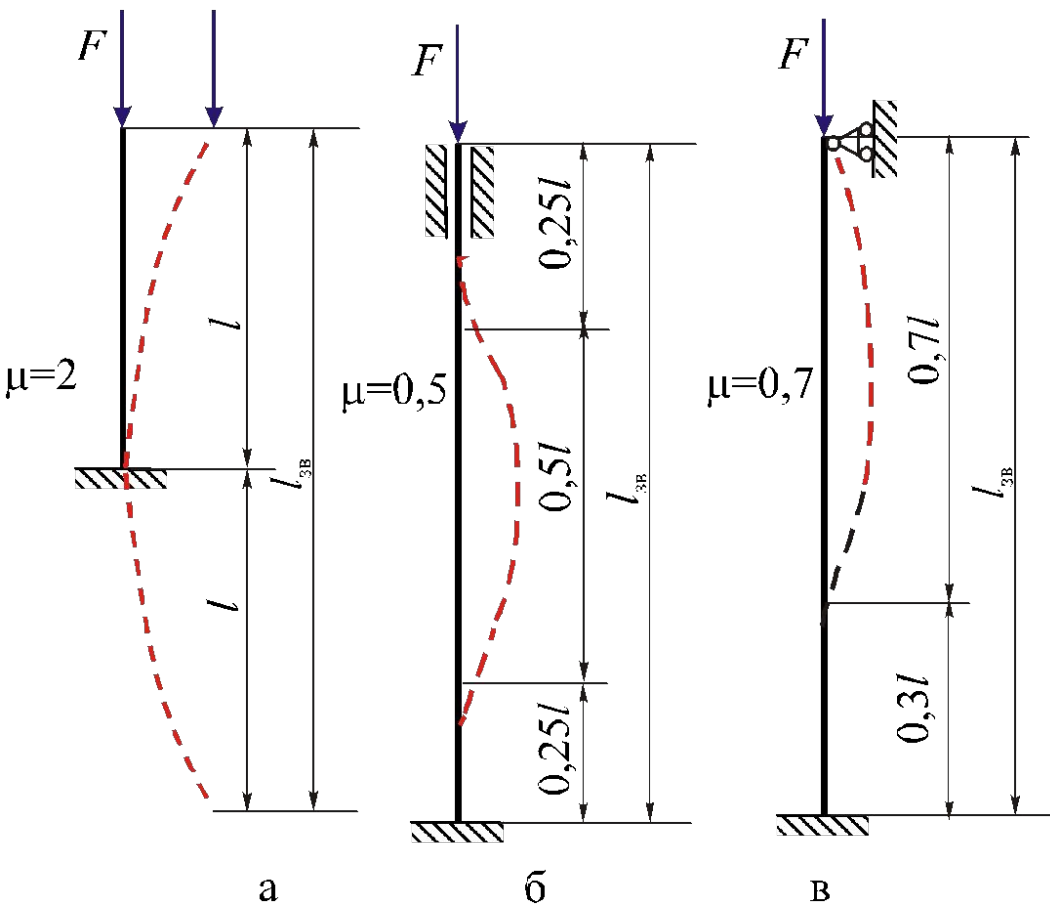


Рис. 3

1. Стержень завдовжки  $l$  (рис. 3, а) одним кінцем жорстко закріплений, а до другого вільного кінця прикладена стискувальна сила. Шляхом дзеркального відображення відносно жорсткого закріплення пружну лінію такого стержня легко звести до пружної лінії шарнірно опертого стержня завдовжки  $2l$ . Отже, критична сила для стержня з одним жорстко закріпленим кінцем, а другим вільним буде така ж, як і для стержня з шарнірно обпертими кінцями, але в два рази більшої довжини:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}.$$

2. Стержень завдовжки  $l$  (рис. 3, б), обидва кінці якого жорстко закріплені. Після втрати стійкості середня частина цього стержня завдовжки  $0,5 l$  працює в таких самих умовах, що і стержень з шарнірно закріпленими кінцями. Тоді отримують дві півхвилі пружної лінії: середня завдовжки  $0,5 l$  та дві крайні половинки півхвилі завдовжки  $0,25 l$ . Критична сила в цьому випадку:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(0,5l)^2}.$$

3. Стержень завдовжки  $l$  (рис. 3, в), жорстко закріплений одним кінцем і шарнірно обпертий іншим. У цьому випадку верхня частина стержня завдовжки  $0,7l$  перебуває в тих самих умовах, що і стержень з шарнірно закріпленими кінцями. Тоді критична сила:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(0,7l)^2}.$$

Отримані результати можна об'єднати та записати формулу критичної сили за різних способів закріплення кінців стержня в такому вигляді:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}. \quad (13)$$

У формулі (13)  $\mu$  - коефіцієнт зведення довжини стержня, який набуває значень, що залежать від способу закріплення кінців стержня. Для розглянутих випадків значення коефіцієнта вказано на рис. 3.



## 4. Критичні напруження. Границі застосування формули Ейлера. Формула Тетмайєра – Ясінського. 9

Під дією критичної сили у стиснутому стержні виникають критичні напруження, які визначають за формулою:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{l (\mu)^2}. \quad (14)$$

У формулі (14) співвідношення:  $\frac{I_{\text{min}}}{A} = i_{\text{min}}^2$

є квадратом мінімального радіуса інерції поперечного перерізу. Тоді критичне напруження можна записати так:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\left( \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}} \right)^2}.$$

Уведемо безрозмірну величину  $\lambda$ , яку називають **гнуцкістю** стержня. Гнуцкість стержня дорівнює відношенню зведеної довжини до мінімального радіуса інерції поперечного перерізу:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}}.$$

## Критичні напруження

10

Тоді формулу для критичних напружень запишемо так:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Оскільки формула Ейлера виведена з припущенням, що критичні напруження не перевищують границі пропорційності, тобто для матеріалу стержня має виконуватись лінійний закон Гука. Тому існують певні межі застосування формули Ейлера, які визначають на підставі нерівності:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}.$$

З цієї нерівності визначимо умову, якою має бути гнучкість стержня, щоб можна було застосовувати формулу Ейлера:

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Гранична гнучкість стержня:

$$\lambda_{\text{гр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Отже, формулу Ейлера можна застосовувати тоді, коли  $\lambda \geq \lambda_{\text{гр}}$ .

Для сталі Ст. 3 –  $\lambda_{\text{гр}} = 100$  Для дерева –  $\lambda_{\text{гр}} = 110$  Для чавуна –  $\lambda_{\text{гр}} = 80$

Якщо гнучкість стержня менша від граничної, то формулу Ейлера застосовувати не можна, тому що критичні напруження перевищують границю пропорційності і не виконується закон Гука.

У таких випадках використовують емпіричні формули, що ґрунтуються на результатах експериментальних досліджень. Зокрема застосовують емпіричну формулу для обчислення критичних напружень за межею пропорційності, запропоновану вченими Тетмайєром і Ясинським

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda, \quad (15)$$

де  $a$  та  $b$  – коефіцієнти, що залежать від матеріалу стержня. Їх визначають експериментально. Наприклад, для сталі Ст.3 –  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

За формулою (15) критичні напруження обчислюють для стержнів, гнучкості яких міститься в межах:

$$\lambda_{\text{ор}} < \lambda < \lambda_0.$$

де величину  $\lambda_0$  визначають з умови, що величина критичного напруження за формулою (15) дорівнює граничному напруженню при стисканні.

Для пластичних матеріалів:  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{Т}}$ .

Для крихких матеріалів:  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{мц}}$ .

Для сталі Ст.3  $\lambda_0 = 60$ , коли  $60 \leq \lambda \leq 100$  - це стержні середньої гнучкості, коли  $\lambda > 100$  – стержні великої гнучкості. Стержні, для яких  $\lambda < \lambda_0$ , розраховують тільки на міцність. Розрахунок таких стержнів на стійкість не проводять.

Залежність між критичними напруженнями та гнучкістю можна подати графічно (рис. 4).

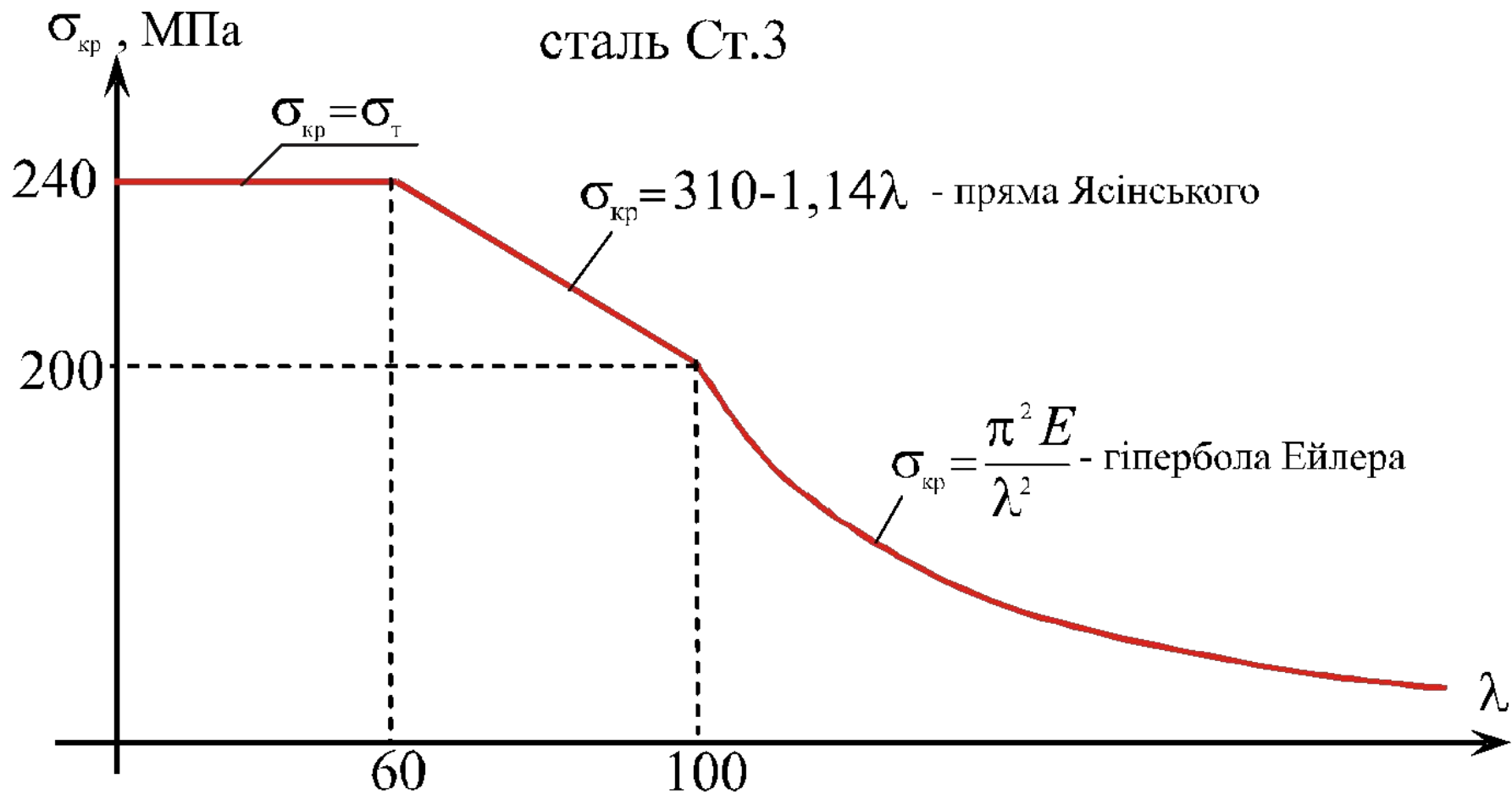


Рис. 4

## 5. Практичні розрахунки стиснутих стержнів на стійкість 13

У розрахунках на стійкість критичне напруження є руйнівним, так само як границя текучості чи границя міцності в розрахунках на міцність. Тому введено поняття допустимого напруження на стійкість, яке визначають так:

$$[\sigma_{\text{ст}}] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{ст}}},$$

де  $n_{\text{ст}}$  – коефіцієнт запасу стійкості. Умова стійкості вимагає, щоб напруження, яке виникає при стисканні, не перевищувало допустимого напруження на стійкість:

$$\sigma = \frac{F_{\text{max}}}{A} \leq [\sigma_{\text{ст}}].$$

Проте обчислення допустимого напруження на стійкість ускладнюється внаслідок того, що критичне напруження залежить не лише від властивостей матеріалу, але і від гнучкості стержня. У практичних розрахунках доцільно визначати залежність між допустимими напруженнями на стійкість та допустимими напруженнями на міцність при стисканні. Тому вводять коефіцієнт  $\varphi$  зменшення основного допустимого напруження на міцність при розрахунках на стійкість. З урахуванням цього коефіцієнта умова стійкості має вигляд

$$\sigma = \frac{F_{\text{max}}}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]. \quad (16)$$

## Три типи розрахунків стиснутих стержнів на стійкість

За допомогою умови стійкості (16) розв'язують задачі трьох типів.

1. Перевірка стійкості полягає у перевірці виконання умови стійкості (16).

2. Визначення допустимого навантаження. Величину допустимої стискувальної сили визначають за залежністю:

$$F_{\max} = \varphi \cdot A \cdot [\sigma].$$

3. Підбір поперечного перерізу стержня (проектний розрахунок). Площу поперечного перерізу визначають методом послідовних наближень за умовою:

$$A \geq \frac{F_{\max}}{\varphi \cdot [\sigma]}.$$

З питанням підбору розмірів поперечного перерізу центрально стиснутого стержня тісно пов'язане питання раціональної форми поперечних перерізів. Небезпека втрати стійкості в стиснутих стержнях тим менша, чим менші їх найбільші гнучкості, тобто чим більші при фіксованій величині площі поперечних перерізів та радіуси інерції перерізів. Матеріал у таких перерізах повинен бути розміщений якомога далі від центра перерізу. Цим вимогам найкраще відповідають порожнисті всередині перерізи з тонкою стінкою.