Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 1

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. ЗЛП

2018/2019 уч. год

Основная задача линейного программирования

Задача, в которой требуется найти максимум (или минимум) линейной формы

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ \\ 0 \le x_i \text{ для всех } i \in [1,2,\ldots,n] \end{cases}$$

называется задачей линейного программирования.

Постановка основной задачи линейного программирования

В линейном программировании изучаются свойства решений линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & \left(i = \overline{1,k}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \left(i = \overline{k+1,m}\right) \\ x_j \ge 0 & \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases} \qquad (*)$$

a_{ij}, b_i - числовые коэффициенты

Определения

Система (*) называется системой ограничений.

$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, удовлетворяющий системе ограничений, называется допустимым планом.

Основной задачей линейного программирования называется задача о нахождении такого допустимого плана, который доставляет максимум функции

$$F(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (**)$$

называемой целевой функцией

Графический метод решения ОЗЛП с двумя переменными. Пример 1

Для производства двух видов изделия требуется три вида ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты.

Потребности в ресурсах, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида заданы:

Тип ресурса	Единица продукции вида I	Единица продукции вида II	Запас ресурса
Дерево ($м^2$)	1	3	24
Пластик ($м^2$)	4	1	24
Трудозатраты (чел/час)	3	2	23
Прибыль (руб.)	200	300	

Математическая модель задачи

Требуется найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

Введем обозначения:

x_1 - план выпуска продукции 1-го вида,

x_2 - план выпуска продукции 2-го вида.

В соответствии с данными таблицы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 4x_1 + x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

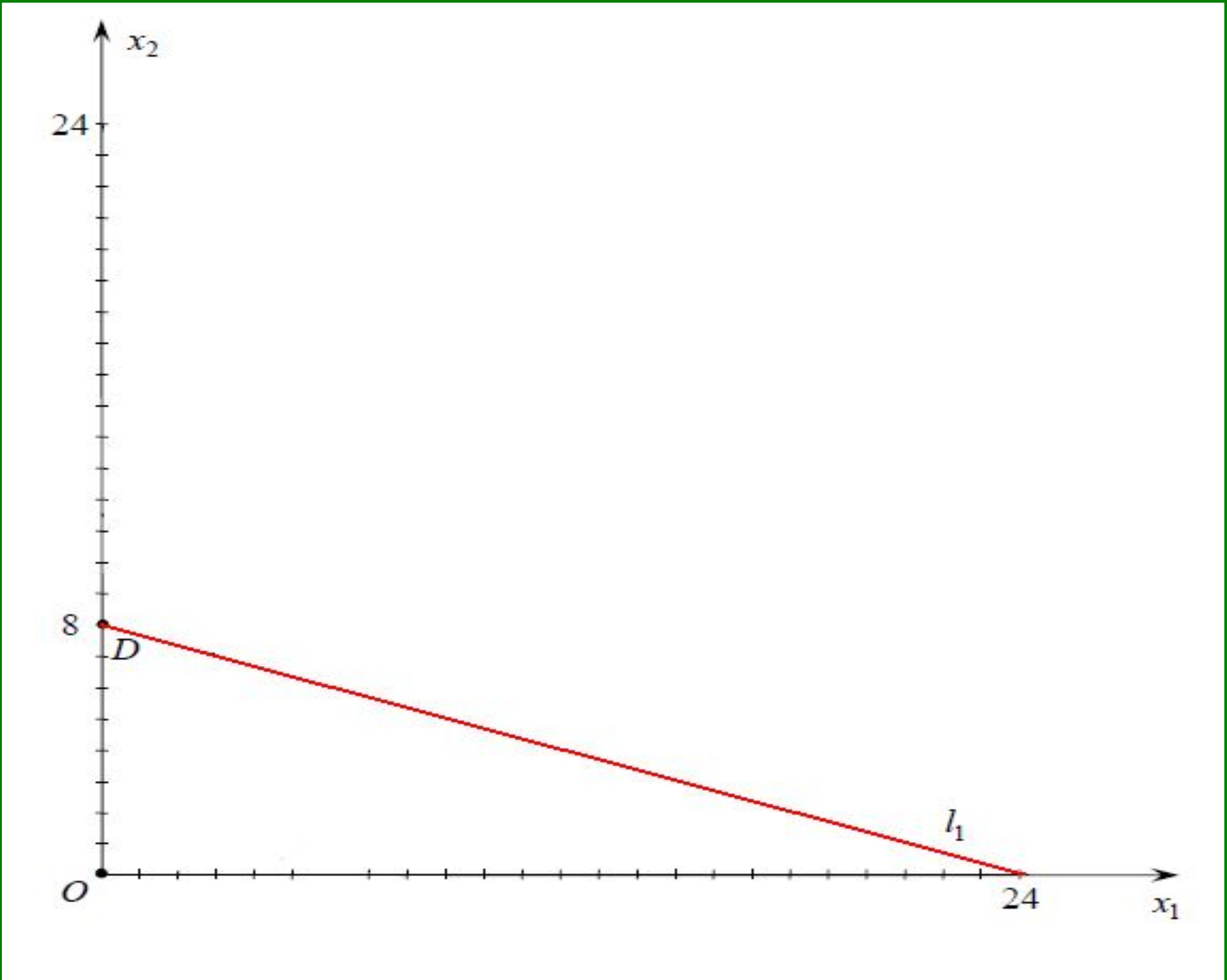
- система ограничений

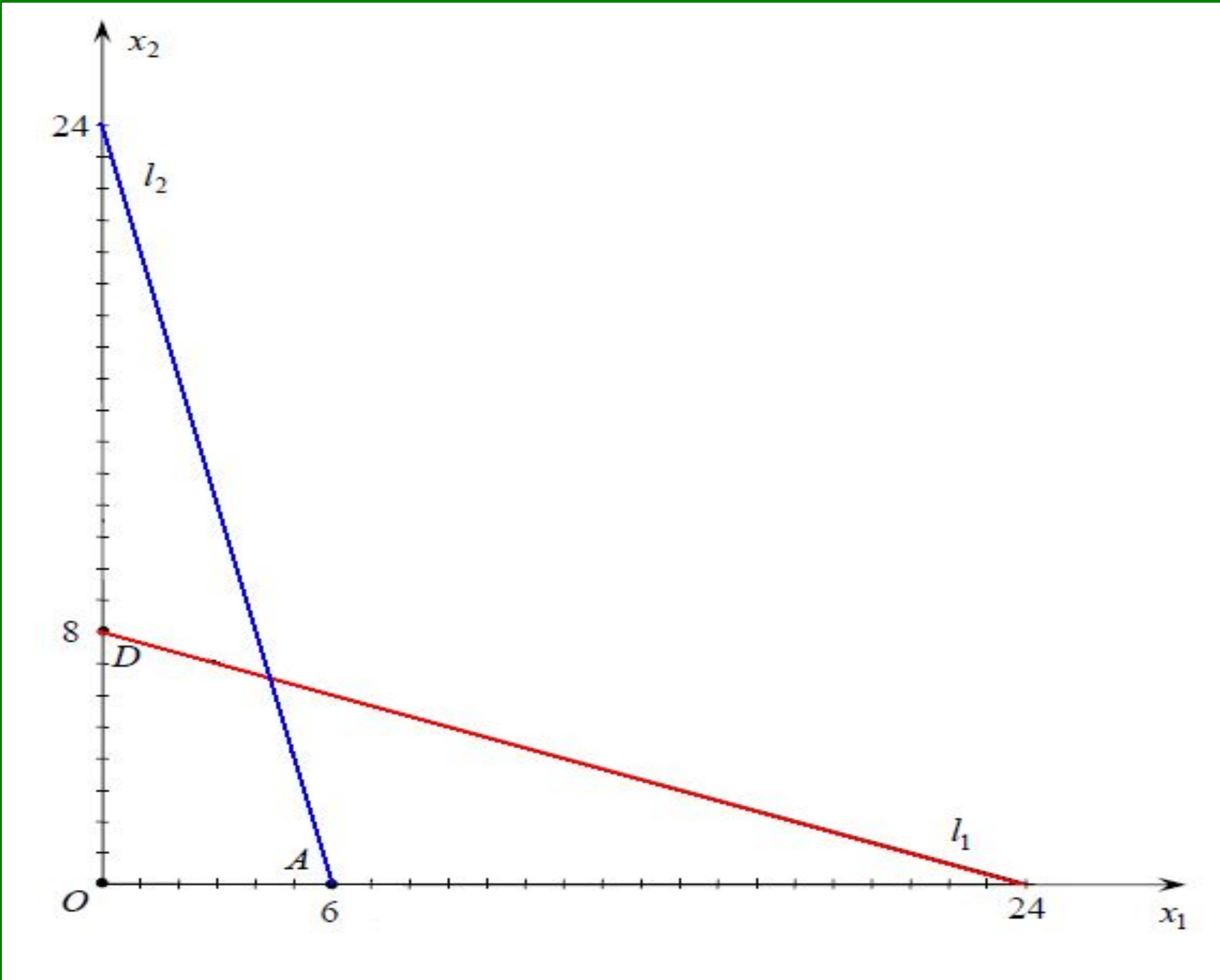
Математическая модель задачи

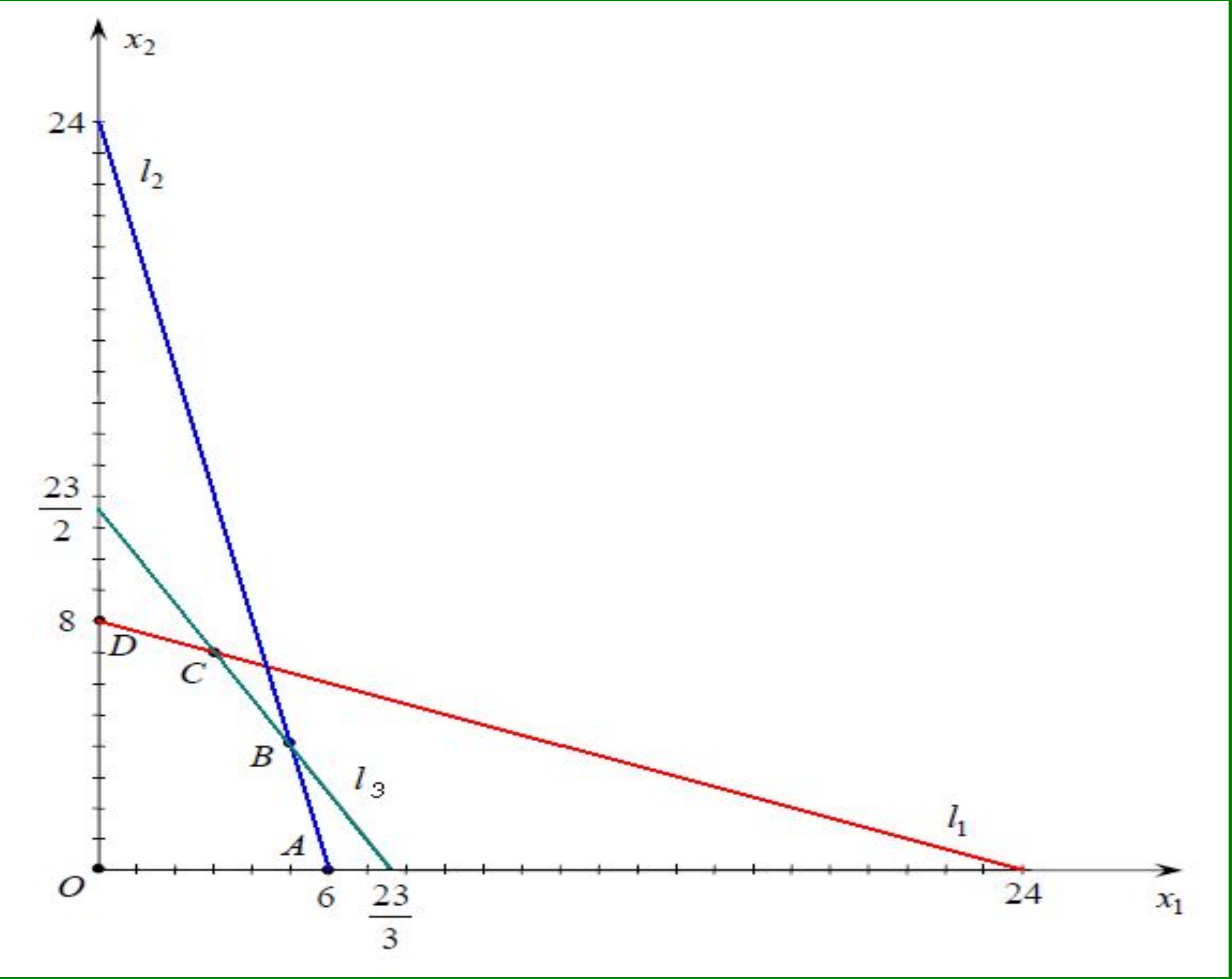
Требуется найти такой план (x_1, x_2), который доставит максимум целевой функции

$$F(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$$

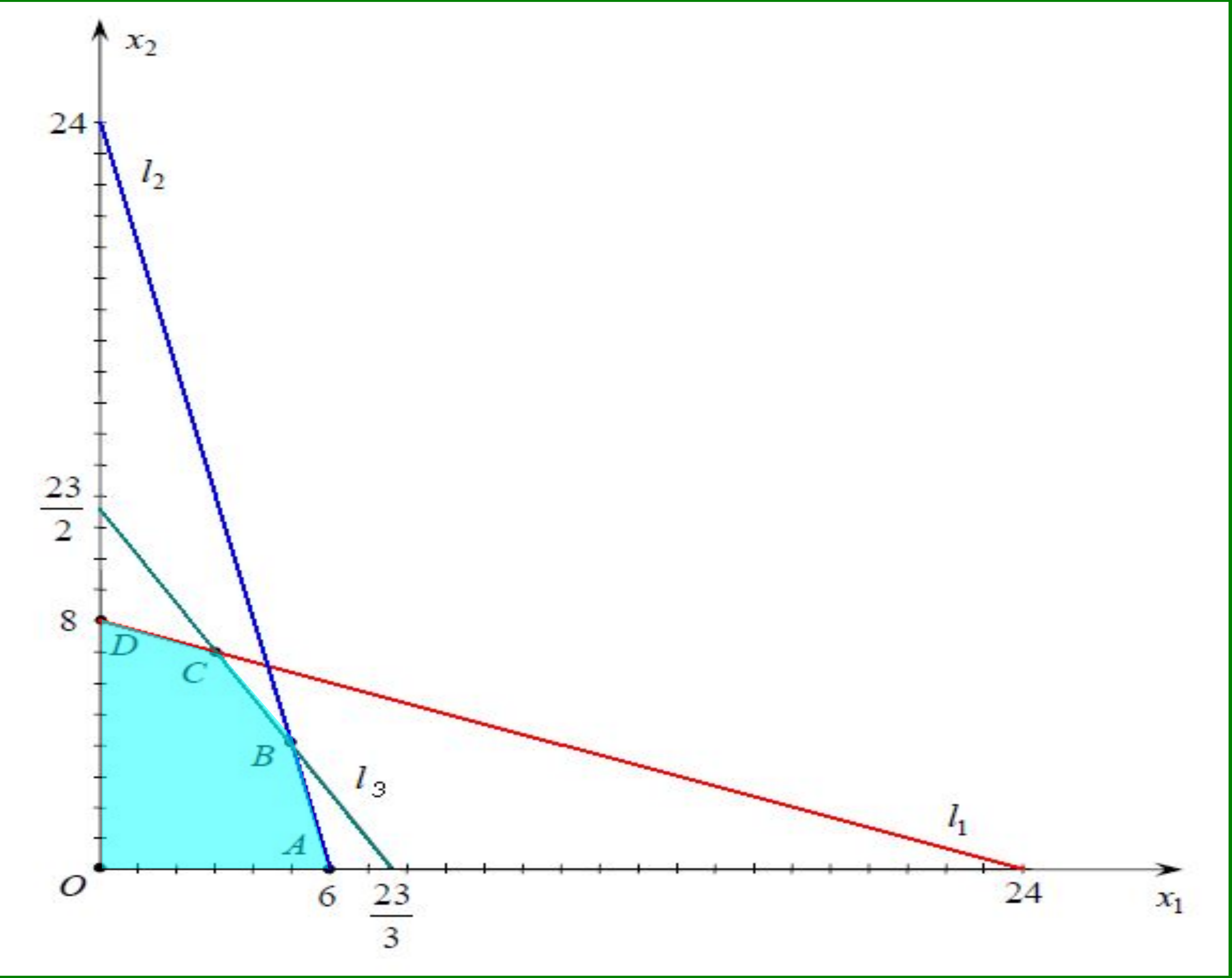
Построим на плоскости x_1Ox_2 область, заданную системой ограничений.


x_2
24
8
D
l_1
O
24
x_1

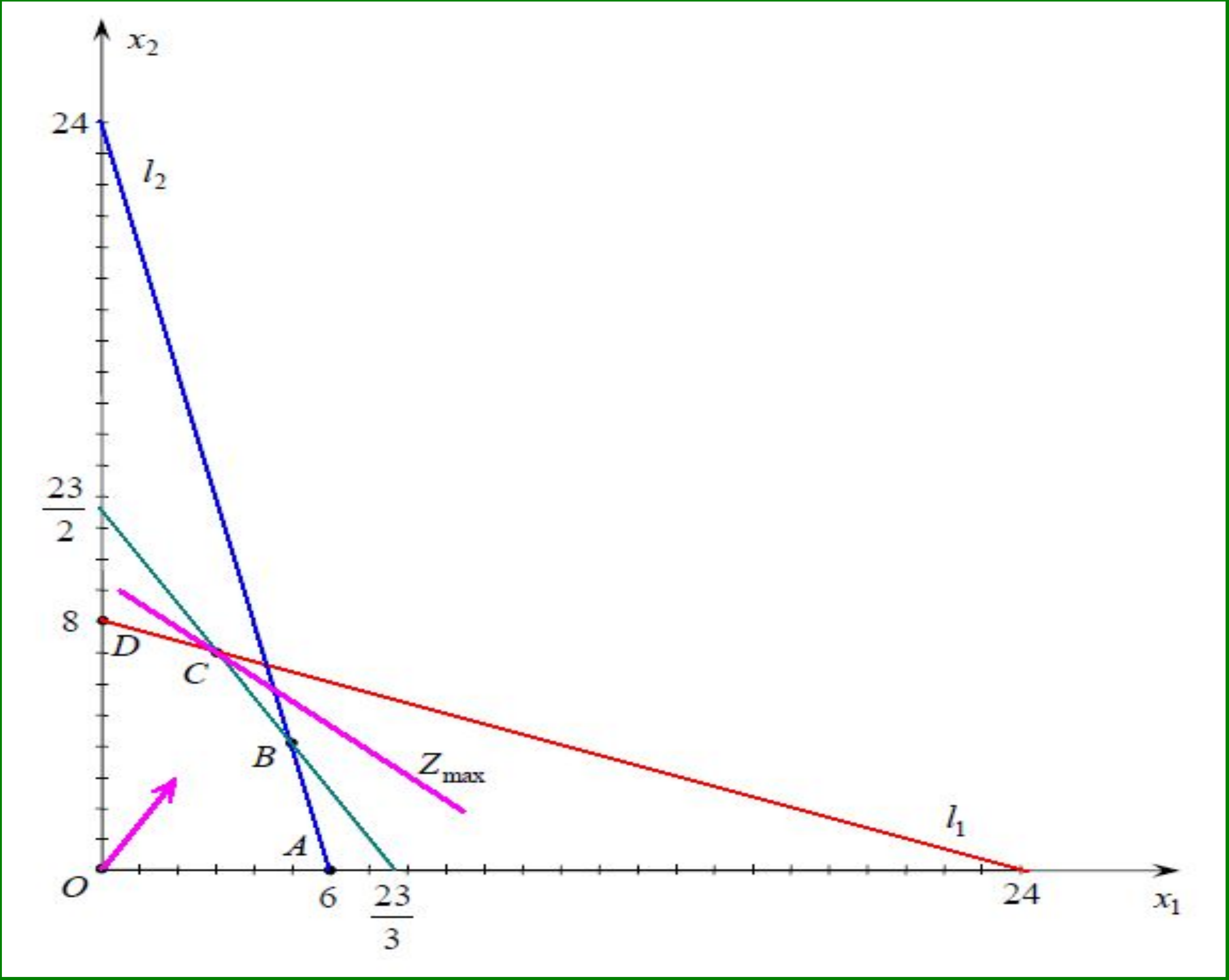

x_2
24
l_2
8
D
A
O
6
l_1
24
x_1



x_2
24
l_2
$\frac{23}{2}$
8
D
C
B
l_3
l_1
A
O
6
$\frac{23}{3}$
24
x_1



x_2
24
l_2
$\frac{23}{2}$
8
D
C
B
l_3
l_1
A
O
6
$\frac{23}{3}$
24
x_1



x_2
24
l_2
$\frac{23}{2}$
8
D
C
B
Z_{max}
l_1
A
O
6
$\frac{23}{3}$
24
x_1

Найдем координаты вершин пятиугольника OABCD. Координаты точки B удовлетворяют СЛУ

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B} = (5;4)$$

Координаты точки C удовлетворяют СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{C} = (3;7)$$

A=(6;0); D=(0;8); O=(0;0).

Значения F в вершинах OABCD

$$F(O) = F(0;0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = \quad 0 \quad ;$$

$$F(A) = F(6;0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$$

$$F(B) = F(5;4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$$

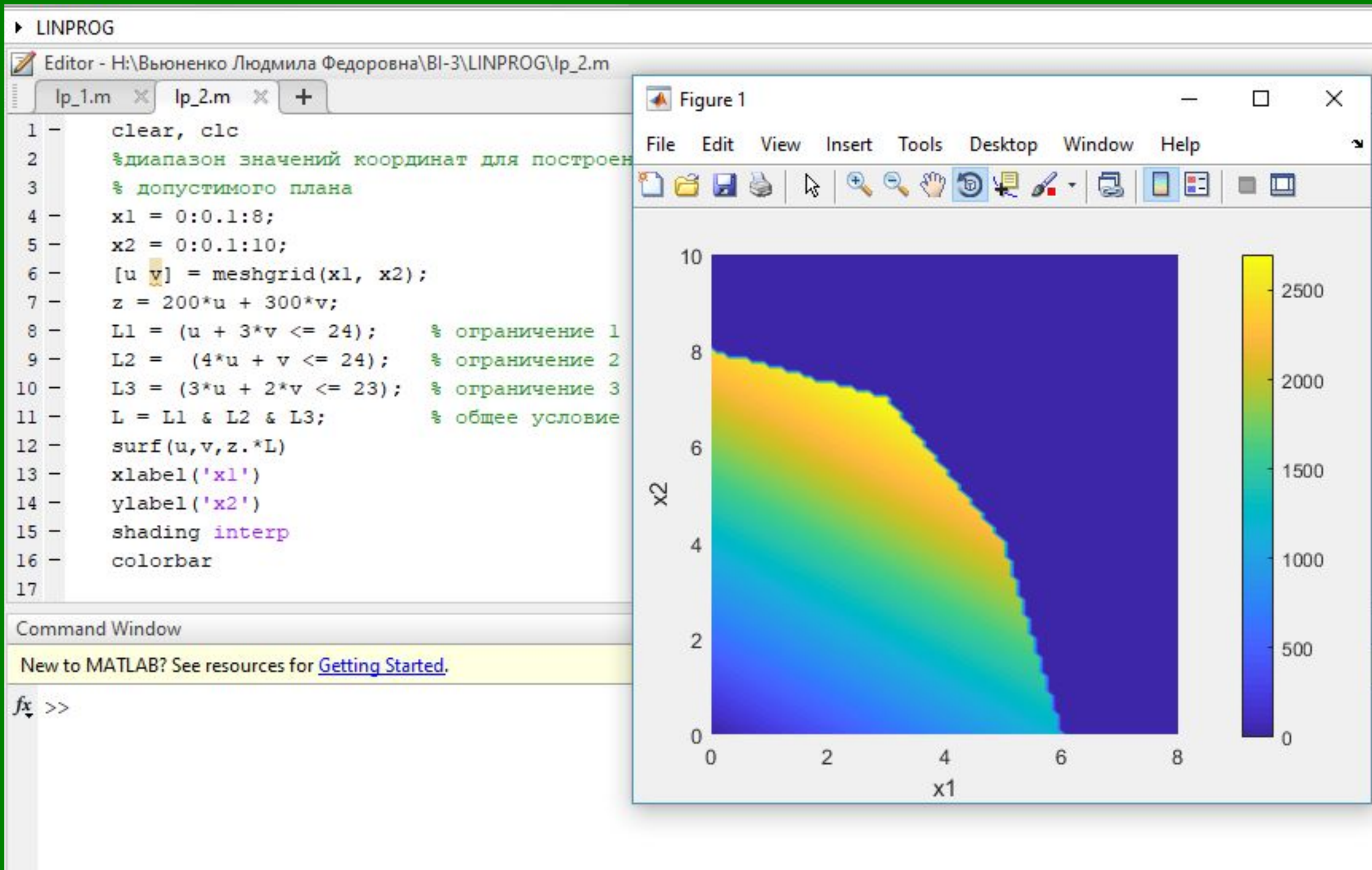
$$F(C) = F(3;7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$$

$$F(D) = F(0;8) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 8 = 2400.$$

Наибольшая прибыль достигается при выпуске

3 единиц продукции 1-го типа и 7 единиц 2-го типа.

Программные средства решения ЗЛП



ЗЛП. Пример 2

На некотором предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого типа или 300 изделий второго типа в сутки; в то же время отдел технического контроля в состоянии проверить не более 150 изделий (любого типа) в сутки. Известно, далее, что изделие первого типа стоит вдвое дороже, чем изделие второго типа. Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько – то изделий первого типа и столько – то второго в сутки), который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Решение

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям :

$$\begin{cases} 3x + y \le 300 \\ x + y \le 150 \\ L(x, y) = 2x + y \to \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(75,75) \in P$ *линейная функция достигает максимального значения.*

ЗЛП. Пример 3

Предприятие может производить два вида изделий "А" и "В", располагая для их изготовления ограниченными ресурсами материалов (чугуна и стали соответственно 1650 *кг и* 1200 *кг) и оборудования (в количестве* 2060 *станков – часов).*

На производство одной единицы изделия "А" требуется 10 *кг чугуна,* 10 *кг стали и* 23 *станков – часов.*

На производство одной единицы изделия "В" требуется 30 *кг чугуна,* 20 *кг стали и* 18 *станков – часов.*

Известно, далее, что предприятие получает прибыль от реализации одного изделия "А" в размере 34 *"у.е.", а от одного изделия "В" –* 40 *"у.е."*

Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько – то изделий первого типа и столько – то второго), который обеспечивал бы наибольшую прибыль, при условии, что изделия "А" должно быть изготовлено не менее 20 *штук, а изделия "В" не менее* 15 *штук.*

Решение

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} 10x + 30y \le 1650 \\ 10x + 20y \le 1200 \\ 23x + 18y \le 2060 \\ 20 \le x,\ \ 15 \le y \\ L(x, y) = 34x + 40y \to \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(70{,}25) \in P$ линейная функция достигает максимального значения, которое равно 3380 "у.е.".

ЗЛП. Пример 4

Для изготовления двух видов изделий "А" и "В" используются три вида сырья.

На производство одной единицы изделия "А" требуется затратить сырья первого вида 13 кг, сырья второго вида – 32 кг, сырья третьего вида – 58 кг.

На производство одной единицы изделия "В" требуется затратить сырья первого вида 24 кг, сырья второго вида – 32 кг и сырья третьего вида – 29 кг.

Известно, далее, что предприятие получает прибыль от реализации одного изделия "А" в размере 4 "у.е.", а от одного изделия "В" – 3 "у.е."

Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько-то изделий первого типа и столько-то второго), который обеспечивал бы наибольшую прибыль, при условии, что производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 312 кг, сырьем второго вида – 480 кг, сырьем третьего вида – 696 кг.

Решение

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям

$$\begin{cases} 13x + 24y \le 312 \\ 32x + 32y \le 480 \\ 58x + 29y \le 696 \\ L(x,\ y) = 4x + 3y \to \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(9,6) \in P$ линейная функция достигает максимального значения, равного 54 "у.е.".

ЗЛП. Пример 5

Необходимо перебазировать имеющиеся в пунктах "А" и "В" соответственно 6 и 4 машины. В пункты "С" (3 машины) и "Д" (7 машин). Расстояние между пунктами отправления и назначения в километрах соответственно составляют:

От пункта "А" до пункта "С" – 80 км, а до пункта "Д" – 30 км;

От пункта "В" до "С" – 60 км, а до пункта "Д" – 90 км.

Необходимо спланировать перевозки так, чтобы суммарный пробег в машино – километрах оказался наименьшим.

Решение

Искомый план перевозки машин задается с помощью четырех неотрицательных целых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, *(*x_1 *– количество машин, перевезенных из "А" в "С",*
x_2 *– количество машин, перевезенных из "А" в "Д", соответственно,*
x_3, x_4 *– количество машин, перевезенных из "В" в "С" и "Д", которые должны удовлетворять следующим условиям*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 7 \\ L(x, y) = 80x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 90x_4 \to \min \end{cases}$$

Простой перебор допустимых значений в данной задаче дает следующий ответ.
В точке $M(0,6,3,1) \in P$ *линейная функция достигает минимального значения,* *равного* 4 50.