Динамика вращательного движения твердого тела

Лекция №5

План лекции

- 1. Движение твердого тела (плоское движение).
- 2. Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения.
- 3. Момент инерции. Теорема Штейнера.
- 4. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении.
- 5. Закон сохранения момента импульса.

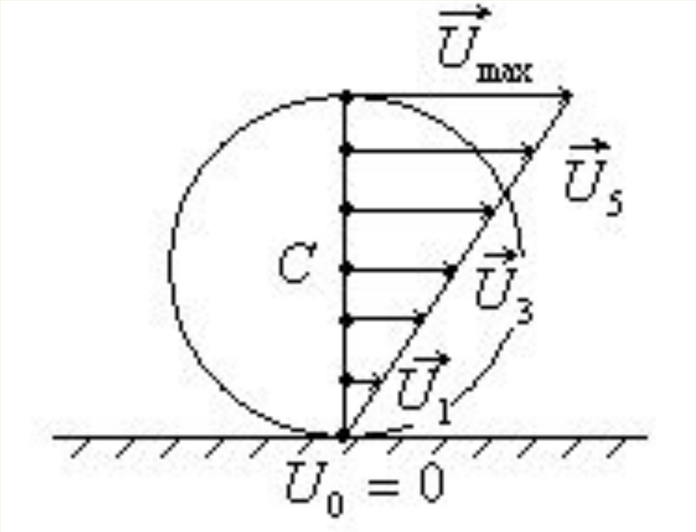
1. Движение твердого тела (плоское движение)

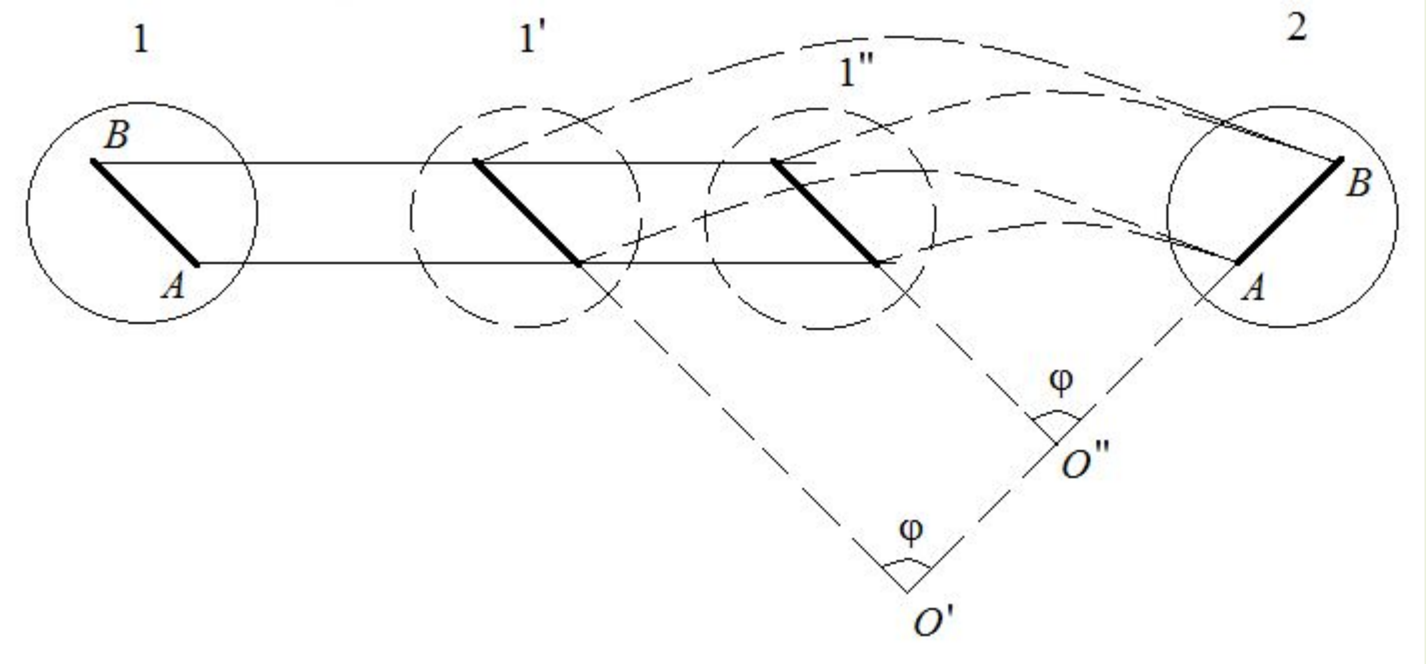
- Любое тело можно представить как систему материальных точек. Если расстояние между этими точками остается неизменным, при действии любых сил, то такое тело называют **абсолютно твердым**.

- **Поступательным** называют движение тела, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

- **Вращательным движением** твердого тела называется движение при котором все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

- **Плоским движением** называется движение точки, если ее траектория плоская кривая, т.е. траектория целиком лежит в одной плоскости.





Рассмотрим качение цилиндра по плоскости из положения 1 в положение 2. Это движение можно представить как сумму двух перемещений – поступательного из положения 1 в положение 1’ или 1” и поворота цилиндра вокруг оси О’ или оси О”. Такое разбиение перемещения может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, в любом случае поворот цилиндра производится на один и тот же угол ϕ.

Элементарное перемещение точки цилиндра разложим на два – поступательное и вращательное:

$$d\vec{s} = d\vec{s}_{п} + d\vec{s}_{в}$$

Разделим *ds* на промежуток времени *dt*, получим скорость точки

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}_{\text{п}}}{dt} + \frac{d\vec{s}_{\text{в}}}{dt} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}\,'$$

υ_0 – одинаковая скорость поступательного движения для всех точек тела;

υ' - различная скорость для разных точек тела, обусловленная вращением.

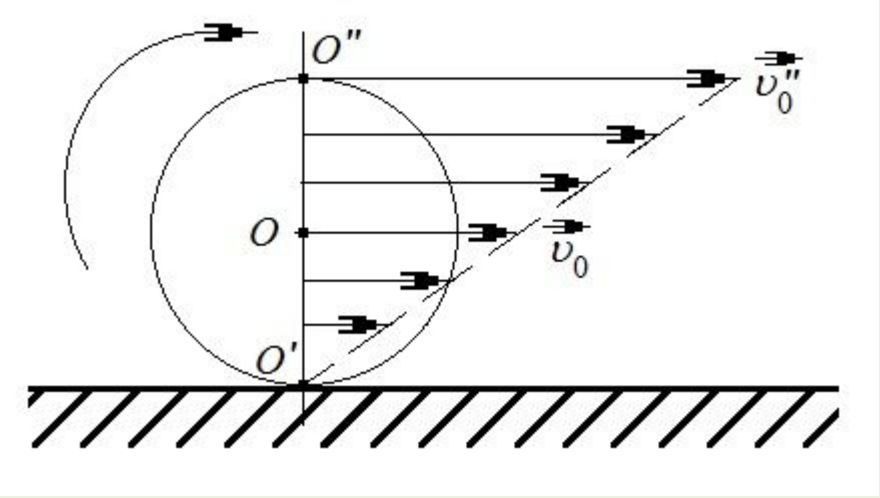
Плоское движение можно представить как сумму двух движений – поступательного со скоростью υ_0 и вращательного с угловой скоростью ω.

Линейная скорость точки обусловленная вращением тела, равна $\vec{\upsilon}\,' = [\vec{\omega}\,\vec{r}]$.

Скорость этой точки при сложном (плоском) движение можно представить в виде

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}]$$

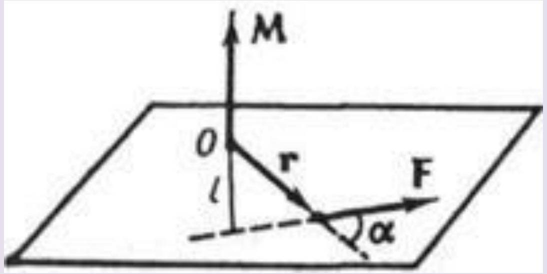
Движение цилиндра, катящегося без скольжения по плоскости можно представить как поступательное движение со скоростью υ_0 и одновременное вращение с угловой скоростью ω вокруг оси О, или как поступательное движение со скоростью $\upsilon=2\upsilon_0$ и вращение с угловой скоростью ω вокруг оси О”, либо как только одно вращение вокруг оси О’ с угловой скоростью ω.



2. Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения

А. Момент силы

Моментом силы M ***относительно неподвижной точки О*** называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса вектора r, проведенного из точки O в точку A приложения силы , на силу F:



$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]}$$

Момент силы $\vec{M}$ является ***псевдовектором***, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F. Вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости образованной векторами r и F.

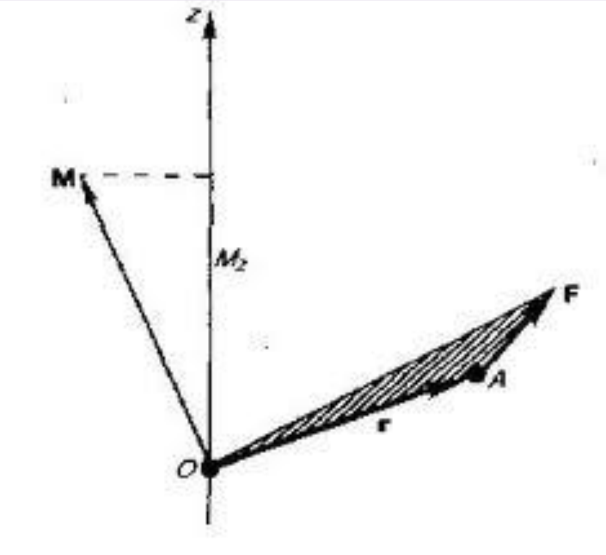
Модуль момента силы

$$\boxed{M = Fr\sin\alpha = Fl}$$

α – угол между векторами r и F;

$l = r\sin\alpha$ - плечо силы F, кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.

- **Моментом силы** M ***относительно неподвижной оси OZ*** называется скалярная величина M_Z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки O находящейся на данной оси OZ.

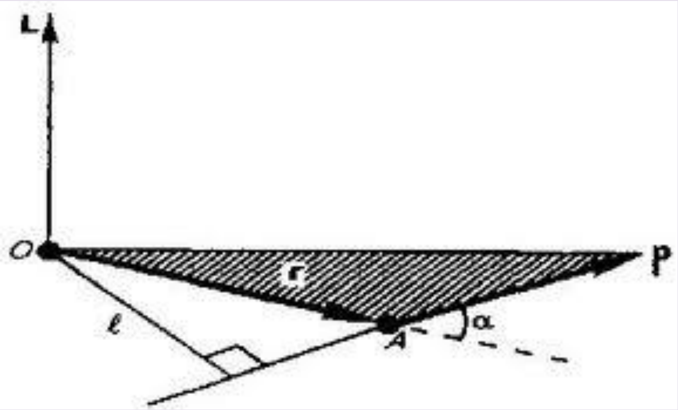


- Значение момента M_Z не зависит от выбора положения точки O на оси OZ.

- Если ось OZ совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\overrightarrow{M}_z = \left[\vec{r}\,\overrightarrow{F}\right]_z$$

Б. Момент импульса



Моментом импульса $\vec{L}_i$ м.т. *A* ***относительно неподвижной точки O*** называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}_i$ м.т., проведенного из точки *O*, на импульс этой материальной точки $\vec{p}_i$:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

$\vec{r}_i$ - радиус-вектор, проведенный из точки *O* в точку *A*;

$\vec{p}_i = m_i \vec{\upsilon}_i$ - импульс материальной точки.

Момент импульса $\vec{L}_i$ является ***псевдовектором***, его направление совпадает с направлением правого винта при его вращении от $\vec{r}_i$ к $\vec{p}_i$.

Модуль вектора момента импульса

$$\boxed{L_i = r_i p_i \sin\alpha = m_i \upsilon_i r_i \sin\alpha}$$

α – угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$.

- При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси момент импульса отдельной м.т. равен

$$L_{iz} = m_i \upsilon_i r_i$$

- и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

- **Моментом импульса** ***механической системы относительно неподвижной точки О*** называется вектор $\vec{L}$, равный геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки O всех м.т. механической системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \vec{p}_i\right)$$

- **Моментом импульса твердого тела** ***относительно неподвижной оси OZ***, есть сумма моментов импульса всех м.т. из которых состоит это тела и равен:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i$$

- С учетом, что $\upsilon_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

В. Основной закон динамики вращательного движения

- Вектор, равный геометрической сумме моментов относительно неподвижной точки O всех внешних сил, действующих на механическую систему, называется главным моментом внешних сил относительно неподвижной точки O:

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{F}_i^{\text{внеш}}\right]$$

- Получаем **основное уравнение динамики вращательного движения** (ОУДВД) твердого тела:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}}$$

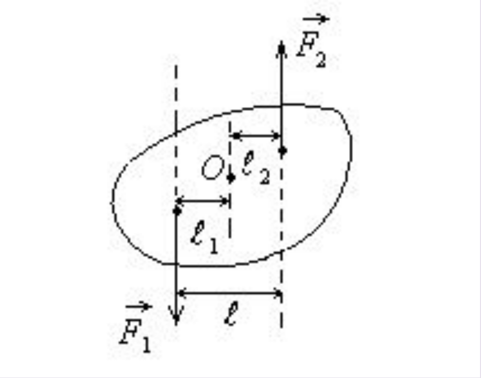
- Скорость изменения момента импульса механической системы относительно неподвижной точки (оси) равна главному моменту всех внешних сил, действующую на систему относительно той же точки (оси).

Пусть на тело действуют две антипараллельные силы, равные по модулю. Такие силы называются парой сил.

$$F_1 = F_2$$

$$M_1 = F_1 l_1$$

$$M_2 = F_2 l_2$$

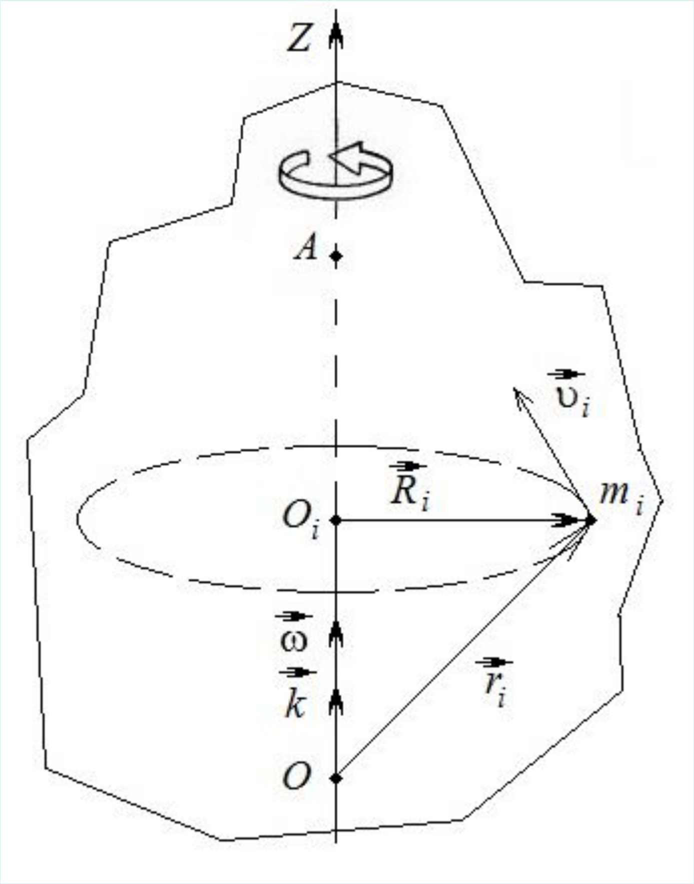


Момент пары сил:

$$M = M_1 + M_2 = F_1 l_1 + F_2 l_2 = F(l_1 + l_2) = FL$$

3. Момент инерции. Теорема Штейнера

Момент инерции



- Рассмотрим твердое тело вращающееся вокруг неподвижной оси *OZ*.

- Основной закон динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *OZ*, имеет вид:

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}}$$

- Величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний от данной оси вращения, называется **моментом инерции** системы относительно этой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

- Таким образом, момент импульса тела относительно оси *OZ* равен

$$I = m_i \cdot r_i^2$$

- где *I* – момент инерции тела относительно оси вращения *OZ*.
- Если известен закон распределения массы тела, то **момент инерции твердого тела** можно определить по формуле:

$$\boxed{L_Z = I\omega}$$

- **Моментом инерции м.т. относительно некоторой оси** называют скалярную физическую величину, равную произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения:

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

- Уравнение $\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}}$ с учетом $L_Z = I\omega$ можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(I\omega_Z\right) = M_Z^{\text{внеш}}$$

- В процессе вращения считается, что *I=const*, т.е. тело не деформируется

или

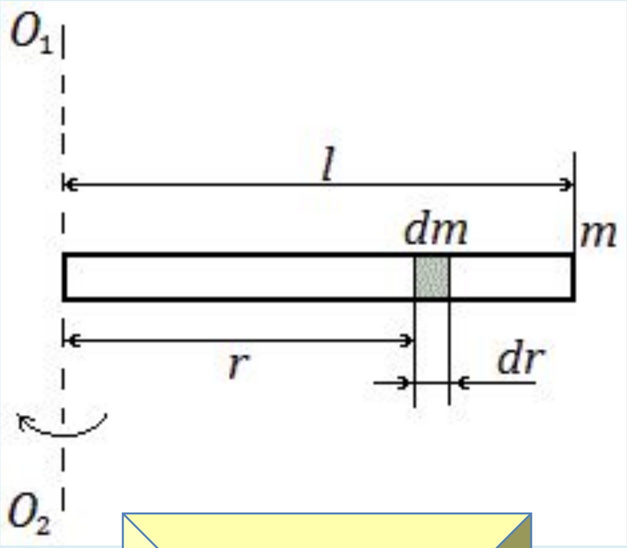
$$I\frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}} \qquad I\varepsilon_Z = M_Z^{\text{внеш}}$$

- Из уравнения видно, что угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции. Следовательно, момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела в его вращении вокруг этой оси.

- $\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}^{\text{внеш}}}{I}}$ - ***основное уравнение динамики вращательного движения***

Моменты инерции однородных тел правильной формы

1. Момент инерции тонкого стержня массой *m* и длинной *l* относительно оси, проходящей через **один из концов** стержня перпендикулярно его длине.



$$dJ_C = r^2 dm = r^2 \rho S dr$$

$$dm = \rho dV = \rho S dr$$

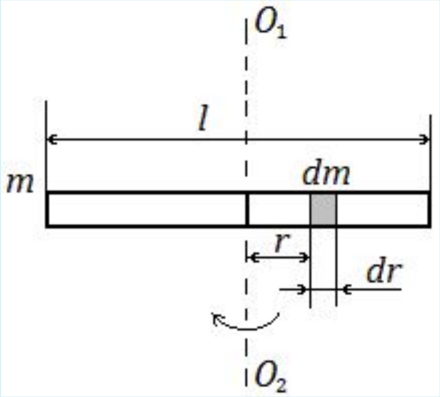
$$J_C = \rho S \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3}\rho S l^3 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$m = \rho S l$$

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

2. Момент инерции тонкого стержня массой *m* и длинной *l* относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через **его середину**.

$$dJ_C = r^2 dm = r^2 \rho S dr$$



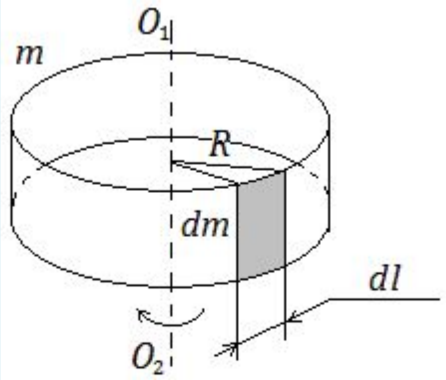
$$dm = \rho dV = \rho S dr$$

$$J_C = 2\rho S \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{2}{3}\rho S\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

$$m = \rho S l$$

$$\boxed{I = \frac{ml^2}{12}}$$

3. **Момент инерции однородного кольца (полого цилиндра)** массы m и радиуса R **относительно его оси**

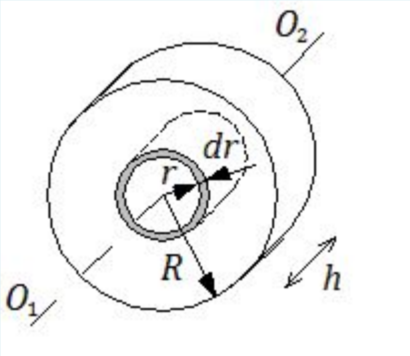


$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \frac{m}{2\pi R} dl = \frac{mR}{2\pi} \int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \frac{mR}{2\pi} \cdot 2\pi R = mR^2$$

$$\boxed{I = mR^2}$$

4. Момент инерции однородного сплошного диска (цилиндра) массы m и радиуса R **относительно его оси**



$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot h$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h \cdot dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \pi\rho h \frac{R^4}{2}$$

Масса диска $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$, следовательно

$$\boxed{I = \frac{mR^2}{2}}$$

Значения моментов инерции для некоторых тел

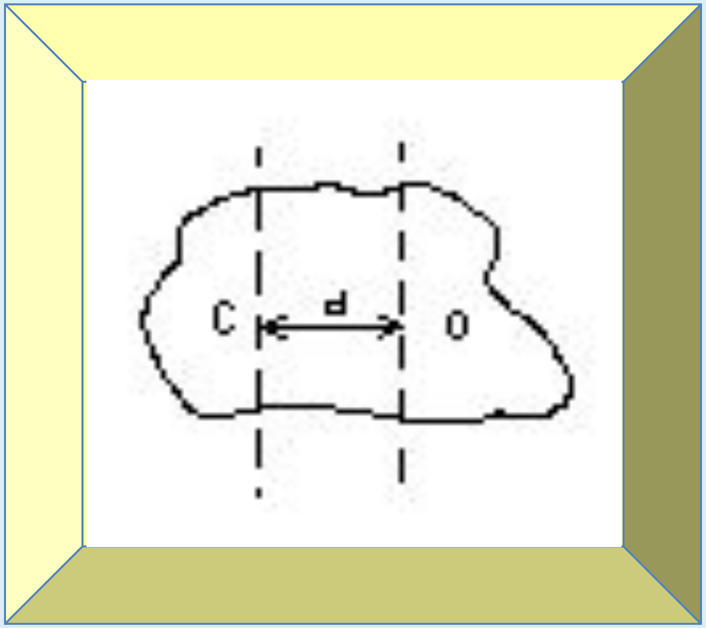
(тела считаются однородными, *m* – масса тела)

Тонкое кольцо, материальная точка, полый тонкостенный цилиндр (ось симметрии)	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр, диск (ось симметрии)	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Диск (ось вращения проходит через диагональ)	$J = \frac{1}{4}mR^2$
Шар	$J = \frac{2}{5}mR^2$
Полая тонкостенная сфера	$J = \frac{2}{3}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной *l*, ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной *l*, ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3}ml^2$

Моменты инерции однородных тел относительно произвольной оси

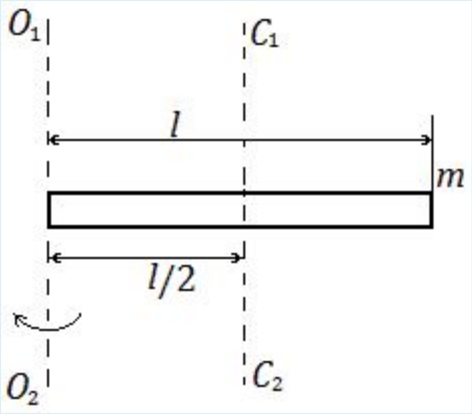
Теорема Штейнера:

Момент инерции тела относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс и произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$I_O = I_C + md^2$$

Покажем справедливость теоремы Штейнера на примере со стержнем:



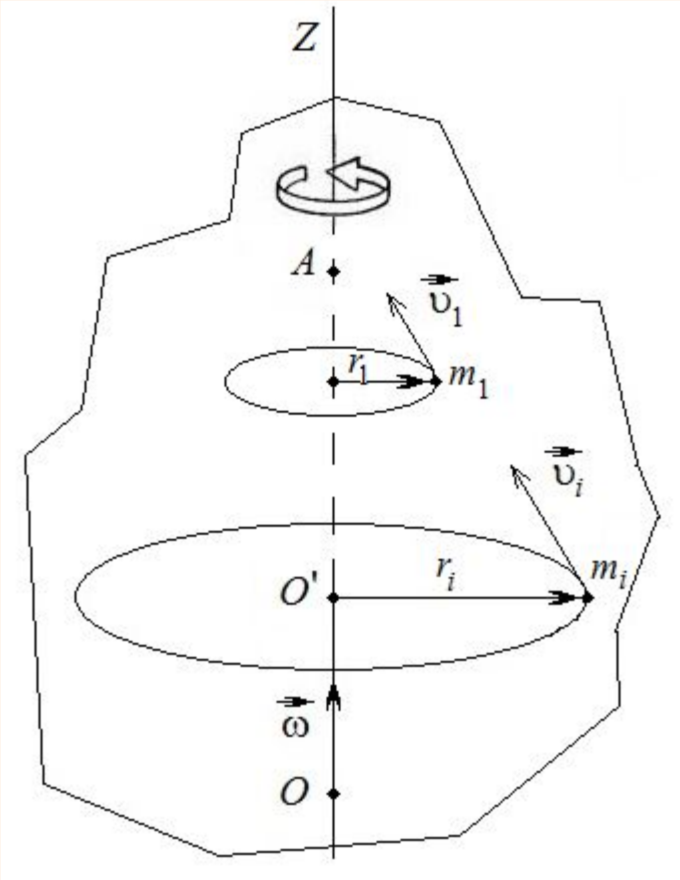
Применение **теоремы Штейнера** к расчету момента инерции тонкого стержня массой *m* и длинной *l* относительно оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно его длине.

$$I = I_C + m\frac{l^2}{4}$$

$$I_C = \frac{ml^2}{12}$$

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

4. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении



- Мысленно разобьем твердое тело на маленькие объемы (м.т.) с элементарными массами m_1, m_2, …, m_n, находящиеся на расстоянии r_1, r_2, …, r_n от оси.
- Так как рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения м.т. одинакова:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{r_1} = \frac{\upsilon_2}{r_2} = \ldots = \frac{\upsilon_n}{r_n}$$

- Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его м.т.:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n\upsilon_n^2}{2}, \text{ или } T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\upsilon_i^2}{2}$$

Получаем: $$T_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i\omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_Z\omega^2}{2}$$

$$\boxed{T_{\text{вр}} = \frac{J_Z\omega^2}{2}}$$

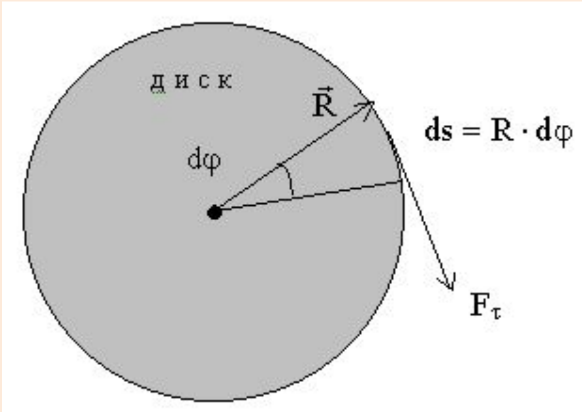
$J_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ - момент инерции тела относительно оси Z.

- $T_{\text{вр}} = \dfrac{J_Z \omega^2}{2}$ - формула справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

- В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающего с наклонной плоскости без скольжения, энергия движущегося тела складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс υ_C, и энергии вращения тела вокруг оси, проходящей через центр тела:

$$T = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}$$

- где m – масса катящегося тела; υ_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.



Найдем работу при вращательном движении твердого тела

$$\delta A = F_\tau\, dr = Fl = FR \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$\boxed{\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}$$

Элементарная работа при вращательном движении

$$\boxed{A = \int \delta A = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}$$

Работа при вращательном движении

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M\omega$$

$$\boxed{N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}}$$

- мощность при вращательном движении

- Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT$$

- где $dT = d\left(\frac{J_Z\omega^2}{2}\right) = J_Z\omega d\omega$
- Поэтому $M_Z d\varphi = J_Z \omega d\omega$ или $M_Z \frac{d\varphi}{dt} = J_Z\omega\frac{d\omega}{dt}$
- Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
- получаем $M_Z = J_Z\frac{d\omega}{dt} = J_Z\varepsilon$
- Получили **основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

5. Закон сохранения момента импульса

- Для замкнутой системы момент внешних сил $M^{внеш}$ всегда равен **нулю**, так как на нее внешние силы **не действуют**.

- Из основного закона динамики вращательного движения твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внеш}$$

- вытекает **закон сохранения момента импульса**: ***момент импульса замкнутой системы относительно неподвижной точки (оси) не изменяется с течением времени***.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \equiv 0, \Rightarrow \vec{L} = const$$

- Из уравнения $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{внеш}$ следует:
- момент импульса замкнутой системы относительно ее центра масс не изменяется с течением времени

$$\boxed{\vec{L}_C = const}$$

- Момент импульса замкнутой системы относительно **любой** неподвижной оси *a* также остается ***постоянным***:

$$\vec{L}_a = const$$

- **Закон сохранения момента импульса** является фундаментальным законом природы, который далеко выходит за рамки классической механики.

- **Закон сохранения момента импульса** связан со свойством симметрии пространства – его ***изотропностью***, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

- Моментом импульса обладают не только движущиеся макроскопические тела и системы, но также и отдельные атомы, атомные ядра и элементарные частицы.

- Атомные ядра имеют моменты импульса, не связанные с их движением в пространстве.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Аналогии между поступательным и вращательным движениями.

Поступательное движение	Вращательное движение
1. Линейное перемещение: $\Delta\vec{r}$	1. Угловое перемещение: $\Delta\vec{\varphi}$
2. Линейная скорость: $\vec{\upsilon}$	2. Угловая скорость: $\vec{\omega}$
3. Линейное ускорение: $\vec{a}$	3. Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon}$
4. Масса тела: *m*.	4. Момент инерции: *I*.
5. Сила: $\vec{F}$	5. Момент силы: $\vec{M}$
6. Работа: $\delta A = \vec{F}d\vec{r}$	6. Работа: $\delta A = \vec{M}d\vec{\varphi}$
7. Мощность: $N = \vec{F}\vec{\upsilon}$	7. Мощность: $N = \vec{M}\vec{\omega}$
8. Кинетическая энергия: $W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$	8. Кинетическая энергия: $W_k = \frac{I\omega^2}{2}$
9. Импульс тела: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	9. Момент импульса: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
10. Второй закон Ньютона: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	10. ОУДВД: $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$