МЕТРОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Лекция 13. Приближённые вычисления

Приближённые вычисления при обработке результата измерений

Для всех приближенных чисел так же, как и для результатов измерений, введены понятия абсолютной и относительной погрешностей.

Пусть $x_и$ – точное (истинное) значение некоторого числа, x – известное приближенное значение этого же числа. За абсолютную погрешность берется разность

$$|x_и - x| = \Delta(x)$$

По величине абсолютной погрешности не всегда можно сделать правильное заключение о качестве приближения, поэтому, чтобы правильно соотнести погрешность числа, вводится понятие относительной погрешности (при $x_и \neq 0$):

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x_и|}$$

Так как значение $x_и$ неизвестно, то непосредственное вычисление величин $\Delta(x)$ и $\delta(x)$ невозможно, поэтому вводятся понятия оценок (предельного значения) погрешностей. $\Delta_П(x)$ и $\delta_П(x)$ – это известные величины, которые называют также верхними границами (или просто границами) соответственно абсолютной и относительной погрешностей.

Правила записи и округления приближённых чисел

Значащими цифрами числа x называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Примеры:

1) $x = 0{,}03401$, значащие цифры — 3, 4, 0, 1;

2) $x = 0{,}25$, значащие цифры — 2, 5;

3) $x = 0{,}03030$, значащие цифры — 3, 0, 3, 0.

Не следует при записи приближенных чисел отбрасывать последние значащие нули.

Значащую цифру приближенного числа называют верной, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре. Остальные цифры называют сомнительными, т.е. количество верных знаков приближенного числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности.

Если приближенное число x имеет N верных значащих цифр, то предельная относительная погрешность этого числа может быть принята равной дроби, числитель которой единица, а знаменатель есть целое число, написанное при помощи всех верных значащих цифр данного числа. При использовании этого правила рекомендуется в знаменателе оставлять только первую значащую цифру, заменяя остальные нулями.

Пример: $x = 2{,}62$, $\delta_П(x) = 1/262$ или $\delta_П(x) = 1/200 = 0{,}005 = 0{,}5$ %.

Если приближенное число x приводится в качестве результата без указания величины погрешности, то это значит, что все его значащие цифры являются верными.

Правила записи и округления приближённых чисел

Абсолютную погрешность числа принято считать равной пяти единицам разряда, следующего справа за последней цифрой.

Примеры:

1) $x = 0{,}03401$, $\Delta(x) = 0{,}000005$;

2) $x = 35{,}8100$. $\Delta(x) = 0{,}00005$.

Число x_u можно записывать в виде

$$x_u = x \pm \Delta(x)$$

В этом случае числа x и $\Delta(x)$ как правило, указывают с одинаковым числом цифр после десятичной запятой.

Пример: $x = 2{,}355$, $\Delta(x) = 0{,}001832$, тогда $x_u = 2{,}355 \pm 0{,}002$.

Правила записи и округления приближённых чисел

Операция округления числа в общем случае сводится к отбрасыванию части цифр некоторого числа и замене их, если это нужно для сокращения разрядности, нулями. Возникающая при таком округлении погрешность называется погрешностью округления.

При округлении полученного результата измерения и рассчитанного значения погрешности принято руководствоваться следующими правилами.

1. Числовое значение результата измерения должно ограничиваться тем же десятичным знаком, которым заканчивается округление абсолютной погрешности.

2. В записи погрешности результата обычно ограничиваются одной значащей цифрой, если первая из них ≥ 3, и двумя значащими цифрами, если первая из них равна цифре 1 или цифре 2. Очень редко при особо точных измерениях погрешность записывается тремя цифрами.

3. При округлении числа до n значащих цифр, отбрасываются все цифры, стоящие справа от n-й значащей цифры. При этом:

• если первая слева из отброшенных цифр больше или равна 5 и последующие цифры не нули, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу;

• если первая слева из отброшенных цифр меньше 5, то остальные цифры числа не изменяются;

• если первая слева из отброшенных цифр равна 5 с последующими нулями, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

4. В промежуточных расчетах результаты действий могут записываться с одной или двумя сомнительными цифрами (мнимыми знаками).

Округление производится лишь в окончательном ответе.

Математические действия с приближёнными числами

При сложении и вычитании приближенных чисел следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном числе с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример: $3{,}5481 + 28{,}340 + 326{,}5 + 65{,}804 \approx 424{,}2$.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы Δ не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

Для алгебраической суммы двух слагаемых

$$\Delta(a+b) \le \Delta(a) + \Delta(b)$$

Можно записать

$$\Delta(a+b) \approx \Delta(a) + \Delta(b)$$

Если все n слагаемых имеют одну и ту же погрешность Δ', то абсолютная погрешность их суммы оценивается формулой

$$\Delta = n\Delta'$$

При большом числе слагаемых это дает завышенную оценку, поэтому в таком случае рекомендуется пользоваться формулой

$$\Delta = \sqrt{3n}\Delta'$$

Если складываются числа, имеющие разные абсолютные погрешности, то эти числа рекомендуется предварительно соответствующим образом округлять.

Пример. Найти сумму $a+b+c$, если $a = 31{,}42$; $\Delta(a) = 0{,}005$; $b = 512{,}4578$; $\Delta(b) = 0{,}00005$; $c = 7{,}51844$; $\Delta(c) = 0{,}000005$.

Решение. Сначала округлим b и c, оставив три десятичных знака после запятой (один запасной): $b = 512{,}458$; $c = 7{,}518$. Тогда

$a+b+c = 31{,}42 + 512{,}458 + 7{,}518 \approx 551{,}40$; $\Delta = \Delta(a) = 0{,}005$.

Математические действия с приближёнными числами

При возведении в степень с натуральным показателем следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

При извлечении корня n-й степени в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

При обработке результатов измерений в ряде случаев возникает необходимость определять значение и погрешность функции y при известных значениях и погрешностях аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$

Если функция одного аргумента $y = f(x)$ дифференцируема, то предельную абсолютную погрешность функции можно оценить по формуле

$$\Delta(y) = |f'(x)|\Delta(x)$$

а относительная погрешность функции равна абсолютной погрешности ее натурального логарифма:

$$\delta(y) = \Delta(\ln y)$$

Пример. Найти относительную погрешность функции $y = x^m$, где m – действительное число. Решение.

$$\ln y = m \ln x; \ \delta(y) = \Delta(\ln y) = \Delta(m \ln x) = |m||(\ln x)'|\Delta(x) = |m|\Delta(x)/x = |m|\delta(x)$$

Таким образом, $\delta(y) = |m|\delta(x)$.