

Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Простейшие задачи в координатах

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Найти координаты точек A, B, C и
векторов $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$

$$A(-1; 3; -6)$$

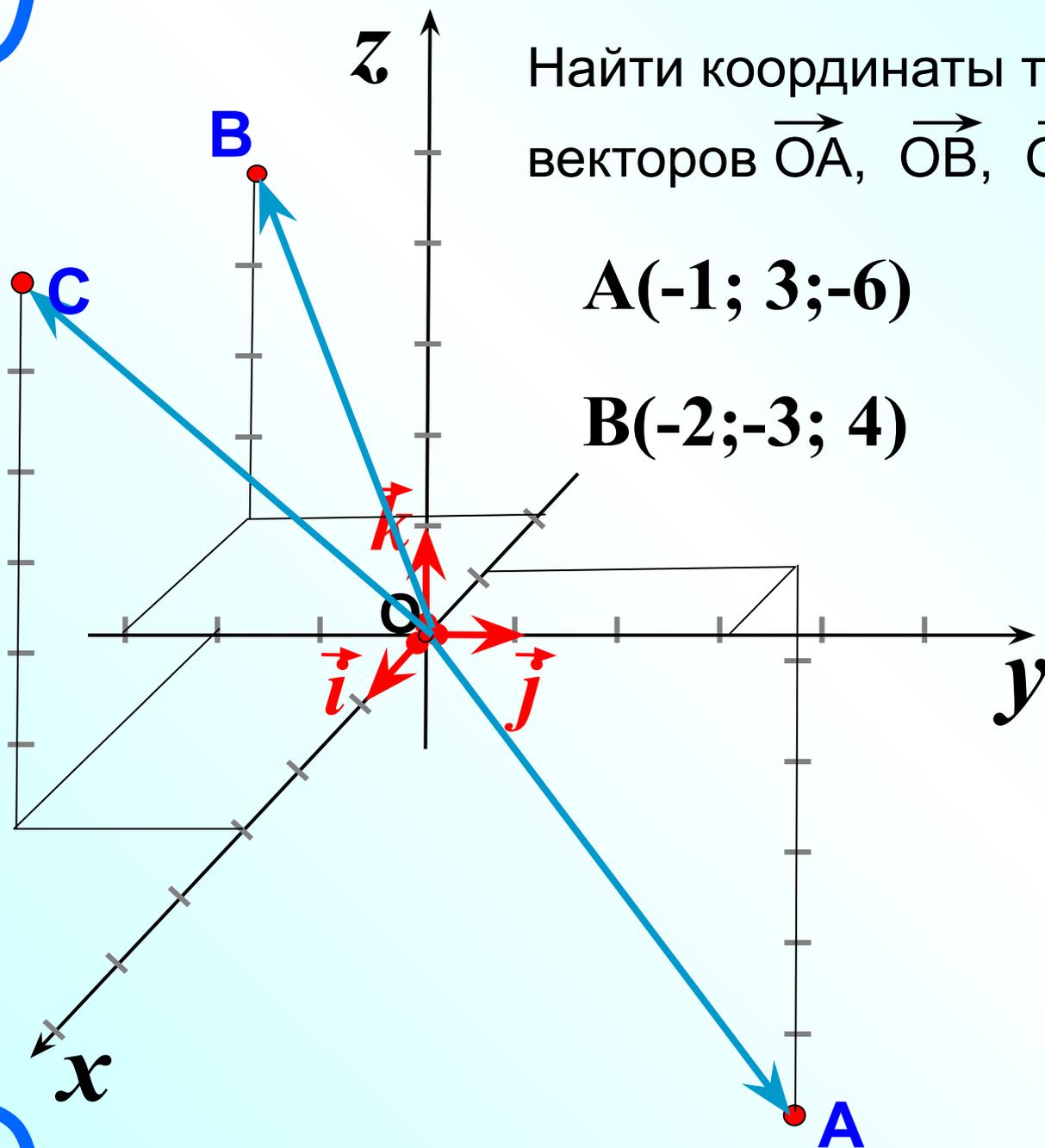
$$\vec{OA}\{-1; 3; -6\}$$

$$B(-2; -3; 4)$$

$$\vec{OB}\{-2; -3; 4\}$$

$$C(3; -2; 6)$$

$$\vec{OC}\{3; -2; 6\}$$



№408

Найдите координаты векторов

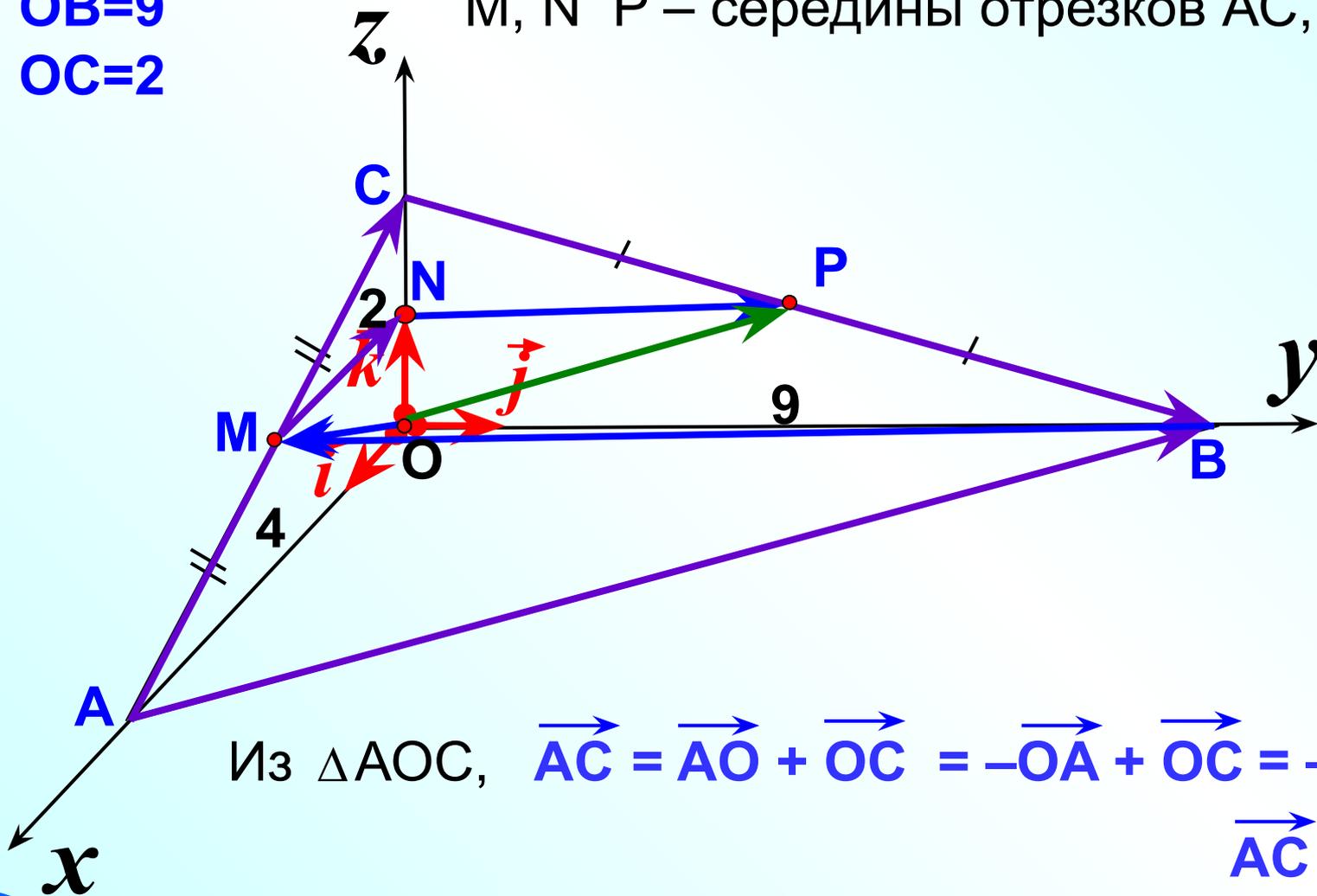
\vec{AC} , \vec{CB} , \vec{AB} , \vec{MN} , \vec{NP} , \vec{BM} , \vec{OM} , \vec{OP} .

M, N P – середины отрезков AC, OC и BC

OA=4

OB=9

OC=2



Из $\triangle AOC$, $\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OC} = -4\vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{AC} \{-4; 0; 2\}$

Найти координаты векторов.

$$\vec{a} \{2; 4; -1\}; \quad 3\vec{a} \{ \quad \}$$

$$\vec{b} \{-2; 0; 1,5\}; \quad -2\vec{b} \{ \quad \}$$

$$\vec{d} \{-2; -3; \frac{2}{3}\}; \quad -3\vec{d} \{ \quad \}$$

$$\vec{c} \{2; -5; 0\}; \quad -\vec{c} \{ \quad \}$$

$$\vec{e} \{2; -3; 8\}; \quad 0,5\vec{e} \{ \quad \}$$

$$\vec{f} \{0; 5; -\frac{1}{2}\}; \quad -2\vec{f} \{ \quad \}$$



Вводите ответы в текстовые поля, не делая пробелов

Найти координаты векторов, противоположных данным.

$$\vec{a} \{2; 4; -5\}; -\vec{a} \{ \quad \}$$

$$\vec{b} \{-2; 0; -1\}; -\vec{b} \{ \quad \}$$

$$\vec{d} \{0; 0; 0\}; -\vec{d} \{ \quad \}$$

$$-\vec{j} \{ \quad \}$$

$$-\vec{i} \{ \quad \}$$

$$-\vec{k} \{ \quad \}$$



Найти координаты векторов.

$$\vec{a} \{2; 4; 3\}; \vec{c} \{3; 2; -3\}; \vec{a} + \vec{c} \{ \quad \}$$

$$\vec{b} \{-2; 0; 4\}; \vec{d} \{-2; -3; -1\}; \vec{b} + \vec{d} \{ \quad \}$$

$$\vec{c} \{2; -5; 4\}; \vec{e} \{2; -3; -9\}; \vec{c} + \vec{e} \{ \quad \}$$

$$\vec{f} \{0; 5; -3\}; \vec{d} \{-2; -3; 7\}; \vec{f} - \vec{d} \{ \quad \}$$

$$\vec{b} \{-2; 0; -1\}; \vec{d} \{-2; -3; -4\}; \vec{b} - \vec{d} \{ \quad \}$$

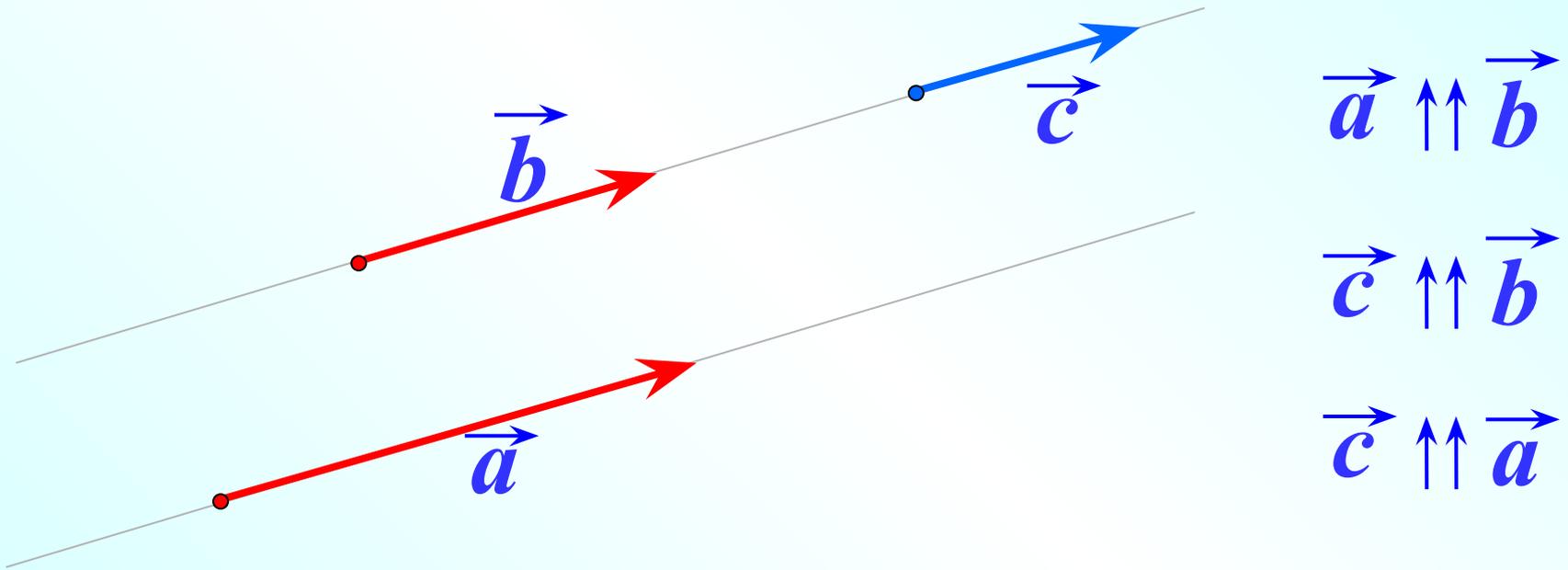
$$\vec{a} \{2; 4; 0\}; \vec{c} \{3; 2; -9\}; \vec{a} - \vec{c} \{ \quad \}$$



Вводите ответы в текстовые поля, не делая пробелов

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором.

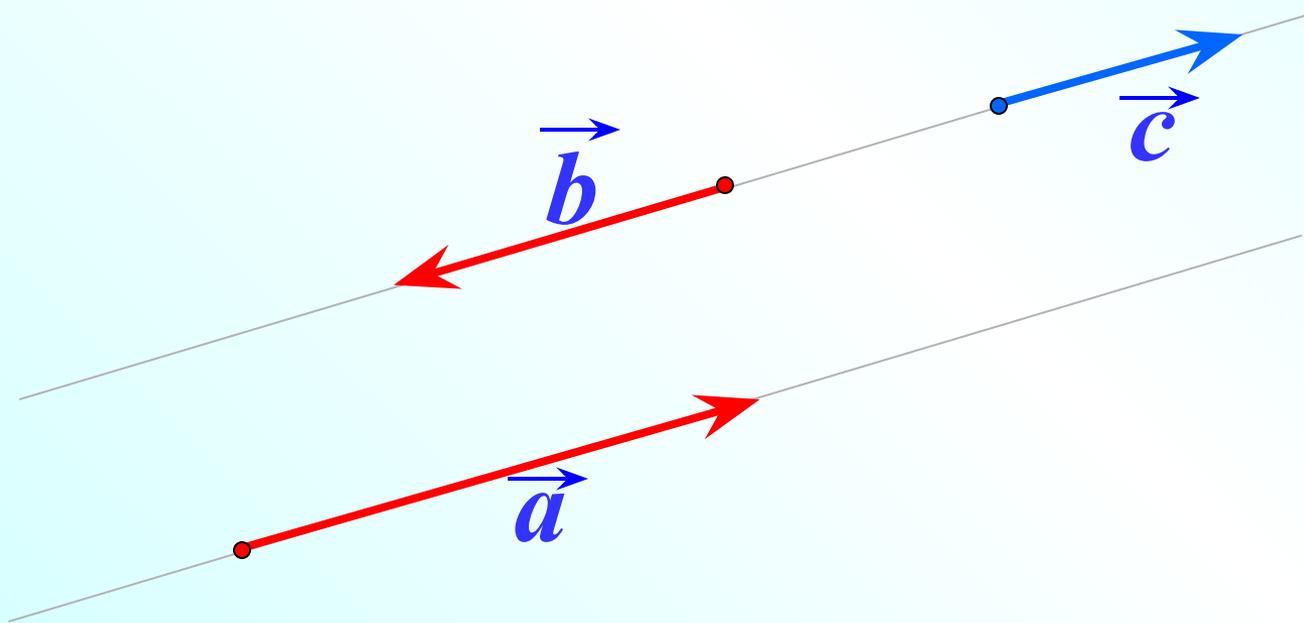
$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, противоположно направленные векторы



$$\vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$\vec{c} \updownarrow \vec{b}$$

Коллинеарны ли векторы

$$\vec{a} \{3; 6; 8\}; \vec{b} \{6; 12; 16\}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

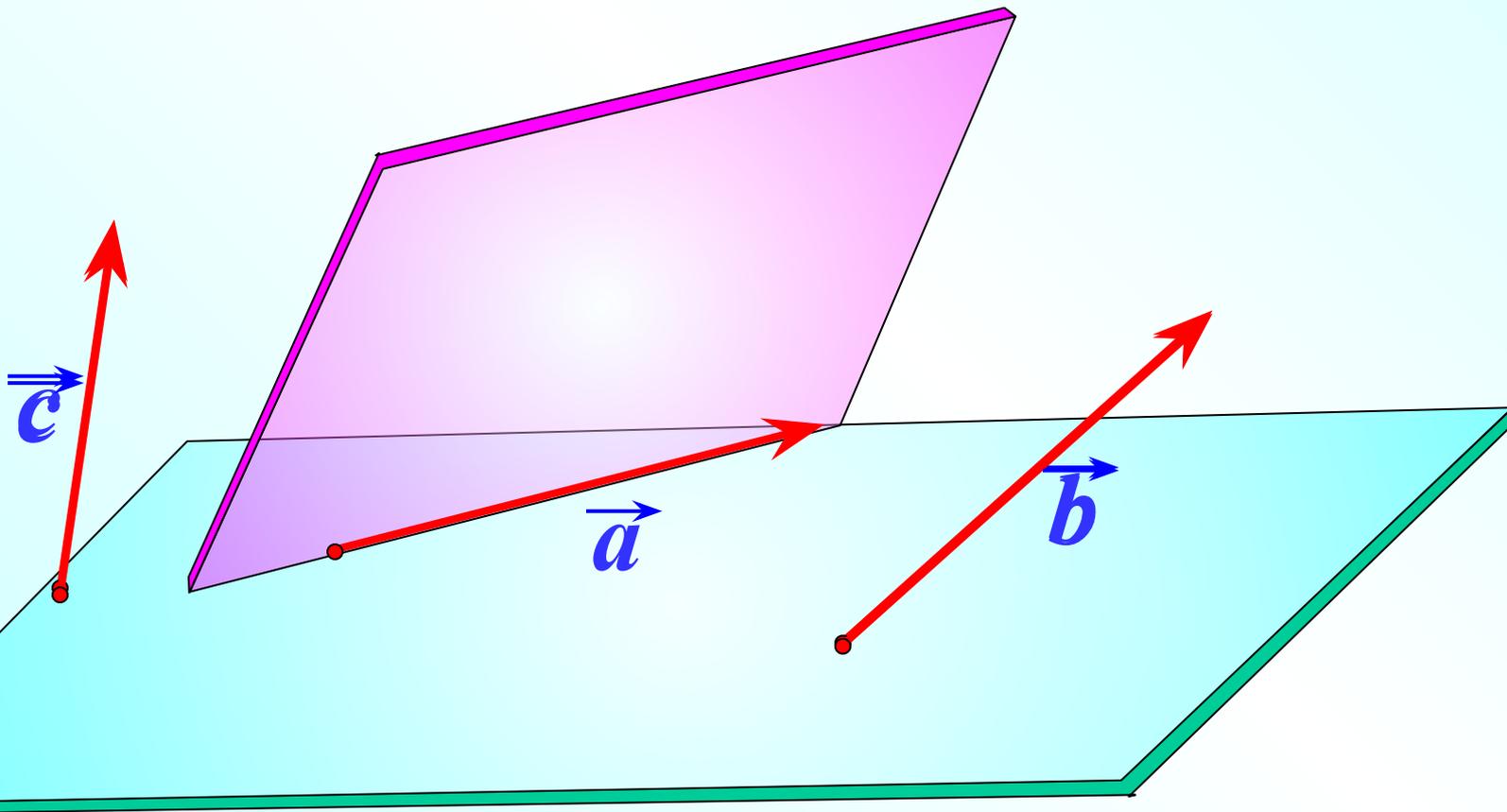
Замените * так, чтобы векторы были коллинеарны.

$$\vec{a} \{2; -1; *5; 6\}; \vec{b} \{4; -3; *12\}$$

$$\vec{c} \{0; 2; -*12\}; \vec{f} \{*0; -0,5; 3\}$$

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Признак компланарности

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам

\vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c}

компланарны.

Компланарны ли векторы

$$\vec{a} \{2; 6; -3\}; \vec{b} \{6; 18; -9\} \quad \text{и} \quad \vec{i}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{i} компланарны.

Компланарны ли векторы

$$\vec{a} \{2; 4; 3\}; \vec{b} \{6; 11; -9\}; \quad \text{и} \quad \overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.
Значит, эти векторы компланарны.

Компланарны ли векторы

$$\vec{n} \{2; 6; -3\}; \vec{f} \{0; 5; 0\} \quad \text{и} \quad \vec{j} \{0; 1; 0\}$$

Векторы \vec{f} и \vec{j} коллинеарны.

Векторы \vec{n} , \vec{f} , \vec{j} компланарны.

Компланарны ли векторы

$$\vec{a} \{-3; -3; 0\}; \vec{i} \{1; 0; 0\}; \quad \text{и} \quad \vec{j} \{0; 1; 0\}$$



Компланарны ли векторы

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{a} \{-3; -3; 0\};$$

$$\vec{i} \{1; 0; 0\};$$

$$\vec{j} \{0; 1; 0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 = x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ -3 = x \cdot 0 + y \cdot 1 \\ 0 = x \cdot 0 + y \cdot 0 \end{array} \right.$$

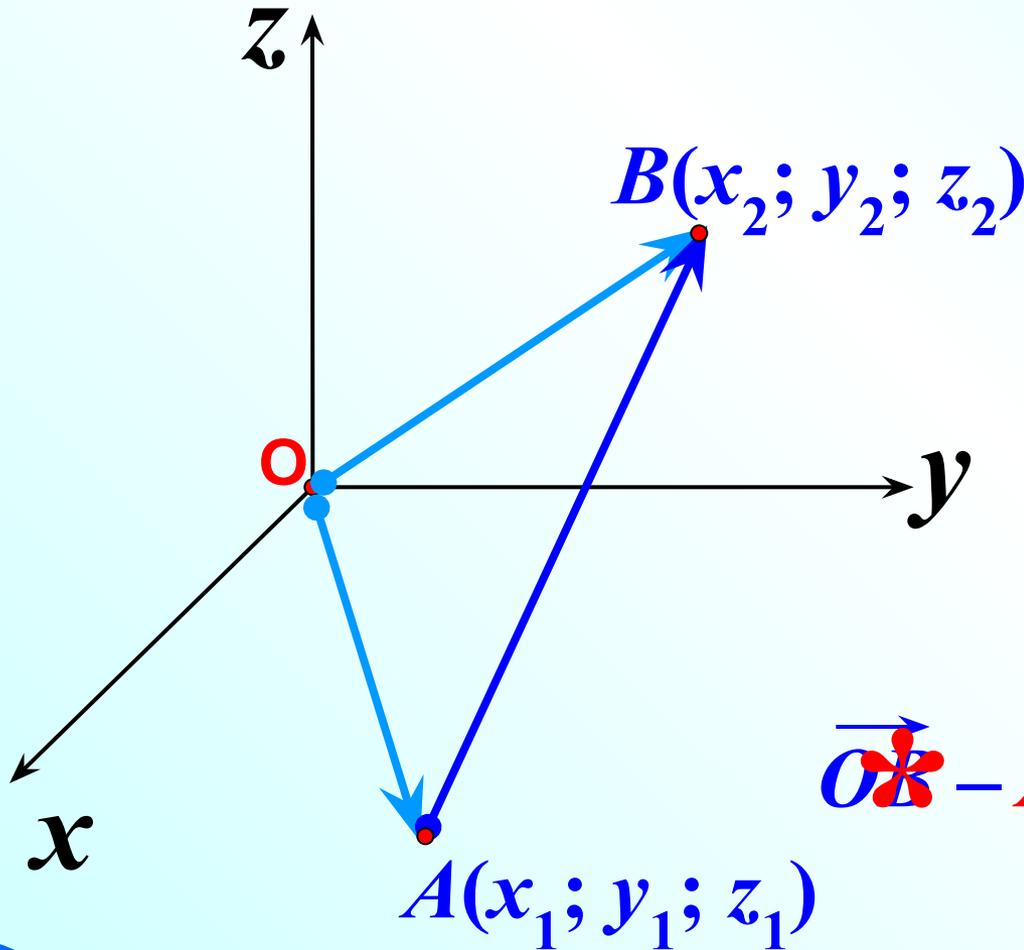
1 уравнение
2 уравнение
3 уравнение

Признак компланарности

Проверим, можно ли разложить, например, вектор \vec{a} по векторам \vec{i} и \vec{j} .

Существуют ли такие числа x и y , что $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.



$$\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$+\vec{-OA}\{-x_1; -y_1; -z_1\}$$

+

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$A(3;5;7), B(5;4;-1), \vec{AB}$$

$$\begin{array}{r} A(3;5;7) \\ - \\ B(5;4;-1) \\ \hline \vec{AB}\{2;-1;-8\} \end{array}$$

$$N(3;2;-3), O(0;0;0), \vec{ON} \text{ Радиус-вектор } \vec{ON}\{3; 2;-3\}$$

$$P(2;-1;0), C(4;-4;2), \vec{PC}$$

$$\begin{array}{r} P(2;-1;0) \\ - \\ C(4;-4;2) \\ \hline \vec{PC}\{2;-3; 2\} \end{array}$$

$$R(-4;0;-4), T(0;5;-1), \vec{TR}$$

$$\begin{array}{r} R(-4;0;-4) \\ - \\ T(0; 5;-1) \\ \hline \vec{TR}\{-4;-5;-3\} \end{array}$$

$$D(-3;-4;0), O(0;0;0), \vec{OD}$$

$$\text{Радиус-вектор } \vec{OD}\{-3;-4; 0\}$$

Найдите координаты векторов

$$R(2;7;1); M(-2;7;3); \overrightarrow{RM}$$

$$P(-5;1;4); D(-5;7;-2); \overrightarrow{PD}$$

$$R(-3;0;-2); N(0;5;-3); \overrightarrow{RN}$$

$$A(0;3;4); B(-4;0;-3); \overrightarrow{BA}$$

$$A(-2;7;5); B(-2;0;-3); \overrightarrow{AB}$$

$$R(-7;7;-6); T(-2;-7;0); \overrightarrow{RT}$$

Найти координаты векторов.

$$R(2;7;1); M(-2;7;3); \overrightarrow{RM} \{ \quad \}$$

$$P(-5;1;4); D(-5;7;-2); \overrightarrow{PD} \{ \quad \}$$

$$R(-3;0;-2); N(0;5;-3); \overrightarrow{RN} \{ \quad \}$$

$$A(0;3;4); B(-4;0;-3); \overrightarrow{BA} \{ \quad \}$$

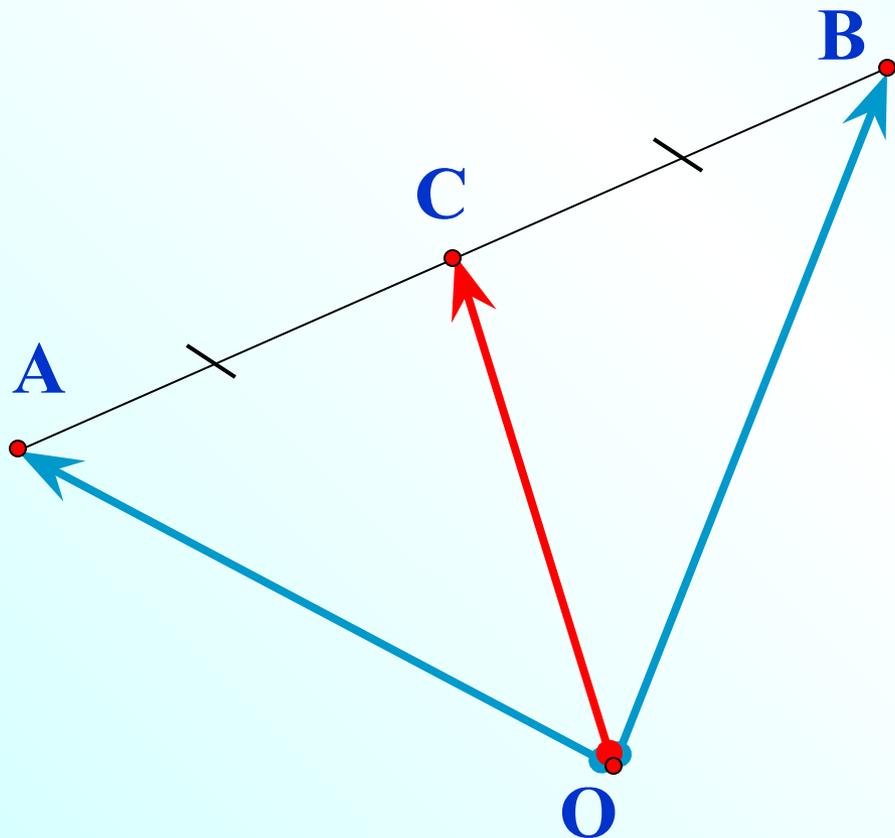
$$A(-2;7;5); B(-2;0;-3); \overrightarrow{AB} \{ \quad \}$$

$$R(-7;7;-6); T(-2;-7;0); \overrightarrow{RT} \{ \quad \}$$



Вводите ответы в текстовые поля, не делая пробелов

Планиметрия



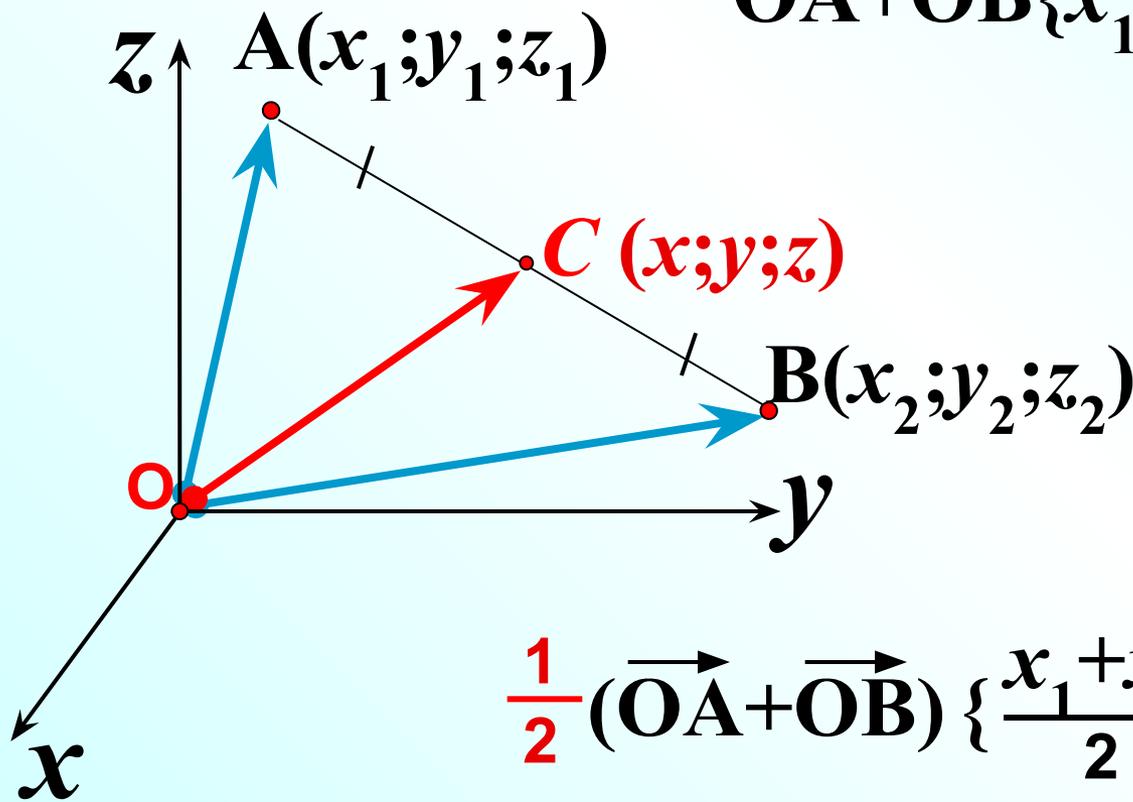
$$\vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

Координаты середины отрезка

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\begin{aligned} & \vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\} \\ & + \\ & \vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\} \end{aligned}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\} / :2$$



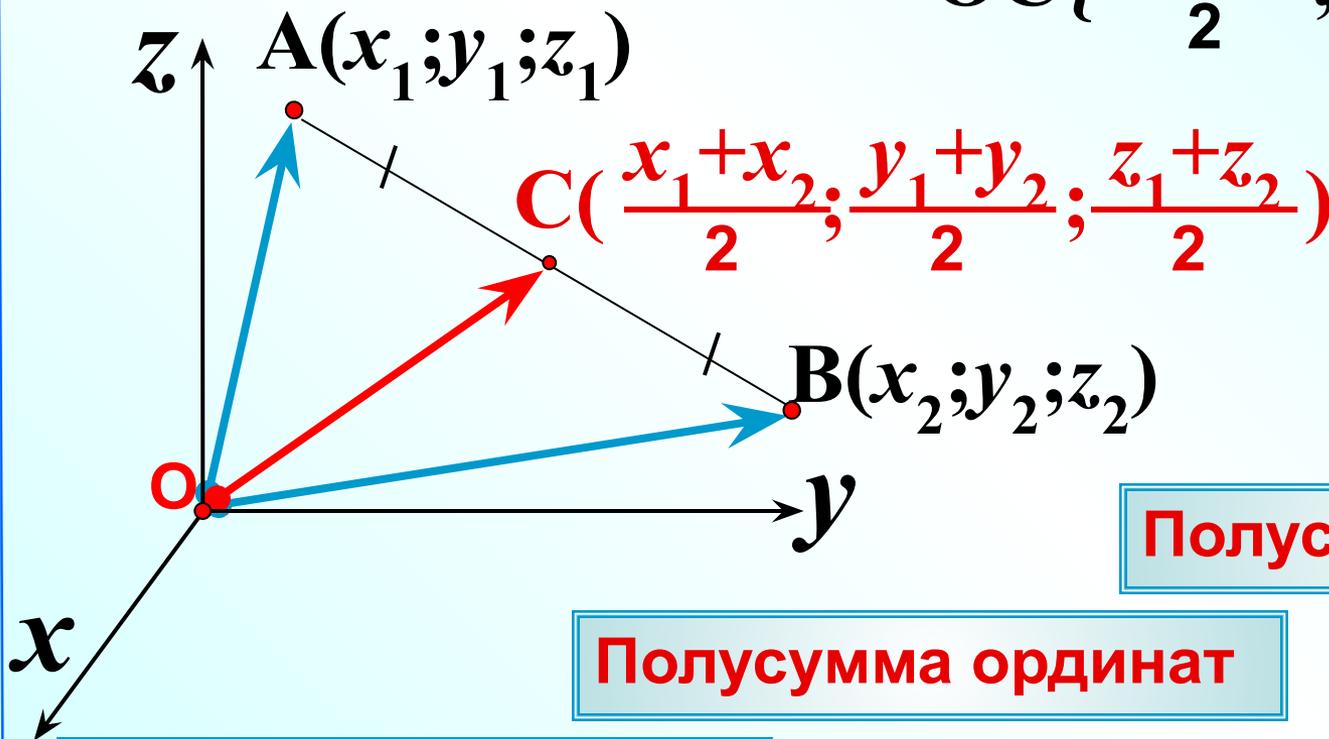
$$\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right\}$$



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Каждая координата середины отрезка равна **полусумме** соответствующих координат его концов.

$$\vec{OC} \left\{ \frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2} \right\}$$



Полусумма аппликат

Полусумма ординат

Полусумма абсцисс

$$* x = \frac{x_1+x_2}{2};$$

$$* y = \frac{y_1+y_2}{2};$$

$$* z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

№ 424 (a) Найдите координаты середины отрезка

$A(0; 3; -4)$, $B(-2; 2; 0)$, середина – точка $M(-1; 2,5; -2)$

Полусумма абсцисс

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$x = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

Полусумма ординат

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$y = \frac{3 + 2}{2} = 2,5$$

Полусумма аппликат

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

$$z = \frac{-4 + 0}{2} = -2$$

Найдите координаты
середины отрезков

R(2;7;4); M(-2;7;2); C

P(-5;1;3); D(-5;7;-9); C

R(-3;0;-3); N(0;5;-5); C

A(0;-6;9); B(-4;2;-6); C

A(7;7;0); B(-2;0;-4); C

R(-7;4;0); T(-2;-7;0); C

$$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{7+7}{2}, \frac{4+2}{2} \right); C(0; 7; 3)$$

$$\left(\frac{-5+(-5)}{2}, \frac{1+7}{2}, \frac{3+(-9)}{2} \right); C(-5; 4; -3)$$

$$\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{-3+(-5)}{2} \right); C(-1,5; 2,5; -4)$$

$$\left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{-6+2}{2}, \frac{9+(-6)}{2} \right); C(-2; -2; 1,5)$$

$$\left(\frac{7+(-2)}{2}, \frac{7+0}{2}, \frac{0+(-4)}{2} \right); C(2,5; 3,5; -2)$$

$$\left(\frac{-7+(-2)}{2}, \frac{4+(-7)}{2}, \frac{0+0}{2} \right); C(-4,5; -1,5; 0)$$

Найти координаты середин отрезков.

R(2;7;4); M(-2;7;2); C()

P(-5;1;3); D(-5;7;-9); C()

R(-3;0;-3); N(0;5;-5); C()

A(0;-6;9); B(-4;2;-6); C()

A(7;7;0); B(-2;0;-4); C()

R(-7;4;0); T(-2;-7;0); C()



Вводите ответы в текстовые поля, не делая пробелов.

Обратная задача.

$$A(\overset{x_1}{5}; \overset{y_1}{4}; \overset{z_1}{-6})$$

$$C(\overset{x}{-3}; \overset{y}{2}; \overset{z}{10})$$

Дано: $A(5; 4; -6)$;

$C(-3; 2; 10)$ – середина отрезка AB

$$B(\overset{x_2}{a}; \overset{y_2}{b}; \overset{z_2}{c})$$

Найти: $B(a; b; c)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$-3 = \frac{5 + a}{2}; \cdot 2$$

$$2 = \frac{4 + b}{2}; \cdot 2$$

$$10 = \frac{-6 + c}{2} \cdot 2$$

$$-6 = 5 + a$$

$$4 = 4 + b$$

$$20 = -6 + c$$

$$a = -11$$

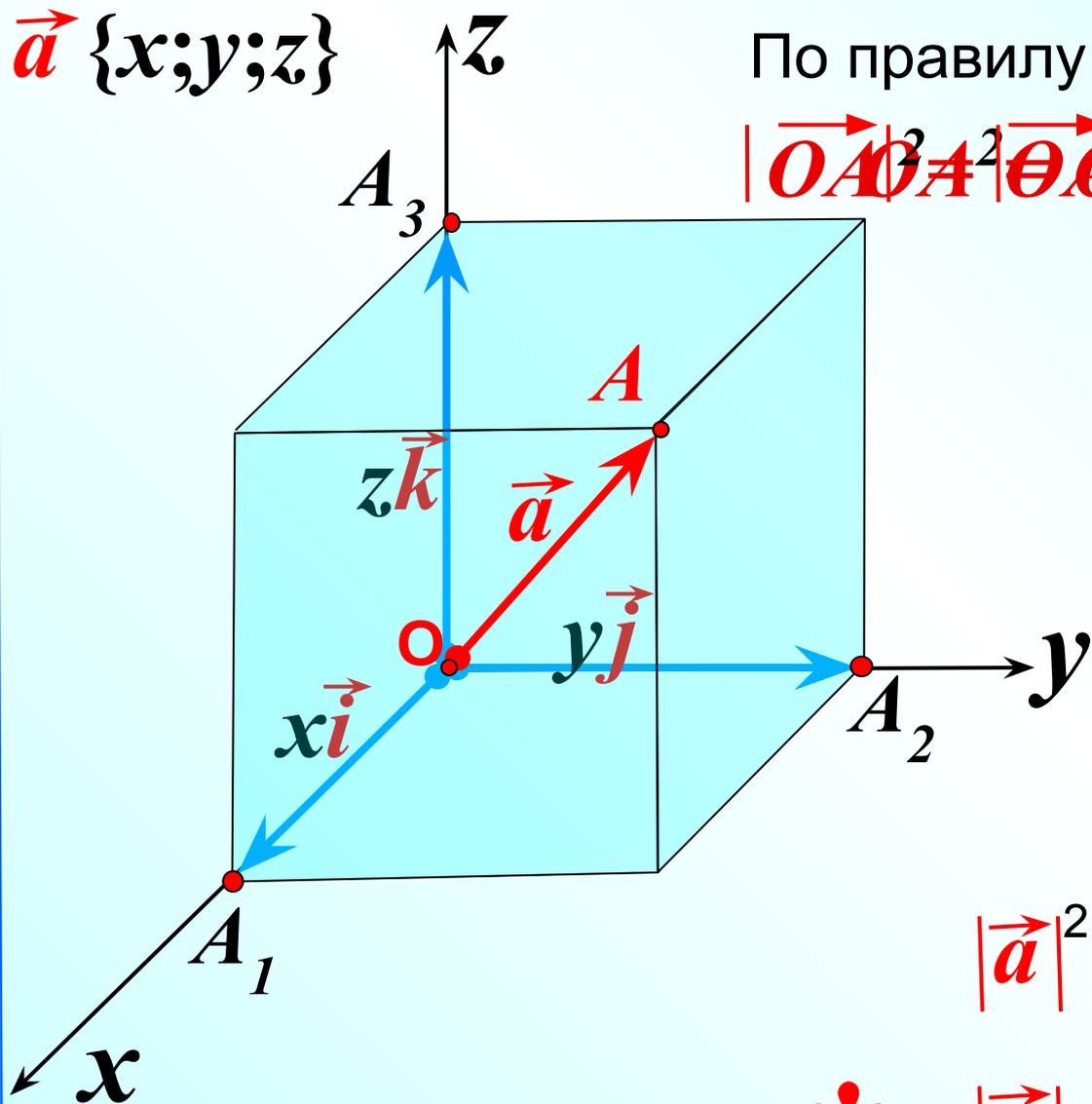
$$b = 0$$

$$c = 26$$

$$B(-11; 0; 26)$$

Вычисление длины вектора по его координатам

$\vec{a} \{x; y; z\}$



По правилу параллелепипеда

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2$$

$$|\vec{OA}_1| = |xi| = |x|$$

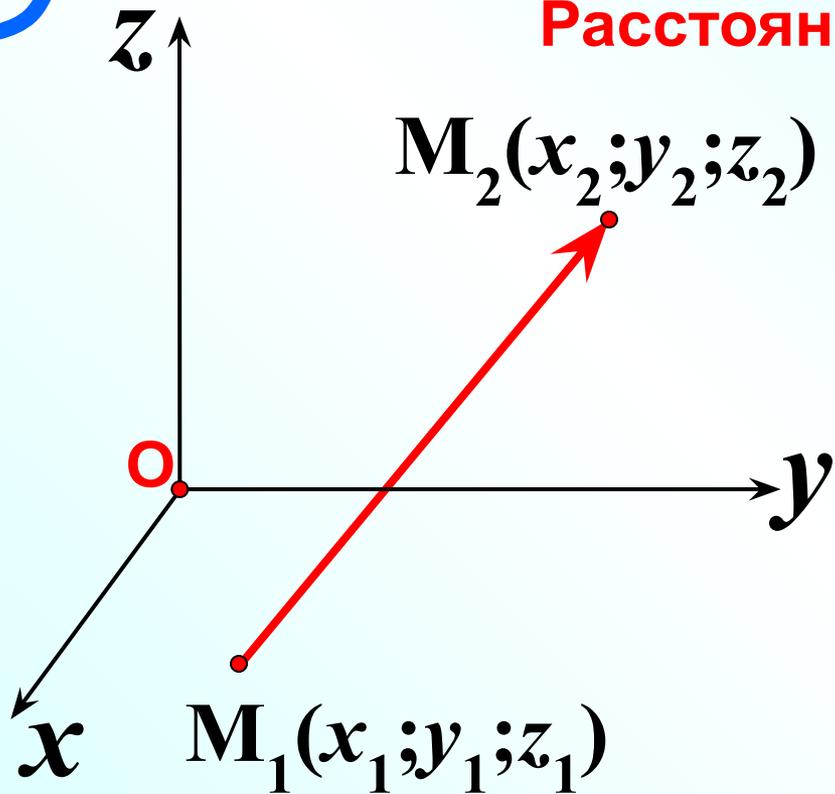
$$|\vec{OA}_2| = |yj| = |y|$$

$$|\vec{OA}_3| = |zk| = |z|$$

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

* $|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$

Расстояние между двумя точками d



$$\vec{M_1M_2} = \frac{M_2(x_2; y_2; z_2) - M_1(x_1; y_1; z_1)}{}$$

$$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$* \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$* \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

№ 426 (a) Найдите длину вектора \vec{AB}
 $A(-1;0;2)$ и $B(1;-2;3)$

1 способ

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1) $B(1;-2;3)$

$A(-1;0;2)$

$$\vec{AB}\{2;-2;1\}$$

2) $|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

2 способ

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2}$$

№ 426 (б)

Найдите длину вектора \vec{AB}

$A(-35;-17;20)$ и $B(-34;-5;8)$

1

1 способ

2 способ

