Определение машины Тьюринга

Машина Тьюринга – это строгое математическое построение, математический аппарат, созданный для решения определённых задач.

Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс, созданный для уточнения понятия алгоритма.

Это <u>математический объект</u>, а не физическая машина.

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году

Структура и описание машины Тьюринга

Машина Тьюринга состоит из:

- бесконечной ленты, разделенной на ячейки;
- каретки (читающей и записывающей головки);
- программируемого автомата (программа в виде таблицы).

Автомат каждый раз “видит” только одну ячейку. В зависимости от того, какую букву он видит, а также в зависимости от своего состояния ***q*** автомат может выполнять **следующие действия:**

- ✔ записать новую букву в обозреваемую ячейку;
- ✔ выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться неподвижным;
- ✔ перейти в новое состояние.

Устройство машины Тьюринга

1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$

Элемент a_0 называется **пустой символ** или ***пустая буква*** (признак того, что ячейка пуста).

В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма.

Устройство машины Тьюринга

2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}, \{П, Л, С\}$$

В любой момент времени машина Тьюринга находится в одном из состояний $q_0, q_1, \ldots, q_m$

При этом: q_1 **- начальное состояние (машина начинает работу)**

q_0 **- заключительное состояние (машина закончила работу)**

Символы $\{П, Л, С\}$ – **символы сдвига** (вправо, влево, на месте)

Устройство машины Тьюринга

3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0

Устройство машины Тьюринга

3) Внешняя память (лента)

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0

Пустая клетка содержит a_0.
В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв

Лента является конечной, но дополняется в любой момент ячейками слева и справа для записи новых непустых символов.

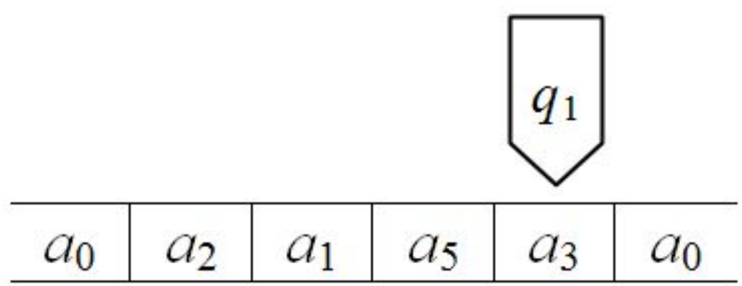
Это соответствует принципу абстракции потенциальной осуществимости

Устройство машины Тьюринга

4) Каретка (управляющая головка)

Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке

В одном такте работы каретка сдвигается на одну ячейку (вправо, влево) или остается на месте



Устройство машины Тьюринга

5) Функциональная схема (программа)

Программа машины состоит из команд:

$$q_i a_j \rightarrow q_k a_l X, \qquad X \in \{П, Л, С\}$$

$$i = \overline{1,m}, \qquad j = \overline{1,n}$$

$$k = \overline{1,m}, \qquad l = \overline{1,n}$$

Для каждой пары (q_i, a_j) программа машины должна содержать одну команду (детерминированная машина Тьюринга)

Описание работы машины Тьюринга

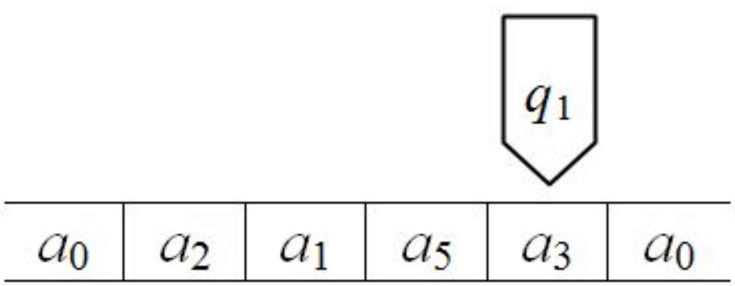
К началу работы машины на ленту подается исходный набор данных в виде слова α

Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \backslash \{a_0\} = \{a_i, \ldots, a_n\}$ воспринимается машиной в **стандартном положении**, если:

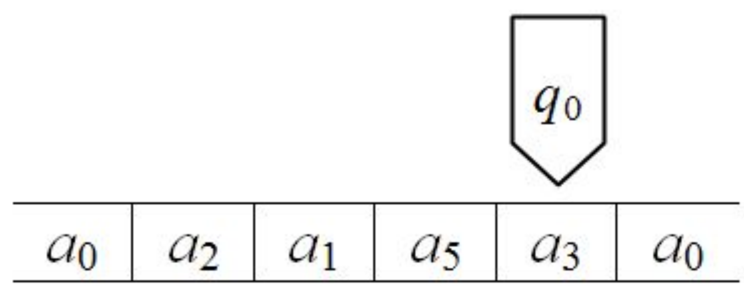
- оно задано в последовательных ячейках ленты,
- все другие ячейки пусты,
- машина обозревает крайнюю правую ячейку из тех, в которых записано слово α

Описание работы машины Тьюринга

Стандартное положение называется **начальным** (**заключительным**), если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (стоп-состоянии q_0)



начальное стандартное



заключительное стандартное

Описание работы машины Тьюринга

Находясь в <u>не заключительном</u> состоянии, машина совершает шаг, который определяется текущим состоянием q_i и обозреваемым символом a_j

Описание работы машины Тьюринга

В соответствии с командой $q_i a_j \rightarrow q_k a_l \mathbf{X}$ выполняются следующие действия:

1) Содержимое обозреваемой ячейки a_j стирается и в нее записывается символ a_l (который может совпадать с a_j)

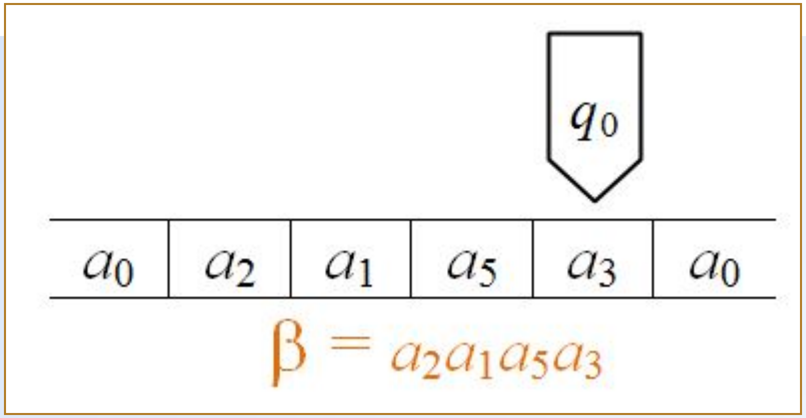
2) Машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с состоянием q_i)

3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом **X** ∈ {П, Л, С}

Описание работы машины Тьюринга

При переходе машины в заключительное состояние q_0 ее работа прекращается

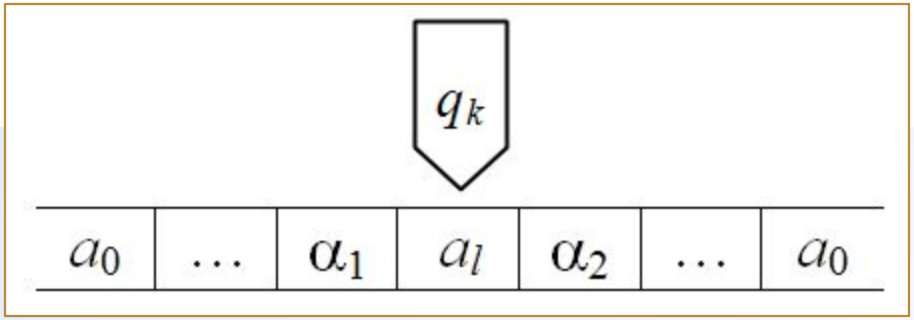
На ленте записан результат работы алгоритма – слово β в алфавите $A \setminus \{a_0\}$



Машинным словом (конфигурацией) машины Тьюринга называется слово вида $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$, где α_1 и α_2 - слова в алфавите А.

Конфигурация $\alpha_1 q_k a_l\, \alpha_2$ интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии q_k
- каретка обозревает на ленте символ a_l
- α_1 и α_2 – это содержимое ленты до и после символа a_l



Применение машин Тьюринга к словам

П р и м е р 1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом *A = {0,1} (здесь 0 - символ пустой ячейки), алфавитом внутренних* состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

$$q_1 0 \to q_2 0П, \quad q_2 0 \to q_0 1, \quad q_1 1 \to q_1 1П, \quad q_2 1 \to q_2 1П.$$

Посмотрим, в какое слово переработает эта машина слово 101, исходя из стандартного начального положения. Будем последовательно выписывать конфигурации машины при переработке ею этого слова. Имеем стандартное начальное положение:

(1)

				q_1				
		1	0	1				

На первом шаге действует команда: $q_1 1 \to q_1 1П$. В результате на машине создается следующая конфигурация:

(2)

					q_1			
		1	0	1	0			

На втором шаге действует команда: $q_1 0 \to q_2 0П$ и на машине создаётся конфигурация:

(3)

						q_2		
		1	0	1	0	0		

Наконец, третий шаг обусловлен командой: $q_2 0 \to q_0 1$. В результате него создаётся конфигурация:

(4)

						q_2		
		1	0	1	0	1		

Виды команд машины Тьюринга

1. **Написать новую букву в обозреваемую ячейку**
2. **Выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться на месте (П, Л, С)**
3. **Перейти в новое состояние.**

	1	1	1	*	1	1	

	a_0	a_1	…	a_i	…	a_j
q_0						
q_1						
…				a_k {ЛПС} q_m		
q_i						
…						
q_j						

Указание о смене символа

Указание о сдвиге каретки

Указание о смене внутреннего состояния

Пример работы машины Тьюринга

Последовательность выполнения команд для частного случая

Изменения на ленте

		1	#	$	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке 1.
Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	#	$	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке #.
Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	0	$	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке $.
Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	0	0	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке 1.
Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	0	0	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке 0.
Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	0	0	1	0	#		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке #.
Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

		1	0	0	1	0	0		

	#	$	0	1	a_0
q_1	0 →	0 →	→	→	q_0

В ячейке пустота.
Ничего не записывать, стоять на месте, перейти в состояние **останова**.

Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, *\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, и следующей функциональной схемой:

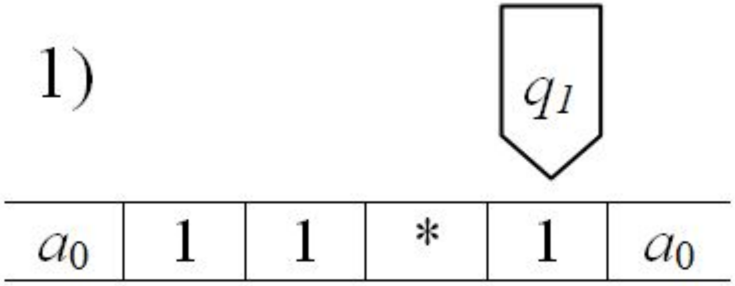
	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 {*} Л$	$q_3 {*} П$

Применить машину Тьюринга к слову α=11*1, начиная со стандартного начального положения

Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$\boxed{q_2 a_0 Л}$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

1)



$q_1 1 \rightarrow \boxed{q_2 a_0 Л}$

Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

1)

q_1

a_0	1	1	*	1	a_0

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 Л$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на a_0

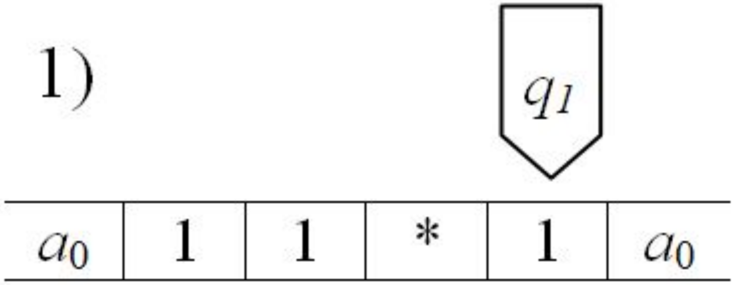
2)

a_0	1	1	*	a_0	a_0

Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

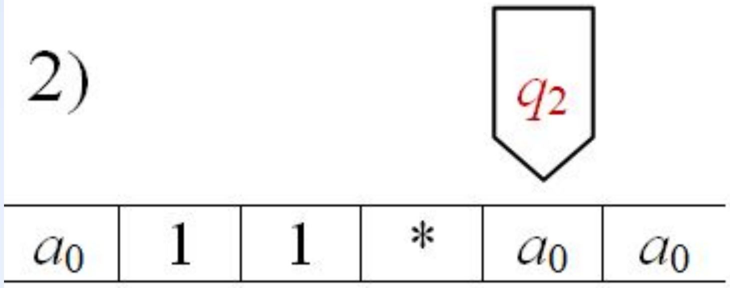
1)



$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 Л$$

2) Машина переходит в новое состояние q_2

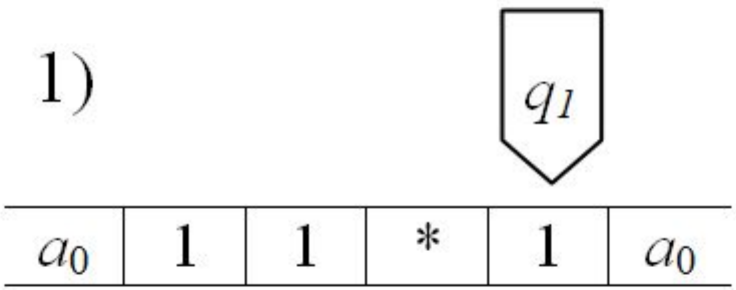
2)



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1$П	$q_1 a_0$Л
1	$q_2 a_0$Л	$q_2 1$Л	$q_3 1$П
*	$q_0 a_0$С	$q_2 *$Л	$q_3 *$П

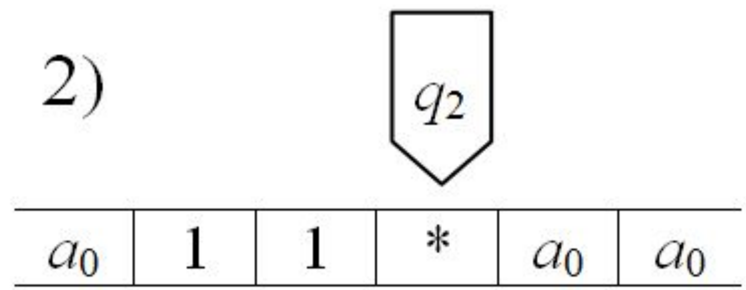
1)



$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0$Л

3) Каретка перемещается влево

2)

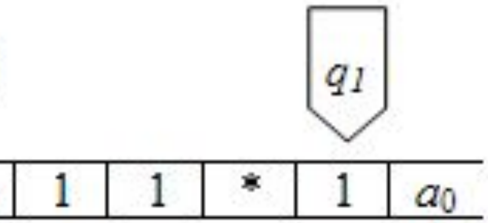


Решение

Полное подробное решение

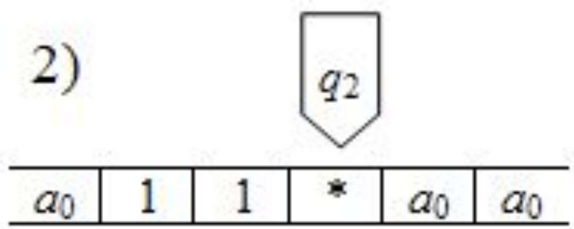
	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 {*} Л$	$q_3 {*} П$

1)



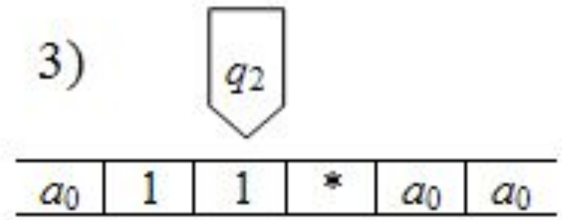
$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 Л$

2)



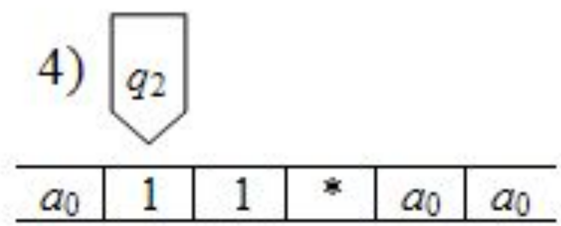
$q_2 * \rightarrow q_2 * Л$

3)



$q_2 1 \rightarrow q_2 1 Л$

4)



$q_2 1 \rightarrow q_2 1 Л$

Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1$П	$q_1 a_0$Л
1	$q_2 a_0$Л	$q_2 1$Л	$q_3 1$П
*	$q_0 a_0$С	q_2*Л	q_3*П

5)

q_2

a_0	1	1	*	a_0	a_0

$q_2 a_0 \to q_3 1$П

6)

q_3

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0

$q_3 1 \to q_3 1$П

7)

q_3

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0

$q_3 1 \to q_3 1$П

8)

q_3

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0

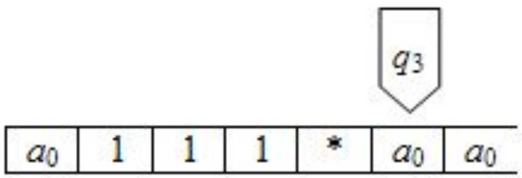
$q_3 * \to q_3 *$ П

Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 {*} Л$	$q_3 {*} П$

9)

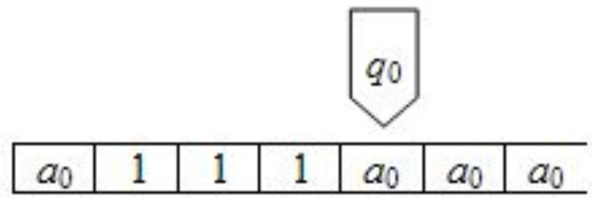


$q_3 a_0 \to q_1 a_0 Л$

10)

$q_1 * \to q_0 a_0 С$

11)



$\beta = 111$

Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1Л$	$q_3 1П$
*	$q_0 a_0 С$	$q_2 {*} Л$	$q_3 {*} П$

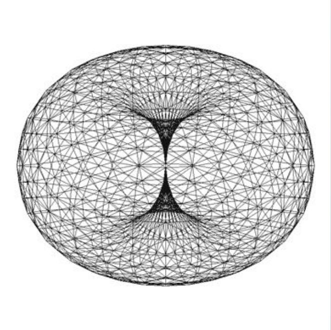
Решение, записанное с помощью конфигураций (в строчку)

$$a_0 11 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 11 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 11 * a_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_0 q_2 a_0 11 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 11 * a_0 \Rightarrow a_0 11 q_3 1 * a_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_0 111 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 111 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 111 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 111 q_0 a_0$$

α = 1*11

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1$П	$q_1 a_0$Л
1	$q_2 a_0$Л	$q_2 1$Л	$q_3 1$П
*	$q_0 a_0$С	q_2*Л	q_3*П

Ответ: β = 111



Люди могут вести себя по-разному в одинаковых ситуациях, и этим они принципиально отличаются от машин.

Примеры машин Тьюринга

ПРИМЕР S : **Прибавление единицы.** Машина Тьюринга задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ и программой, записываемой в табличном виде:

A Q	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 0$П	$q_3 1$	$q_0 0$Л
1		$q_2 1$П	$q_3 1$Л

Пусть на ленте записано подряд n единиц: $011 \ldots 10$ (нули слева и справа – пустые ячейки). Сокращённо данное слово будем записывать так: 01^n0. Посмотрим, в какое слово будет переработано этой машиной данное слово, начав работу с ближайшего левого нуля, то есть в какую конфигурацию будет переработана конфигурация: $q_1 01^n 0$?

$q_1 0 \to q_2 0$ П : $\quad 0q_2 1\ldots10 \quad$ (n единиц)

$q_2 1 \to q_2 1$ П : $\quad 011\ldots1q_2 0 \quad$ (n шагов)

$q_2 0 \to q_3 1$: $\quad 011\ldots1q_3 0 \quad$ (n единиц)

$q_3 1 \to q_3 1$ Л : $\quad q_3 011\ldots110 \quad$ ($n+1$ шагов)

$q_3 0 \to q_0 0$: $\quad q_0 011\ldots110 \quad$ ($n+1$ единиц)

Таким образом, машина переработала слово $q_1 01^n 0$ в слово $q_0 01^{n+1}$, т.е. $\boxed{q_1 01^n 0 \implies q_0 01^{n+1}}$.

Пример 2.2.2. **А : Перенос нуля.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{q_1 001^x 0 \implies q_0 01^x 00}$. Она задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ и программой, записываемой в виде последовательности команд:

$$q_1 0 \to q_2 0\,\text{П}$$

$$q_2 0 \to q_3 1$$

$$q_3 1 \to q_3 1\,\text{П}$$

$$q_3 0 \to q_4 0\,\text{Л}$$

$$q_4 1 \to q_5 0$$

$$q_5 0 \to q_6 0\,\text{Л}$$

$$q_6 1 \to q_6 1\,\text{Л}$$

$$q_6 0 \to q_0 0$$

Пример 2.2.3. **$Б^-$: Левый сдвиг.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{01^x q_1 0 \implies q_0 01^x 0}$. Она задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ и программой:

$$q_1 0 \to q_2 0 \text{ Л}$$

$$q_2 1 \to q_2 1 \text{ Л}$$

$$q_2 0 \to q_0 0 \,.$$

Пример 2.2.4. **$Б^+$: Правый сдвиг.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{q_1 01^x 0 \implies 01^x q_0 0}$. Программа этой машины получается из программы предыдущей машины $Б^-$ заменой символа Л символом П.

Пример 2.2.5. **В : Транспозиция.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{01^x q_1 01^y 0 \implies 01^y q_0 01^x 0}$. Попытаемся объяснить процесс составления (изобретения) программы этой машины Тьюринга.

Сначала слово $01^x q_1 01^y 0$ переводим в слово $01^x q 1^y 00$. При $y > 0$ это достигается следующей программой:

$q_1 0 \to q_2 0П$	$01^x 0 q_2 1^y 0$
$q_2 1 \to q_2 1П$	
$q_2 0 \to q_3 0$	$01^x 01^y q_3 0$
$q_3 0 \to q_4 0Л$	
$q_4 1 \to q_5 0$	
$q_5 0 \to q_6 0Л$	
$q_6 1 \to q_6 1Л$	$01^x q_6 01^{y-1} 00$
$q_6 0 \to q_7 1$	$01^x q_7 1^y 00$

(Обратите внимание на то, что первые три команды представляют собой программу машины $\mathbf{Б}^+$). Чтобы получить слово $01^x q_7 1^y 00$ и при $y = 0$, добавляем команду:

$q_4 0 \to q_7 0 \qquad\qquad 01^x q_7 000.$

Теперь начинаем процесс переброски единиц из массива 1^x в промежуток между двумя последними нулями. Начнём с одной единицы. Это достигается следующей программой (считаем пока, что $x > 0$, $y > 0$):

$q_7 1 \to q_8 1Л \qquad\qquad 01^{x-1} q_8 1 1^y 00$

$q_8 1 \to q_9 0 \qquad\qquad 01^{x-1} q_9 0 1^y 00$

$q_9 0 \to q_{10} 0П \qquad\qquad 01^{x-1} 0 q_{10} 1^y 00$

$q_{10} 1 \to q_{10} 1П \qquad\qquad 01^{x-1} 0 1^y q_{10} 00$

$q_{10} 0 \to q_{11} 1 \qquad\qquad 01^{x-1} 0 1^y q_{11} 10$

$q_{11} 1 \to q_{12} 1Л \qquad\qquad 01^{x-1} 0 1^{y-1} q_{12} 110$

$q_{12}1 \to q_{13}0$ $\quad$ $01^{x-1}01^{y-1}q_{13}010$

$q_{13}0 \to q_{14}0Л$ $\quad$ $01^{x-1}01^{y-2}q_{14}1010$

$q_{14}1 \to q_{14}1Л$ $\quad$ $01^{x-1}q_{14}01^{y-1}010$

$q_{14}0 \to q_{15}1$ $\quad$ $01^{x-1}q_{15}1^{y}010$

Чтобы достичь тот же результат и при $y = 0$, добавляем к записанной программе следующие команды:

$q_{7}0 \to q_{16}1$ $\quad$ $01^{x}q_{16}10$

$q_{16}1 \to q_{17}1Л$ $\quad$ $01^{x-1}q_{17}110$

$q_{17}1 \to q_{15}0$ $\quad$ $01^{x-1}q_{15}010.$

Теперь мы должны переносить следующую единицу из оставшегося массива 1^{x-1} вправо и также вставлять её между двумя нулями. Для этого мы "зацикливаем" программу следующими командами:

$q_{15}1 \to q_{7}1$

$q_{15}0 \to q_{7}0$ $\quad$ $01^{x-1}q_{7}1^{y}010.$

Если $x - 1 > 0$, то на следующем круге слово $01^{x-1}q_{7}1^{y}010$ перерабатывается в слово $01^{x-2}q_{7}1^{y}0110$. Если $x - 2 > 0$, то получим слово $01^{x-3}q_{7}1^{y}01110$ и т.д. Через x циклов получим слово $0q_{7}1^{y}01^{x}0$. Далее, если $y > 0$, то это слово перейдёт в слово $q_{8}01^{y}01^{x}0$; если $y = 0$, то оно перейдёт в слово $q_{17}011^{x}0$. Чтобы получить требуемое, остаётся добавить следующие команды:

$q_{8}0 \to q_{18}0П$

$q_{18}1 \to q_{18}1П$

$q_{18}0 \to q_{0}0$ $\quad$ $01^{y}q_{0}01^{x}0$ $(y > 0)$

$q_{17}0 \to q_{19}0П$

$q_{19}1 \to q_{0}0$ $\quad$ $0q_{0}01^{x}0$ $(y = 0).$

Пример 2.2.6. **Г : Удвоение.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{q_1 0 1^x 0^{x+3} \Longrightarrow q_0 0 1^x 0 1^x 0 0}$. Попытаемся и здесь объяснить процесс составления программы машины Тьюринга. Начнём с команд:

$q_1 0 \to q_2 0 П$	
$q_2 1 \to q_2 1 П$	$01^x q_2 0$

Представим полученное слово $01^x q_2 0$ в виде $01^x q_2 0 0^0 0 0^0 0^{x+1}$ и далее пишем программу, которая при $x - i > 0$ переводит слово $01^{x-i} q_2 0 1^i 0 1^i 0$ в слово $01^{x-(i+1)} q 0 1^{i+1} 0 1^{i+1}$. Вот она:

$q_2 0 \to q_3 0 Л$	$01^{x-(i+1)} q_3 1 0 1^i 0 1^i 0$
$q_3 1 \to q_4 0$	
$q_4 0 \to q_5 0 П$	
$q_5 0 \to q_6 1$	
$q_6 1 \to q_6 1 П$	$01^{x-(i+1)} 0 1^{i+1} q_6 0 1^i 0$
$q_6 0 \to q_7 0 П$	
$q_7 1 \to q_7 1 П$	
$q_7 0 \to q_8 1$	
$q_8 1 \to q_8 1 Л$	
$q_8 0 \to q_9 0 Л$	
$q_9 1 \to q_9 1 Л$	$01^{x-(i+1)} q_9 0 1^{i+1} 0 1^{i+1}.$

Зацикливаем данную процедуру с помощью команды:

$q_9 0 \to q_2 0$ $\qquad$ $01^{x-(i+1)} q_2 01i + 101^{i+1}.$

На следующем цикле мы получим слово $01^{x-(i+2)} q_2 01^{i+2} 01^{i+2}$ и т.д., вплоть до слова $0 q_2 01^x 01^x 0$. Команда $q_2 0 \to q_3 0$Л создаст конфигурацию $q_3 001^x 01^x 0$. Произведя теперь перенос нуля **А**, затем правый сдвиг **Б**$^+$, ещё раз перенос нуля **А** и, наконец, левый сдвиг **Б**$^-$, получим требуемое слово: $q_0 01^x 01^x 00$.

Композиция машин Тьюринга

Определение

Пусть заданы машины Тьюринга Θ_1 и Θ_2, имеющие общий внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ *и алфавиты внутренних* состояний $Q_1 = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ и $Q_2 = \{q_0, q_1', ..., q_t'\}$ *соответственно.*

Композицией (или произведением) машины Θ_1 *на машину* Θ_2 называется новая машина Θ (которая обозначается $\Theta_1 \cdot \Theta_2$) с тем же внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ *алфавитом внутренних* состояний

$$Q = \{q_0, q_1, ..., q_n, q_{n+1}, ..., q_{n+t}\}$$

и программой, получающейся следующим образом.

Во всех командах из Θ_1, содержащих символ остановки q_0, заменяем последний на q_{n+1}. Все остальные символы в командах из Θ_1 остаются неизменными. В командах из Θ_2 символ q_0 оставляем неизменным, а все остальные состояния q'_i $(i = 1,...,t)$ заменяем соответственно на q_{n+i}. Совокупность всех так полученных команд образует программу машины-композиции $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$.

Таким образом, работа машины $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ состоит в следующем. Сначала работает машина Θ_1; в момент её остановки начинает работу машина Θ_2, которая своей остановкой заканчивает работу машины $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$.

Применение композиции машин Тьюринга для их конструирования. Введённая операция играет важную роль во всех вопросах, связанных с синтезом машин Тьюринга, т.е. является удобным инструментом для конструирования машин Тьюринга. Покажем это на примерах.

Пример 2.3.2. **Ц : Циклический сдвиг.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{01^x01^y q_1 01^z0 \implies 01^z q_0 01^x 01^y 0}$.

Эту машину можно составить (синтезировать) в виде композиции ранее построенных машин Тьюринга. Проверим, что такой перевод произойдёт в результате последовательного применения (композиции) ранее построенных машин **В**, **Б**$^-$ и **В**, а именно

$$\boxed{\mathbf{Ц}_3 = \mathbf{В}\mathbf{Б}^- \mathbf{В}}\ .$$

В самом деле, вычисляем: $\mathbf{В}\mathbf{Б}^-\mathbf{В}(01^x01^y q_1 01^z0) =$

$= \mathbf{В}\mathbf{Б}^-(\mathbf{В}(01^x01^y q_1 01^z0)) = \mathbf{В}\mathbf{В}^-(01^x01^z q 01^y0) =$

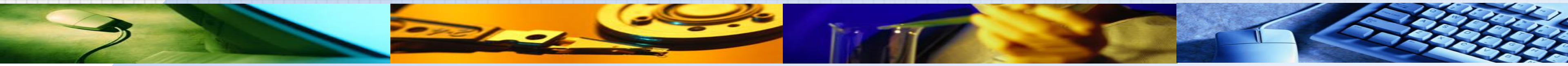
$= \mathbf{В}(\mathbf{Б}^-(01^x01^z q 01^y 0)) = \mathbf{В}(01^x q 01^z 01^y 0) = 01^z q_0 01^x 01^y 0\ .$

Пример 2.3.3. **$К_2$: Копирование.** Эта машина осуществляет переработку: $\boxed{q_1 01^x 01^y \;\Longrightarrow\; 01^x 01^y q_0 01^x 01^y}$.

Проверьте, что эта машина представляет собой следующую композицию построенных выше машин:

$$\mathbf{К_2 \;=\; Б^+\, ГВБ^+\, ВГВБ^+\, ВБ^-\, Б^-\, ВБ^+.}$$

Обратите только внимание на то, что применять машины нужно в последовательности слева направо: **$Б^+$** , **Г** , **В** , **$Б^+$** и т.д.



Вычислимые по Тьюрингу функции

$$f: N^n \to N.$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

$$\text{Nom } a_i = p_i$$

$$\text{Nom } a_0 = p_0 = 2$$

$$\text{Nom } a_1 = p_1 = 3,$$

$$\text{Nom } a_2 = p_2 = 5, \quad \ldots$$

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \ldots a_{i_k}$$

$$\text{Nom } \alpha = 2^{Nom\ a_{i_1}} \cdot 3^{Nom\ a_{i_2}} \cdot 5^{Nom\ a_{i_3}} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{Nom\ a_{i_k}},$$

где p_{k-1} -- k-ое по порядку простое число. Ясно, что по данному номеру занумерованное им слово восстанавливается однозначно.

По исходному алгоритму переработки слов можно ***построить алгоритм для вычисления соответствующей функции;***
в этом случае
такие функции называются *алгоритмически (или эффективно) вычислимыми.*

*Возникает **вопрос** о соотношении между классом
алгоритмически вычислимых функций и классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга.*
Совпадают ли эти классы?

Вычислимость функций на машине Тьюринга

Определение

Функция называется *вычислимой по Тьюрингу, или вычислимой на машине Тьюринга*, если существует машина Тьюринга, вычисляющая её,

т.е. *такая машина Тьюринга, которая вычисляет её значения для тех наборов значений аргументов, для которых функция определена, и работающая вечно, если функция для данного набора значений аргументов не определена.*

Остаётся ***договориться*** о некоторых условностях

Во-первых,

речь идёт о функциях (*или возможно о частичных функциях, т.е. не всюду определённых*), заданных на множестве натуральных чисел и принимающих также натуральные значения.

Во-вторых,

нужно условиться:

- как записывать на ленте машины Тьюринга значения *аргумент* $x_1, x_2, ..., x_n$
- *из какого положения* начин $f(x_1, x_2, ..., x_n)$отку исходного слова
- в каком положении получать значение функции.

Это можно делать следующим образом: Значения $x_1, x_2, ..., x_n$ *аргументов будем* располагать на ленте в виде следующего слова:

$$0\underbrace{1\,1\,...\,1}_{x_1}0\underbrace{1\,1\,...\,1}_{x_2}0\,...\,0\underbrace{1\,1\,...\,1}_{x_n}0\,,$$

где в первом массиве число единиц равно x_1, во втором – x_2, и т.д., в последнем – x_n.

Здесь полезно ввести следующие обозначения. Для натурального x обозначаем: $1^x = 1...1$, $0^x = 0...0$. Дополнительно полагаем $0^0 = 1^0 = \Lambda$ – пустое слово. Так что на слова $1^0 = \Lambda$, $1^1 = 1$, $1^2 = 11$, $1^3 = 111, ...$ будем смотреть как на "изображения" натуральных чисел 0,1,2,3,... соответственно. Таким образом, предыдущее слово можно представить следующим образом: $01^{x_1}01^{x_2}...01^{x_n}0$.

Начинать переработку данного слова будем из ***стандартного начального положения***
Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *определена на данном наборе значений* аргументов, то в результате на ленте должно быть записано подряд $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *единиц;*
в противном случае машина должна работать бесконечно.

При выполнении всех перечисленных условий будем говорить, что ***машина Тьюринга вычисляет данную функцию.***

Таким образом, сформулированное определение становится абсолютно строгим

Правильная вычислимость функций на машине Тьюринга

Определение

Будем говорить, что машина Тьюринга ***правильно вычисляет функцию*** $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, *если начальное слово* $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \ldots 0 1^{x_n} 0$ она переводит в слово $q_0 0 1^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} 0 \ldots 0$ *и* при этом в процессе работы ***не пристраивает к начальному слову новых ячеек на ленте ни слева, ни справа.***

Если же функция f не определена на данном наборе значений аргументов, то, начав работать из указанного положения, она никогда в процессе работы ***не будет надстраивать ленту слева***.

Тезис Тьюринга
(основная гипотеза теории алгоритмов)

Тезис Тьюринга. *Для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм, когда функция является вычислимой по Тьюрингу, то есть когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.*